этими свойствами, называются «грубыми». В § 4 дается точная математическая формулировка грубости системы, устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы система была грубой, и рассматривается, какие типы «особых» траекторий и какие типы ячеек, заполненных обыкновенными траекториями, возможны в грубых системах [17].

В § 5 в предположении, что в правые части системы (6.1) входит некоторый параметр, рассматривается зависимость качественной картины от параметра. Если предположить «общий» характер зависимости правых частей от параметра, то можно считать, что при всех значениях параметра, кроме бифуркационных (ср. гл. II, § 5), система является грубой. При прохождении параметра через бифуркационное значение совершается переход от одной грубой системы к другой, с измененной качественной структурой. В § 5 рассмотрено, как совершается это изменение качественной структуры, и в частности, как появляются (рождаются) и исчезают предельные циклы [10—13].

§ 2. Общая теория поведения траекторий на фазовой плоскости. Предельные траектории и их классификация

1. Предельные точки полутраектории и траектории. Введем прежде всего некоторые элементарные понятия, которыми мы в дальнейшем будем пользоваться.

Пусть

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t-t_0;\ x_0,\ y_0) = x(t), \\ y &= \psi(t-t_0;\ x_0,\ y_0) = y(t) \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

— решение системы (6.1) и L — соответствующая этому решению траектория. Часть траектории, точкам которой соответствуют значения $t \geqslant t_0$, будем называть *положительной полутраекторией* и обозначать через L^+ или $L^+_{M_0}$, где M_0 — точка, соответствующая значению $t = t_0$. Точно так же часть траектории, точкам которой соответствуют значения $t \leqslant t_0$, будем называть *отрицательной полутраекторией* и обозначать через L^- или $L^-_{M_0}$.

Если при всех значениях $t \geqslant t_0$ (или $t \leqslant t_0$), при которых определено решение (6.1), изображающая точка $M[x(t),\ y(t)]$ остается в некоторой ограниченной части плоскости, то это решение заведомо определено при всех значениях t, $t_0 \leqslant t < +\infty$ (или при $-\infty < t \leqslant t_0$), так что в этом случае точкам полутраектории $L^+_{M_0}$ ($L^-_{M_0}$) соответствуют всевозможные значения $t \geqslant t_0$ ($t \leqslant t_0$). Если изображающая точка $M[x(t),\ y(t)]$ остается в некоторой ограниченной части плоскости при всех t, при которых определено решение (как $t \geqslant t_0$, так и $t \leqslant t_0$), то решение, очевидно, определено при всех t, $-\infty < t < +\infty$.

Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать *только такие полутраектории и траектории, которые целиком лежат в некоторой*

ограниченной части плоскости (они и представляют основной интерес) и в дальнейшем не будем это оговаривать каждый раз. Иногда, чтобы подчеркнуть, что рассматриваются *все* точки траектории, мы будем называть ее *целой траекторией*.

Существенными для дальнейшего являются понятия предельной точки полутраектории и предельной траектории. Точка M^* называется *предельной точкой* положительной полутраектории L^+ (или соответственно отрицательной полутраектории L^-), если при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ и любом сколь угодно большом $T > t_0$ (любом $T < t_0$) в ε-окрестности точки M^* имеется точка полутраектории $L^+(L^-)$, соответствующая значению $t > T$ (или соответственно $t < T$)[1].

Из приведенного определения предельной точки[2]) полутраектории непосредственно следует, что если ξ^*, η^* — координаты предельной точки M^* положительной полутраектории L^+, то существует последовательность неограниченно возрастающих значений t:

$$t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n,\ \ldots \qquad (t_n \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to +\infty)$$

таких, что

$$\lim_{n \to +\infty} x(t_n) = \xi^* \quad \text{и} \quad \lim_{n \to +\infty} y(t_n) = \eta^*. \tag{6.4}$$

Очевидно, обратно, из существования последовательности неограниченно возрастающих значений t_n, для которой выполняются условия (6.4), следует, что точка $M^*(\xi^*, \eta^*)$ есть предельная точка полутраектории L^+. Очевидно также, что если точка M^* есть предельная точка полутраектории L^+ при некотором выборе начального положения изображающей точки M_0 на L^+, то она будет также предельной точкой L^+ и при любом другом выборе точки M_0 на L^+.

Точка M^* называется *предельной точкой целой траектории* L, если M^* есть предельная точка либо для положительной полутраек-

---

[1]) В дальнейшем мы неоднократно будем рассматривать точки, лежащие на расстоянии, меньшем некоторого заданного ε, от данной точки или от данной траектории, полутраектории и т. п. или, вообще, от заданного множества точек K. Совокупность всех точек, находящихся на расстоянии, меньшем ε, от точек заданного множества K, мы будем (ради краткости) называть ε-окрестностью этого множества. Таким образом, ε-окрестность данной точки составляют все внутренние точки круга радиуса ε с центром в этой точке.

[2]) Термин «предельная точка» употребляется и в теории множеств. Точка M^* называется в теории множеств предельной точкой множества K, если в любой сколь угодно малой ее окрестности лежат точки множества K, отличные от M^*. Не следует смешивать эти два понятия. Например, состояние равновесия является предельной точкой для самого себя (в смысле определения, данного в тексте), но не является предельной точкой в теоретико-множественном смысле. В самом деле, в этом случае все множество K состоит из единственной точки (из состояния равновесия) и поэтому в любой окрестности состояния равновесия не содержится никаких отличных от него точек множества K.

Вместо термина «предельная точка» в смысле теории множеств мы во избежание путаницы будем пользоваться термином «точка сгущения».

тории L^+, либо для отрицательной полутраектории L^-, выделенной из траектории L (в первом случае M^* часто называют ω-предельной точкой, во втором — α-предельной точкой траектории L).

Предельная точка траектории L может как принадлежать самой траектории L, так и не принадлежать ей. Поясним это на примерах тех полутраекторий, которые встречались в рассмотренных выше частных случаях динамических систем. Всякое состояние равновесия является своей единственной предельной точкой (как ω-, так и α-предельной). Все точки замкнутой траектории, очевидно, также являются ее ω- и α-предельными точками. Действительно, соответствующее замкнутой траектории L движение

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

является периодическим (с некоторым периодом T_0) и каждая точка $M(\xi, \eta)$ этой траектории соответствует бесчисленному множеству значений t:

$$t_1 = \tau, \quad t_2 = \tau + T_0, \ \ldots, \quad t_n = \tau + (n-1)\,T_0, \ \ldots,$$

а также

$$t_1' = \tau, \quad t_2' = \tau - T_0, \ \ldots, \quad t_n' = \tau - (n-1)\,T_0, \ \ldots$$

Поэтому она согласно определению является как ω-, так и α-предельной точкой L (в рассматриваемом случае $x(t_n) = \xi$, $y(t_n) = \eta$ при любом n). Траектория, стремящаяся к состоянию равновесия (как в случае узла и фокуса, так и в случае седла), имеет своей единственной предельной точкой это состояние равновесия. Для полутраектории L^+ (или L^-), имеющей вид спирали, наматывающейся на предельный цикл, очевидно, все точки этого предельного цикла являются предельными. Очевидно, в двух последних примерах предельная точка не являлась точкой соответствующей полутраектории.

Ниже мы будем рассматривать только положительные полутраектории (целиком лежащие, как уже было сказано выше, в ограниченной области плоскости), так как все сказанное относительно положительных полутраекторий, очевидно, справедливо и для отрицательных полутраекторий (с заменой t на $-t$).

2. Первая основная теорема о множестве предельных точек полутраектории. Докажем теперь следующую теорему, которая позволяет ввести понятие предельной траектории.

Теорема о предельной траектории. *Если M^* (ξ^*, η^*) есть предельная точка полутраектории L^+, то и все точки траектории L^*, проходящей через точку M^*, являются предельными для L^+.*

Мы всегда можем предполагать, что траектория L^* отличается от состояния равновесия, так как в случае, когда M^* — состояние равновесия, справедливость утверждения теоремы очевидна. Пусть $M'(\xi', \eta')$ — какая-нибудь отличная от M^* точка траектории L^*, проходящей через точку $M^*(\xi^*, \eta^*)$. Траектории L^* соответствует

бесчисленное множество движений, отличающихся друг от друга лишь выбором начала отсчета времени, и очевидно, какое бы движение мы ни выбрали, разность значений t, соответствующих данным точкам M^* и M', всегда одна и та же; обозначим эту разность через τ. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим ε-окрестность точки M^*. В силу теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий для всякого $\varepsilon > 0$ всегда можно указать такое $\delta > 0$, чтобы всякая траектория, проходящая при $t = \tau^*$ через какую-либо точку δ-окрестности точки M^*, проходила бы при значении $t = \tau^* + \tau$ через некоторую точку ε-окрестности точки M'. Так как точка M^* является предельной точкой для L^+, то на L^+ существует бесконечное множество точек $M_n(x_n, y_n)$, соответствующих неограниченно возрастающим значениям t_n и находящихся в δ-окрестности точки M^*. Но тогда на L^+ будет также существовать бесконечное множество точек $M'_n(x'_n, y'_n)$, соответствующих тоже неограниченно возрастающим значениям $t'_n = t_n + \tau$ и лежащих в ε-окрестности точки M'. При этом в случае, когда $\tau < 0$, всегда можно начать со столь большого $n = n_0$, чтобы мы имели $t'_{n_0} = t_{n_0} + \tau > t_0$, так что точки $M'_n(x'_n, y'_n)$ $(n \geqslant n_0)$ заведомо принадлежали бы полутраектории L^+. Но ε можно взять сколь угодно малым, и следовательно, точка M' является предельной для полутраектории L^+. Так как в качестве точки M' можно взять любую точку траектории L^*, то, очевидно, всякая ее точка является предельной для L^+. Таким образом теорема доказана.

Траекторию L^* мы будем называть предельной траекторией для полутраектории L^+ или просто *предельной траекторией*. Очевидно, все точки L^* будут либо точками области G, либо точками границы G, т. е. L^* лежит в ограниченной части плоскости. Когда предельная точка траектории L является точкой самой этой траектории, то L называется *самопредельной* траекторией. В силу предыдущего, состояния равновесия и замкнутая траектория являются самопредельными.

Прежде чем переходить к доказательству общих теорем относительно возможного характера предельных траекторий — теорем, которые представляют для нас сейчас наибольший интерес, напомним, что называется замкнутым множеством (в теоретико-множественном смысле), и введем понятие связного множества. Как известно, множество точек (на плоскости) называется *замкнутым*, если оно содержит все свои точки сгущения. Таким образом, если последовательность точек, принадлежащих данному замкнутому множеству K, стремится к некоторой точке N_0, то эта точка N_0 непременно является точкой множества K. Замкнутое множество называется *связным*, если оно не может быть представлено как сумма двух замкнутых множеств, не имеющих друг с другом общих точек. Заметим, что если мы имеем два замкнутых множества без общих точек, то наименьшее из расстояний между любыми двумя точками, из которых одна принадлежит одному множеству, а другая — другому, отлично от нуля.

Пусть K — множество *всех* предельных точек данной полутраектории L^+. Следующая основная теорема характеризует это множество.

Первая основная теорема. *Множество предельных точек данной полутраектории L^+ является замкнутым, связным и состоит из целых траекторий.*

Докажем, что множество K замкнутое (в теоретико-множественном смысле), т. е. что всякая точка сгущения множества K принадлежит K. Пусть M — точка сгущения множества K. Тогда по самому определению точки сгущения в любой ее окрестности есть точки K, т. е. предельные точки полутраектории L^+, а следовательно и точки самой полутраектории L^+, соответствующие сколь угодно большим значениям t. А это и означает, что M есть предельная точка полутраектории L^+.

Для доказательства того, что множество K связное, предположим противное, т. е. предположим, что оно несвязное и, следовательно, в силу того, что оно является замкнутым, может быть представлено в виде суммы двух замкнутых множеств K_1 и K_2 без общих точек (при этом множества K_1 и K_2 содержат все предельные точки L^+). Наименьшее расстояние между двумя точками, одна из которых принадлежит множеству K_1, а другая множеству K_2, отлично от нуля. Пусть ρ_0 — это расстояние. Возьмем $\varepsilon < \frac{\rho_0}{3}$ и рассмотрим ε-окрестности множеств K_1 и K_2, которые также не имеют общих точек. Так как точки множеств K_1 и K_2 являются предельными для полутраектории L^+, то в их ε-окрестностях непременно лежат бесконечные последовательности точек этой полутраектории, соответствующие неограниченно возрастающим значениям t. Но тогда в силу непрерывности полутраектории и вне ε-окрестностей множеств K_1 и K_2 должно лежать бесчисленное множество точек полутраектории L^+, соответствующих неограниченно возрастающим значениям t. Так как по предположению полутраектория L^+ лежит в ограниченной части плоскости, то эти точки должны иметь хотя бы одну точку сгущения M_1. Поскольку они соответствуют неограниченно возрастающим значениям t, то M_1 будет предельной точкой полутраектории L^+. Точка M_1 не может принадлежать ни множеству K_1, ни множеству K_2 (так как точка M_1 лежит либо вне ε-окрестностей множеств K_1 и K_2, либо, в крайнем случае, на границе этих ε-окрестностей), и следовательно, у L^+ должны существовать предельные точки, отличные от точек множеств K_1 и K_2, что противоречит сделанному предположению. Таким образом, второе утверждение теоремы доказано.

Последнее утверждение теоремы — о том, что множество предельных точек полутраектории L^+ состоит из целых траекторий, — очевидно, непосредственно следует из предыдущей теоремы.

Так как в силу сделанных предположений число состояний равновесия у рассматриваемой нами системы во всякой ограниченной области фазовой плоскости конечно, то из доказанной теоремы следует, в частности, что в том случае, когда среди предельных точек полутраектории L^+ нет точек, отличных от состояний равновесия, эта *полутраектория будет иметь одну и только одну предельную*

точку — одно состояние равновесия. Очевидно также, что если K есть множество всех предельных точек данной полутраектории, то при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ все точки этой полутраектории, соответствующие значениям $t > T$, где T — зависящая от ε величина, будут лежать в ε-окрестности множества K.

Мы доказали первую основную теорему для случая траекторий на фазовой плоскости, однако она справедлива и для траекторий на любой фазовой поверхности (например, на торе), а также в фазовом пространстве n измерений (в случае системы n уравнений первого порядка).

3. Вспомогательные предложения. Прежде чем перейти к доказательству второй основной теоремы, которая покажет нам, какие траектории могут быть предельными, нам придется остановиться на ряде вспомогательных предложений, связанных с так называемым «отрезком без контакта». Возьмем на фазовой плоскости какую-нибудь точку $M_0(x_0, y_0)$, отличную от состояния равновесия. Пусть L_0 — траектория, проходящая через точку M_0. Проведем через эту точку прямую D, не касающуюся в точке M_0 траектории L_0. Очевидно, что мы всегда можем выделить на этой прямой такой отрезок, содержащий точку M_0, который ни в одной своей точке не касался бы ни одной из траекторий системы (6.1). Такой отрезок, как известно, и называется *отрезком без контакта.*

Дадим ряд предложений, относящихся к отрезку без контакта, которые нам будут необходимы в дальнейшем; некоторые из этих предложений совершенно очевидны, и мы их не будем доказывать.

I. Прямая D делит фазовую плоскость на две части, и мы можем различать две стороны прямой D. Пусть на рассматриваемой траектории L_0 задано движение $x = \bar{x}(t)$, $y = \bar{y}(t)$ [1]) и пусть точке M_0 соответствует значение $t = t_0$. Так как в точке M_0 прямая D не касается траектории L_0, то в силу непрерывности правых частей уравнений (6.1) мы всегда можем указать такие $t_1 < t_0$ и $t_2 > t_0$, чтобы часть траектории, соответствующая значениям t, удовлетворяющим неравенству $t_1 < t < t_0$, лежала целиком по одну сторону прямой D, а часть траектории, соответствующая значениям t, лежащим в интервале $t_0 < t < t_2$, целиком лежала по другую сторону прямой.

II. В силу непрерывности правых частей системы (6.1) изображающая точка, двигаясь по любой из траекторий, пересекающих отрезок без контакта, при возрастании t всегда переходит с одной и той же стороны прямой D на другую ее сторону, т. е. *все траектории пересекают отрезок без контакта в одном и том же направлении.*

Отсюда, в частности, следует, что если какая-нибудь фазовая траектория пересекает отрезок без контакта дважды, то она может

[1]) В следующих предложениях мы будем считать, что если дана траектория L_0, то дано и движение по траектории, т. е. решение системы (6.1), соответствующее этой траектории, с некоторым выбранным значением t_0.

пересечь его только так, как это показано на рис. 290, но не так, как показано на рис. 291.

III. Сколь бы малое $\Delta > 0$ мы ни взяли, всегда существует столь малая окрестность точки M_0, что всякая траектория, проходящая при $t = t_0$ через точку этой окрестности, пересекает отрезок без контакта при некотором значении $t = t_0'$, отличающемся от значения t_0 меньше чем на Δ, $|t_0' - t_0| < \Delta$.

IV. *Всякая часть траектории, соответствующая значениям t внутри некоторого конечного промежутка $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, может*

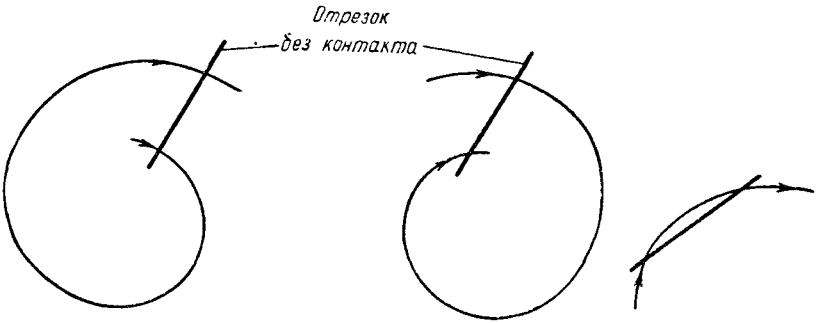

Рис. 290. Рис. 291.

иметь лишь конечное число точек пересечения с любым отрезком без контакта.

Доказательство поведем от противного. Предположим, что траектория L имеет бесчисленное множество точек пересечения с некоторым отрезком без контакта l и что все эти точки соответствуют значениям t, лежащим между α и β. В силу принципа Больцано-Вейерштрасса из бесчисленного множества значений t, соответствующих этим точкам пересечения, мы можем выбрать последовательность $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$, стремящуюся (при $n \to +\infty$) к некоторому значению τ ($\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$) и при этом такую, чтобы соответствующие значениям t_n точки $M_n(x_n, y_n)$ траектории L стремились бы к точке $M_0(x_0, y_0)$, соответствующей значению $t = \tau$. Эта точка M_0, очевидно, должна лежать на отрезке без контакта l, поскольку к ней стремятся точки M_n, лежащие на этом отрезке. Но в силу предложения I для значений t, достаточно близких к τ, на траектории L не может быть точек, которые лежали бы опять на отрезке без контакта. Последнее утверждение находится в противоречии с тем, что τ есть предельное значение t, соответствующее точкам пересечения L с l, т. е. с тем, что есть сколь угодно близкие к τ значения t, которым соответствуют точки пересечения L с l. Мы пришли к противоречию, и этим самым доказано, что число точек конечно.

V. *Точки пересечения незамкнутой траектории L_0 с любым отрезком без контакта l, соседние по значениям времени t, будут также соседними и на отрезке l.* Расположим значения t, соответствующие точкам пересечения траектории L_0 с отрезком l, в порядке возрастания t: $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$ Возьмем две точки пересечения L_0 с l: Q_k и Q_{k+1}, соответствующие соседним значениям времени t_k и t_{k+1}, и покажем, что на отрезке Q_kQ_{k+1} не может быть больше точек пересечения L_0 с l. Действительно, если бы на отрезке Q_kQ_{k+1} была еще одна точка пересечения, то она могла бы соответствовать либо значениям $t < t_k$, либо значениям $t > t_{k+1}$ (так как между t_k и t_{k+1} нет значений t_n, соответствующих точкам пересечения L_0 с l). Но при значении $t = t_{k+1}$ изображающая точка, двигающаяся по траектории, входит в область, лежащую внутри замкнутой кривой $Q_kMQ_{k+1}Q_k$, составленной из куска траекторий Q_kMQ_{k+1} и отрезка $Q_{k+1}Q_k$, или выходит из этой области (рис. 292). Для того чтобы изображающая точка смогла еще раз пересечь отрезок Q_kQ_{k+1}, она должна выйти из этой замкнутой кривой (или войти внутрь ее). Это невозможно, так как изображающая точка не может пересечь ни кусок траектории Q_kMQ_{k+1} (траектории на фазовой плоскости не пересекаются), ни отрезок Q_kQ_{k+1}, так как она должна была бы пересечь последний в направлении, противоположном первоначальному, что невозможно по предложению II. Отсюда следует, что на нашем отрезке не может быть точек пересечения для $t > t_{k+1}$. Таким же образом можно показать, что на отрезке Q_kQ_{k+1} не может быть точек пересечения с траекторией L_0, соответствующих значениям $t < t_k$.

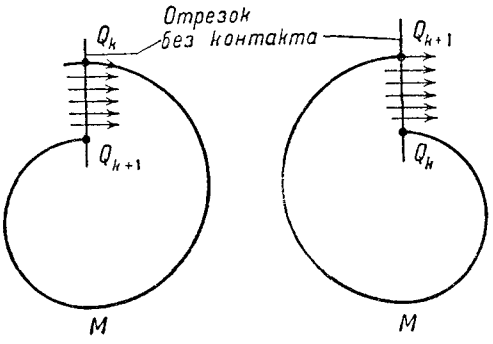

Рис. 292.

Доказанное предложение можно сформулировать и так: *последовательные точки пересечения положительной полутраектории с любым отрезком без контакта l располагаются на отрезке l в порядке возрастания времени.*

VI. *Замкнутая траектория может иметь с отрезком без контакта только одну точку пересечения.* Действительно, предположим, что замкнутая траектория L_0 имеет более одной точки пересечения с отрезком без контакта l, и пусть Q_k и Q_{k+1} — две соседние точки пересечения, соответствующие значениям $t = t_k$ и $t = t_{k+1}$ ($t_{k+1} > t_k$), так что на отрезке Q_kQ_{k+1} нет больше точек пересечения L_0 с l. Очевидно, что на траектории L_0 есть точки, со-

ответствующие значениям $t < t_k$, лежащие вне (или внутри) замкнутой кривой $Q_kMQ_{k+1}Q_k$, составленной из куска Q_kMQ_{k+1} траектории L_0 и отрезка $Q_{k+1}Q_k$, а также есть точки, соответствующие значениям $t > t_{k+1}$, лежащие внутри (или вне) этой замкнутой кривой (рис. 292). Так как траектория L_0 замкнута, то изображающая точка, двигающаяся по дуге Q_kMQ_{k+1} и попавшая внутрь (оказавшаяся вне) кривой $Q_kMQ_{k+1}Q_k$, должна выйти из нее (войти в нее), чтобы описать внешнюю (внутреннюю) часть траектории L_0. Это, очевидно, невозможно, так как все траектории пересекают отрезок Q_kQ_{k+1} в одном и том же направлении, а пересечь дугу траектории Q_kMQ_{k+1} изображающая точка также не может. Противоречие, к которому мы пришли, доказывает, что все точки пересечения замкнутой траектории L_0 с отрезком без контакта l непременно совпадают.

VII. Рассмотрим незамкнутую положительную полутраекторию L^+, для которой траектория L^* (не являющаяся состоянием равновесия) есть предельная. *Если через какую-нибудь точку M_0 траектории L^* проведен отрезок без контакта, то на этом отрезке будет лежать бесконечная последовательность точек полутраектории L^+ (расположенных в порядке возрастания времени t), стремящихся к точке M_0.* Это предложение является следствием первой основной теоремы и предложений III и V.

VIII. Пусть $x = \bar{x}(t)$, $y = \bar{y}(t)$ — движение по траектории L, не являющейся состоянием равновесия, причем точка M_0 этой траектории соответствует значению $t = t_0$, а точка M_1 — значению $t = t_1$. Пусть l — отрезок без контакта в точке M_1. *Тогда, сколь бы малы ни были* ε и Δ ($\varepsilon > 0$, $\Delta > 0$), *всегда можно указать такое* $\delta = \delta(\varepsilon, \Delta)$, *что изображающая точка, помещенная в момент $t = t_0$ на расстоянии, меньшем δ, от точки M_0, при некотором значении $t = t_1'$, удовлетворяющем неравенству $|t_1 - t_1'| < \Delta$, необходимо пересечет отрезок без контакта l, оставаясь в течение промежутка времени от $t = t_0$ до $t = t_1'$ на расстоянии, меньшем ε, от точек траектории L, соответствующих значениям t между t_0 и t_1.*

Это предложение (справедливое как для $t_1 > t_0$, так и для $t_1 < t_0$) является следствием теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий и предложения III.

4. Вторая основная теорема о множестве предельных точек полутраектории. *Если полутраектория L^+ не замкнута и имеет хотя бы одну предельную траекторию, не являющуюся состоянием равновесия, то она сама не может быть предельной.*

Пусть L^* — траектория, не являющаяся состоянием равновесия, — предельная для полутраектории L^+. Будем доказывать теорему от противного. Предположим, что полутраектория L^+ сама является предельной для некоторой полутраектории L_1^+, и покажем, что мы придем к противоречию.

Возьмем какую-нибудь точку P на траектории L^* и проведем через эту точку отрезок без контакта l. Так как точка P является

предельной для полутраектории L^+, то на отрезке l будет лежать бесчисленное множество точек траектории L^+, расположенных в порядке возрастания t (предложение VII).

Возьмем три последовательные точки пересечения L^+ с l: P_1, P_2, P_3; так как мы предположили, что траектория L^+ сама является предельной для полутраектории L_1^+, то, в частности, предельной для полутраектории L_1^+ будет точка P_2. Тогда, опять-таки на основании предложения VII, либо на отрезке P_1P_2, либо на отрезке P_2P_3 должна быть последовательность точек полутраектории L_1^+, стремящихся к точке P_2. Мы покажем, что это невозможно, так как полутраектория L_1^+ может пересекать каждый из отрезков P_1P_2 и P_2P_3 только по одному разу.

Действительно, пусть Q — одна из точек пересечения полутраектории L_1^+ с отрезком P_1P_2. Изображающая точка, помещенная в момент $t=\tau$ в точку Q, при значениях $t>\tau$ либо войдет в область, лежащую внутри замкнутой кривой $P_1MP_2P_1$, образованной дугой P_1MP_2 полутраектории L^+ и отрезком без контакта P_1P_2, либо выйдет из этой области. Пусть, например, изображающая точка при $t>\tau$ входит в указанную область, тогда она уже не сможет выйти из нее, так как она не может выйти ни через дугу P_1MP_2 (траектории не пересекаются), ни через отрезок P_1P_2 (все траектории пересекают отрезок без контакта в одном и том же направлении). Следовательно, изображающая точка уже не сможет пересечь отрезок P_1P_2 при $t>\tau$.

Совершенно такое же рассуждение можно провести для того случая, когда изображающая точка выходит при $t>\tau$ в область вне замкнутой кривой $P_1MP_2P_1$; ясно, что аналогичное рассуждение справедливо и для отрезка P_2P_3. Таким образом, предположение, что полутраектория L^+ есть предельная для полутраектории L_1^+, приводит к противоречию, и теорема доказана.

В частности, из этой теоремы следует, что незамкнутая траектория не может быть самопредельной, так как в противном случае она имела бы предельную траекторию, не являющуюся состоянием равновесия, — саму себя, а с другой стороны сама являлась бы предельной.

Эта теорема отражает черты, характерные для плоскости, и может не быть справедливой для траекторий в других фазовых пространствах. Она не справедлива, например, для траекторий на торе, а также в случае системы трех уравнений, аналогичных системе (6.1), когда фазовым пространством является эвклидово пространство трех измерений.

Из второй основной теоремы следует невозможность других типов предельных траекторий, кроме: 1) состояний равновесия, 2) замкнутых траекторий, 3) незамкнутых траекторий, имеющих в качестве предельных точек только состояния равновесия, так как в силу этой теоремы никакая незамкнутая предельная траектория сама уже не может иметь предельных точек, отличных от состояния равновесия. Мы добавим ко второй основной теореме еще две теоремы, ко-

торые позволят установить, какие комбинации из названных типов предельных траекторий возможны в качестве множества всех предельных точек полутраектории.

Теорема III. *Если полутраектория L^+ имеет замкнутую предельную траекторию L_0, то L_0 является единственной предельной траекторией для L^+.*

Если сама полутраектория L^+ замкнута, то все ее точки являются предельными для нее самой, и ясно, что никаких других предельных точек у нее быть не может. В этом случае теорема очевидна.

Предположим теперь, что L^+ не замкнута. Докажем сначала, что сколь бы малое $\varepsilon > 0$ мы ни взяли, все точки полутраектории L^+, начиная с некоторого значения $t = t_1$ (зависящего от ε), будут находиться внутри ε-окрестности траектории L_0. Пусть полутраектории L^+ соответствует движение $x = x(t)$, $y = y(t)$, а траектории L_0 $x = \bar{x}(t)$, $y = \bar{y}(t)$. Так как траектория L_0 замкнута, то $\bar{x}(t)$ и $\bar{y}(t)$ — периодические функции, т. е. существует такое h (период движения по L_0), что

$$\bar{x}(t+h) \equiv \bar{x}(t), \quad \bar{y}(t+h) \equiv \bar{y}(t).$$

Возьмем какую-нибудь точку P траектории L_0, соответствующую значению $t = \tau$. Эта же точка будет соответствовать и значениям $\tau + h$, $\tau + 2h, \ldots$. Напомним, что в силу автономности системы уравнений (6.1) мы всегда можем выбрать движение по траектории L_0 так, чтобы значение τ, которому соответствует точка P, было любым выбранным значением.

Проведем в точке P отрезок без контакта l, целиком лежащий внутри рассматриваемой ε-окрестности (ε можно взять сколь угодно малым). В силу предложения VII на отрезке без контакта находится последовательность точек полутраектории L^+: $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$, стремящихся к точке P (так как точка P — предельная для полутраектории L^+). При этом точки $P_1, P_2, \ldots$ расположены на отрезке l в порядке возрастания значений t:

$$t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n, \ldots \quad (t_n \to +\infty \text{ при } n \to +\infty).$$

На основании предложения VIII, выбирая $\Delta < \frac{h}{3}$ ($\Delta > 0$), мы всегда можем взять окружность столь малого радиуса $\delta = \delta(\varepsilon, \Delta)$ вокруг точки P, чтобы траектория, проходящая при $t = \tau$ через любую точку внутри этой окружности, за время от $t = \tau$ до $t = T$ не выходила из ε-окрестности L_0 и в момент $t = T$, сколь угодно мало отличающийся от $\tau + h$ ($|T - (\tau + h)| < \Delta$), пересекла бы отрезок l.

Возьмем точку P_{k_1}, соответствующую $t = t_{k_1}$ и лежащую внутри окружности радиуса δ на отрезке l. Будем считать в данном случае $\tau = t_{k_1}$. Тогда, в силу только что сказанного, значение T будет равно некоторому t_{k_2}, причем, в силу выбора Δ $\left(\Delta < \frac{h}{3}\right)$, t_{k_2} заведомо больше t_{k_1} ($t_{k_2} > t_{k_1}$).

Часть полутраектории L^+, соответствующая промежутку времени от t_{k_1} до t_{k_2}, целиком содержится в ε-окрестности L_0. Ясно, что точка P_{k_2} (соответствующая $t=t_{k_2}$) лежит на отрезке l ближе к точке P, чем точка P_{k_1}, и содержится, следовательно, внутри δ-окрестности точки P. К точке P_{k_2} приложимо поэтому такое же рассуждение, как и к точке P_{k_1}, значит, существует такая точка P_{k_3}, соответствующая значению $t=t_{k_3}>t_{k_2}$, лежащая на отрезке без контакта l, что часть полутраектории L^+, соответствующая значениям t между t_{k_2} и t_{k_3}, целиком содержится внутри ε-окрестности L_0.

Продолжая такое же рассуждение далее, мы видим, что вся часть полутраектории L^+, соответствующая значениям t, бо́льшим t_{k_1}, содержится внутри ε-окрестности L_0.

Покажем теперь, что замкнутая траектория L_0 содержит все предельные точки полутраектории L^+. Доказательство поведем от противного. Предположим, что полутраектория L^+ имеет предельную точку Q, не лежащую на замкнутой траектории L_0 и, следовательно, находящуюся на некотором расстоянии $d>0$ от L_0. В любой сколь угодно малой окрестности точки Q должны находиться точки полутраектории L^+, соответствующие сколь угодно большим значениям t.

Но, с другой стороны, в силу доказанного выше, сколь бы малое $\varepsilon>0$ мы ни взяли, всегда найдется такое $t=\tau_0$, что все точки полутраектории L^+, соответствующие $t>\tau_0$, будут лежать внутри ε-окрестности траектории L_0.

Мы всегда можем взять ε меньше, чем $d/2$, так что точка Q будет лежать вне ε-окрестности L_0, и, следовательно, сколь угодно близко от точки Q не смогут находиться точки полутраектории L^+, соответствующие сколь угодно большим значениям t. Таким образом, мы приходим к противоречию, и теорема доказана.

Теорема IV. *Если среди предельных точек полутраектории нет состояний равновесия, то она либо замкнута, либо незамкнута, но имеет замкнутую предельную траекторию.*

Действительно, предположим, что L^+ не замкнута. В силу сделанных на основании теоремы III заключений траектория, предельная для L^+, может быть либо замкнутой траекторией (и тогда в силу предыдущей теоремы она является единственной предельной траекторией L^+), либо незамкнутой траекторией, стремящейся к состоянию равновесия. Но второй случай, очевидно, невозможен, так как то состояние равновесия, к которому стремилась бы предельная для L^+ траектория, очевидно, являлось бы предельным также и для L^+, что противоречило бы предположению. Таким образом, теорема доказана.

Следствием этой теоремы является следующая, очень часто используемая теорема:

Теорема V. *Пусть G — замкнутая двухсвязная (кольцевая) область, которая не содержит состояний равновесия и из которой траектории не выходят при возрастании t (при убывании t).*

Тогда внутри такой области G непременно существует хотя бы один устойчивый (неустойчивый) предельный цикл.

Действительно, у всякой незамкнутой траектории, входящей при возрастании t (убывании t) в область G, множество предельных точек целиком лежит в этой области и, следовательно, не содержит состояний равновесия. А тогда, в силу теоремы IV, это множество является замкнутой траекторией (предельным циклом).

Таким образом, в области G лежит хотя бы один предельный цикл. Однако в ней может лежать и более одного предельного цикла. Если предположить, что среди этих предельных циклов нет «полуустойчивых» (они возможны только в «негрубых» системах; см. § 4 настоящей главы), то, очевидно, в случае, когда все траектории при возрастании t входят в область G, в ней заведомо лежит хотя бы один устойчивый предельный цикл, а в случае, когда все траектории при возрастании t выходят из области G, — хотя бы один неустойчивый.

В случае, когда в области G существуют полуустойчивые предельные циклы, справедливость теоремы устанавливается несколько более сложным рассуждением, которое мы не приводим. На эту теорему мы опираемся во всех случаях, когда существует область между двумя циклами без контакта, в которую все траектории входят при возрастании t (при убывании t)[1]).

5. Возможные типы полутраекторий и их предельных множеств. Доказанные теоремы позволяют установить возможный характер множества предельных точек полутраектории, целиком лежащей в ограниченной части плоскости. Именно, это множество может быть одного из следующих типов: I. Одно состояние равновесия. II. Одна замкнутая траектория. III. Совокупность состояний равновесия и траекторий, стремящихся к этим состояниям равновесия как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$.

Нетрудно видеть, что состояния равновесия, входящие в множество предельных точек типа III, не могут быть фокусами или узлами, так как всякая траектория, попавшая в достаточно малую окрестность такого состояния равновесия, стремится к нему и не может иметь никакой другой предельной точки. Следовательно, состояния равновесия, которые могут входить в множество предельных точек типа III, в случае, если эти состояния равновесия простые, непременно являются седлами, а отличные от состояний равновесия траектории, входящие в это множество, — сепаратрисами седел. Зная возможные типы предельных множеств, мы можем сразу сказать, какие типы полутраекторий возможны. Очевидно, мы получаем следующие

---

[1]) Сформулированная теорема справедлива и при более общих предположениях относительно правых частей динамической системы, в частности в случае кусочно-линейных систем, рассмотренных в главах VIII и X. Не приводя тех очевидных изменений, которые в этом случае должны быть внесены в доказательство теоремы, мы будем пользоваться ею в указанных главах.

возможные типы полутраекторий: 1) состояние равновесия; 2) замкнутая полутраектория; 3) полутраектория, стремящаяся к состоянию равновесия; 4) полутраектория, стремящаяся к замкнутой траектории; 5) полутраектория, стремящаяся к предельному множеству типа III [1]).

Полутраектории всех перечисленных типов, за исключением последнего, встречались в рассмотренных выше примерах неоднократно. Простейший пример полутраектории последнего

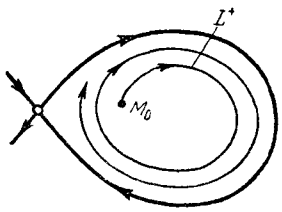

Рис. 293.

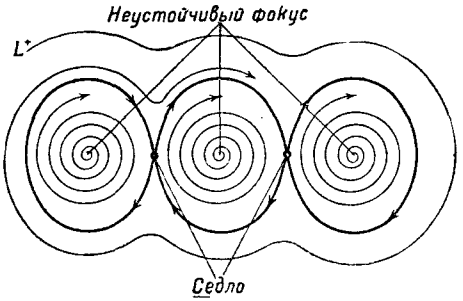

Рис. 294.

типа изображен на рис. 293, где полутраектория L^+ стремится к предельному множеству, состоящему из сепаратрисы, выходящей из седла и возвращающейся в то же седло. Более сложный случай изображен на рис. 294, где полутраектория L^+ (внешняя) стремится к предельному множеству, состоящему из двух состояний равновесия и четырех сепаратрис, стремящихся к этим состояниям равновесия как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$.

§ 3. Качественная картина разбиения фазовой плоскости на траектории. Особые траектории

1. Топологически инвариантные свойства и топологическая структура разбиения на траектории. Перейдем теперь к основной задаче качественного исследования динамической системы — к установлению качественной картины разбиения фазовой плоскости на траектории. Рассмотрение приведенных в предыдущей главе частных примеров динамических систем приводит к мысли, что для знания качественной картины нужно знать поведение не всех траекторий, а лишь некоторых особых траекторий. Таких особых траекторий в рассмотренных примерах было конечное число, и они разбивали всю совокупность траекторий на области, в которых траектории вели себя одинаково. Особыми траекториями в этих примерах были состояния равновесия, предельные циклы и траектории, стремя-

[1]) Отметим, что в случае, когда фазовая поверхность системы не является плоскостью, приведенные типы траекторий могут не исчерпывать всех возможных типов траекторий.