возможные типы полутраекторий: 1) состояние равновесия; 2) замкнутая полутраектория; 3) полутраектория, стремящаяся к состоянию равновесия; 4) полутраектория, стремящаяся к замкнутой траектории; 5) полутраектория, стремящаяся к предельному множеству типа III [1]).

Полутраектории всех перечисленных типов, за исключением последнего, встречались в рассмотренных выше примерах неоднократно. Простейший пример полутраектории последнего

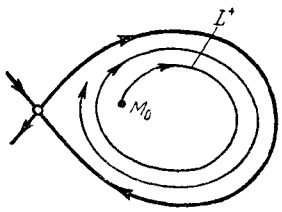

Рис. 293.

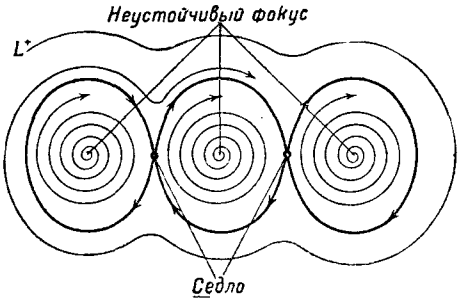

Рис. 294.

типа изображен на рис. 293, где полутраектория L^+ стремится к предельному множеству, состоящему из сепаратрисы, выходящей из седла и возвращающейся в то же седло. Более сложный случай изображен на рис. 294, где полутраектория L^+ (внешняя) стремится к предельному множеству, состоящему из двух состояний равновесия и четырех сепаратрис, стремящихся к этим состояниям равновесия как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$.

§ 3. Качественная картина разбиения фазовой плоскости на траектории. Особые траектории

1. Топологически инвариантные свойства и топологическая структура разбиения на траектории. Перейдем теперь к основной задаче качественного исследования динамической системы — к установлению качественной картины разбиения фазовой плоскости на траектории. Рассмотрение приведенных в предыдущей главе частных примеров динамических систем приводит к мысли, что для знания качественной картины нужно знать поведение не всех траекторий, а лишь некоторых особых траекторий. Таких особых траекторий в рассмотренных примерах было конечное число, и они разбивали всю совокупность траекторий на области, в которых траектории вели себя одинаково. Особыми траекториями в этих примерах были состояния равновесия, предельные циклы и траектории, стремя-

[1]) Отметим, что в случае, когда фазовая поверхность системы не является плоскостью, приведенные типы траекторий могут не исчерпывать всех возможных типов траекторий.

щиеся к седлам, — сепаратрисы седел. Если взаимное расположение этих особых траекторий было известно и, кроме того, было известно, какие из состояний равновесия и предельных циклов устойчивы, а какие неустойчивы, то мы получали полную качественную картину фазовых траекторий. Естественно возникают вопросы: всегда ли существует конечное число таких особых траекторий, знание которых позволяет установить качественную картину фазовых траекторий? Как в общем случае эти особые траектории могут быть охарактеризованы и исчерпывают ли или нет особые траектории, встречавшиеся в рассмотренных выше примерах, вообще все возможные типы таких траекторий? Выяснению всех этих вопросов и посвящен настоящий параграф [17, 80].

Однако сначала нужно уточнить смысл некоторых понятий, которыми мы постоянно пользовались, в частности понятий качественной картины фазовых траекторий и качественного исследования данной динамической системы. Для этого нам прежде всего придется напомнить понятие топологического отображения (или преобразования). Как известно, топологическим отображением называется взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное отображение плоскости в себя (или одной плоскости в другую), т. е. отображение, при котором каждой точке $M(x, y)$ соответствует одна и только одна точка $M'(x, y)$ той же самой (или другой) плоскости; всяким двум различным точкам $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ соответствуют две различные точки $M_1'(x_1', y_1')$ и $M_2'(x_2', y_2')$ и, кроме того, всяким двум сколь угодно близким точкам M_1 и M_2 соответствуют сколь угодно близкие точки M_1' и M_2'. Отображение, обратное топологическому, очевидно, также является топологическим, т. е. взаимно-однозначным и непрерывным. Всякое топологическое отображение плоскости в себя (или плоскости в другую плоскость) может быть задано однозначными и непрерывными функциями

$$x' = \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y),$$

которые однозначно могут быть разрешены относительно x, y:

$$x = \varphi_1(x', y'), \quad y = \psi_1(x', y'),$$

где φ_1 и ψ_1 — также непрерывные функции [1]). Очевидно, вид кривых, областей и вообще множеств на плоскости при топологическом отображении может измениться очень сильно, однако некоторые свойства кривых, областей и т. д. остаются неизменными. Так, если на плоскости дана замкнутая кривая (например, окружность), то после любого топологического отображения плоскости в себя кривая, в которую она отображается, также непременно будет замкнутой, хотя вид ее может сильно отличаться от вида исходной кривой (кривая, являющаяся топологическим отображением окружности, называется простой замкнутой кривой). Отрезку прямой после топологического отображения может соответствовать уже не отрезок прямой, а некоторая дуга, однако эта дуга заведомо будет дугой без самопересечения (дуга, являющаяся топологическим отображением отрезка, называется простой дугой). Свойства,

---

[1]) Наглядное пояснение того, что такое топологическое отображение плоскости в себя, может быть дано следующим образом. Представим себе, что плоскость сделана из резины, и будем различным образом деформировать ее, именно, в разных местах растягивать или сжимать, нигде не разрывая и нигде не делая складок. Можно сказать, что всякому топологическому отображению соответствует некоторая деформация рассматриваемой резиновой плоскости, выполненная с соблюдением указанных условий.

остающиеся неизменными при всевозможных топологических отображениях, называются *топологически инвариантными свойствами или топологическими характеристиками.*

Пусть теперь дана динамическая система (6.1). Она определяет некоторое семейство траекторий или, в другой терминологии, некоторое разбиение плоскости на траектории. Будем рассматривать всевозможные топологические отображения плоскости в себя и смотреть, как при этом изменяется заданное системой (6.1) разбиение на траектории. Очевидно, вид траекторий при этом может сильно измениться, но некоторые черты этого разбиения остаются неизменными или, иначе, топологически инвариантными. Например, остается неизменным число и взаимное расположение замкнутых траекторий, состояний равновесия и т. д.; если состояние равновесия системы (6.1) было седлом, то и после любого топологического преобразования характер его сохранится.

С другой стороны, нетрудно видеть, что фокус или узел топологически тождественны, т. е. всегда можно указать такое топологическое преобразование плоскости в себя, при котором узел преобразуется в фокус и наоборот, — геометрически этот факт совершенно нагляден.

Мы можем теперь перейти к уточнению понятия качественной картины фазовых траекторий или топологической структуры разбиения на траектории. *Две топологические структуры разбиения фазовой плоскости на траектории, заданные двумя системами вида* (6.1), *называют тождественными, если существует топологическое* (т. е. взаимно-однозначное и непрерывное) *отображение плоскости в себя, при котором траектории одной системы отображаются в траектории другой* (при этом траектория отображается в траекторию как при прямом, так и при обратном отображении). Это определение тождественности двух структур является косвенным определением самого понятия топологической структуры разбиения на траектории. Можно сказать, что *под топологической структурой разбиения на траектории* (или, что то же самое, под *качественной картиной фазовых траекторий) понимают все те свойства этого разбиения, которые остаются инвариантными при всевозможных топологических отображениях плоскости в себя.* Примеры таких свойств были приведены выше.

Мы скажем, что проведено полное качественное исследование динамической системы, если установлена топологическая структура разбиения на траектории этой системы. Как уже указывалось, на основании рассмотренных частных примеров можно думать, что для установления топологической структуры разбиения на траектории нужно знать поведение не всех траекторий, а лишь некоторых особых траекторий.

2. Орбитно-устойчивые и орбитно-неустойчивые (особые) траектории. Перейдем теперь к рассмотрению особых и неособых траекторий и наряду с наглядными геометрическими фактами дадим

точные математические формулировки. При этом всюду в дальнейшем будем предполагать, что система (6.1) рассматривается в ограниченной области плоскости G. Будем рассматривать траекторию L, целиком лежащую в области G. Возьмем какую-нибудь положительную полутраекторию L_M^+, выделенную из траектории L и начинающуюся в точке M, и рассмотрим ее ε-окрестность. Отметим при этом, что ε-окрестность полутраектории L_M^+ непременно содержит ε-окрестность предельного множества этой полутраектории.

Мы скажем, что *положительная полутраектория L_M^+ орбитно-устойчива, если при любом заданном $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что у всякой траектории L', при $t = t_0$ проходящей через любую точку M', принадлежащую δ-окрестности M, полутраектория L'^+_M* (точки которой соответствуют значениям $t > t_0$) *целиком лежит в ε-окрестности полутраектории L_M^+.*

Траектория L называется орбитно-устойчивой при $t \to +\infty$ или ω-орбитно-устойчивой, если всякая выделенная из нее положительная полутраектория орбитно-устойчива. Можно показать (геометрически это представляется очевидным), что если у траектории L хотя бы одна положительная полутраектория орбитно-устойчива, то всякая другая положительная полутраектория, выделенная из этой траектории, также будет орбитно-устойчивой, т. е. траектория L будет орбитно-устойчива при $t \to +\infty$[1]).

Полутраектории или траектории, не являющиеся орбитно-устойчивыми при $t \to +\infty$, называются орбитно-неустойчивыми при $t \to +\infty$, или ω-орбитно-неустойчивыми. Очевидно, если траектория L орбитно-неустойчива при $t \to +\infty$ и M — какая-нибудь ее точка, то всегда можно указать такое $\varepsilon_0 > 0$, что при любом сколь угодно малом $\delta > 0$ найдется траектория L', проходящая при $t = t_0$ через точку δ-окрестности точки M и заведомо выходящая при некотором $t > t_0$ из ε_0-окрестности полутраектории L. Отметим, что наличие орбитно-неустойчивых траекторий ни в коей мере не противоречит теореме о непрерывной зависимости от начальных значений, так как в этой теореме рассматривается лишь конечный промежуток значений t.

Все сказанное относительно положительной полутраектории с очевидными изменениями может быть повторено и относительно отрицательной полутраектории. Таким образом, мы будем также говорить о траектории, орбитно-устойчивой при $t \to -\infty$, или α-орбитно-устойчивой, и о траектории, орбитно-неустойчивой при $t \to -\infty$, или α-орбитно-неустойчивой. Будем называть траекторию L, орбитно-устойчивую как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$, *орбитно-устойчивой* или *неособой*. Всякую траекторию, не являющуюся орбитно-устойчивой, будем называть *орбитно-неустойчивой* или *особой*. Таким образом, особая траектория непременно орбитно-неустой-

---

[1]) Точное доказательство этого геометрически очевидного факта не совсем тривиально.

чива хотя бы в одну «сторону», т. е. она может быть орбитно-неустойчивой при $t \to +\infty$ или орбитно-неустойчивой при $t \to -\infty$ или орбитно-неустойчивой и при $t \to -\infty$, и при $t \to +\infty$.

Напомним при этом (см., например, гл. II, § 7), что траектория, являющаяся орбитно-устойчивой при $t \to +\infty$, может не быть устойчивой по Ляпунову при $t \to +\infty$.

Введенное таким образом понятие орбитной устойчивости и неустойчивости полутраектории и траектории характеризует поведение этой полутраектории или траектории не самой по себе, а по отношению к близким полутраекториям и траекториям. Поясним эти понятия на примерах траекторий, встречавшихся в рассмотренных выше динамических системах. Очевидно, всякая полутраектория, стремящаяся к состоянию равновесия типа узел или фокус, орбитно-устойчива [1]). Орбитно-устойчивыми будут и все полутраектории, стремящиеся к предельным циклам. Орбитно-устойчивыми, т. е. неособыми траекториями, очевидно, будут траектории, стремящиеся при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$ к узлам или фокусам или при $t \to +\infty$ $(t \to -\infty)$ стремящиеся к узлу, а при $t \to -\infty$ $(t \to +\infty)$ — к предельному циклу, а также траектории, стремящиеся к предельным циклам и при $t \to +\infty$, и при $t \to -\infty$ (все такие траектории орбитно-устойчивы и при $t \to +\infty$, и при $t \to -\infty$).

Из этих примеров нетрудно видеть, что в случае, когда траектория неособая (орбитно-устойчивая), все близкие к ней траектории ведут себя весьма похожим образом. Но это совершенно не имеет места для тех траекторий, которые мы выше причисляли к «особым». Начнем с состояний равновесия. Узлы и фокусы орбитно-устойчивы или при $t \to +\infty$, или при $t \to -\infty$, но никогда не могут

---

[1]) Хотя геометрически этот факт совершенно нагляден, мы все же проведем то рассуждение, с помощью которого он доказывается. Как мы видели в случае, когда состояние равновесия O есть узел или фокус, существует семейство эллипсов без контакта, вложенных друг в друга и стягивающихся к точке O. При любом $\varepsilon > 0$ всегда можно указать эллипс без контакта C_ε, целиком лежащий в ε-окрестности точки O. Но ε-окрестность всякой стремящейся к O полутраектории непременно содержит ε-окрестность ее предельной точки O, и поэтому точки внутри такого эллипса C_ε принадлежат ε-окрестности любой стремящейся к O полутраектории. Пусть L_M^+ — одна из таких полутраекторий. Очевидно, в конечное время t она достигнет этого эллипса C_ε, войдет в него и уже больше из него не выйдет. Но, в силу непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий, вокруг точки M всегда можно указать такую δ-окрестность, чтобы все траектории, проходящие при некотором значении $t = t_0$ через точки этой δ-окрестности, в течение конечного промежутка значений t достигли бы эллипса без контакта C_ε, не выходя до этого из ε-окрестности полутраектории L_M^+ (или, точнее, из ε-окрестности части L_M^+ до ее пересечения с эллипсом без контакта); войдя в эллипс C_ε, они, очевидно, из него уже больше не выйдут, а следовательно, не выйдут из ε-окрестности L_M^+. Так как все сказанное справедливо при любом $\varepsilon > 0$, то отсюда, очевидно, следует орбитная устойчивость L_M^+.

быть орбитно-устойчивы и при $t \to +\infty$, и при $t \to -\infty$; седло орбитно-неустойчиво и при $t \to +\infty$, и при $t \to -\infty$. Устойчивые и неустойчивые предельные циклы в отношении орбитной устойчивости ведут себя так же, как фокусы и узлы, т. е. могут быть орбитно-устойчивыми либо только при $t \to +\infty$, либо только при $t \to -\infty$. Полутраектории, стремящиеся к седлу (сепаратрисы седел), орбитно-неустойчивы. Действительно, если L_M^+ — стремящаяся к седлу полутраектория, то всегда можно указать такое $\varepsilon > 0$, чтобы при любом $\delta > 0$ полутраектории, отличные от самой L_M^+, проходящие через точки δ-окрестности точки M, при возрастании t непременно выходили бы из ε_0-окрестности L_M^+.

3. Возможные типы особых и неособых траекторий. Дадим теперь доказательство основных общих теорем об особых траекториях и о качественной картине разбиения фазовой плоскости на траектории.

Теорема I. *Всякая траектория, являющаяся предельной для какой-либо отличной от нее траектории, является особой, т. е. орбитно-неустойчивой.*

Пусть L^* — траектория, являющаяся предельной хотя бы для одной отличной от нее самой траектории L (пусть для определенности L стремится к L^* при $t \to +\infty$). Если L^* — состояние равновесия, то на L заведомо всегда найдется точка M, находящаяся на расстоянии d, отличном от нуля, от этого состояния равновесия. Если L^* не является состоянием равновесия, то на L также непременно найдутся точки (обозначим одну из них через M), находящиеся на отличном от нуля расстоянии от точек траектории L.

Действительно, таких точек могло бы не быть только в том случае, если бы траектория L была предельной траекторией для L^*. Но это невозможно, так как у L есть отличные от состояний равновесия предельные точки, именно точки L^*, а тогда, в силу теоремы III, L не может быть предельной ни для одной траектории, в частности для L^*. Возьмем теперь $\varepsilon_0 < d$. Тогда точка M будет лежать вне ε_0-окрестности L^*. Но L^* — предельная траектория для L и, следовательно, при любом $\delta > 0$ в δ-окрестности всякой точки L^* будут находиться точки L, соответствующие (при некотором выборе движения на L) сколь угодно большим значениям t, и в частности бо́льшим того, которому соответствует точка M. А так как точка M траектории L по самому выбору ε_0 лежит вне ε_0-окрестности L^*, то отсюда, очевидно, следует, что L^* во всяком случае орбитно-неустойчива при $t \to -\infty$ (α-орбитно-неустойчива). Таким образом, теорема доказана.

Рассмотрим теперь полутраекторию, среди предельных точек которой есть отличные от состояний равновесия. Пусть L^+ — такая полутраектория и K — ее предельное множество. ε-окрестность предельного множества K является частью ε-окрестности L^+. При этом для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $T(\varepsilon)$, чтобы точки L^+, соответствующие значениям $t > T$, целиком лежали в ε-окрестности K.

Пусть P — какая-нибудь отличная от состояния равновесия точка множества K и l — отрезок без контакта, проведенный через эту точку. Как мы знаем (см. предложение VII), на отрезке l лежит последовательность точек полутраектории $P_1, P_2, \ldots, P_n$, соответствующих неограниченно возрастающим значениям t и стремящихся к точке P. Будем обозначать через C_i замкнутую кривую, состоящую из дуги $P_i P_{i+1}$ полутраектории L^+ и части $P_i P_{i+1}$ отрезка l (такие замкнутые кривые рассматривались в предложении V).

Все замкнутые кривые C_i, начиная с достаточно большого i, очевидно, лежат целиком в ε-окрестности предельного множества K. При этом предельное множество K лежит либо внутри всех этих

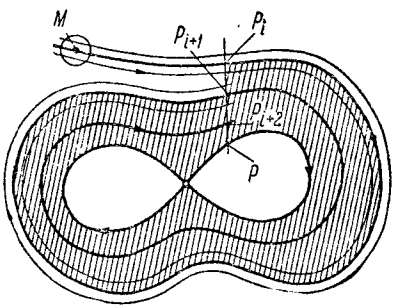

Рис. 295.

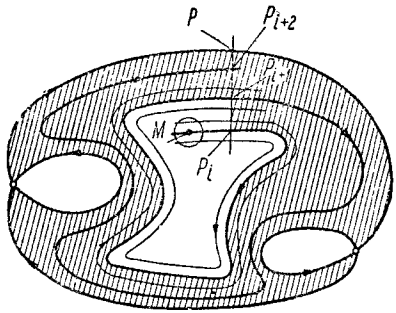

Рис. 296.

кривых C_i, либо вне всех этих кривых (рис. 295 и 296). Рассмотрим область G_i, граница которой состоит из замкнутой кривой C_i и предельного множества K (см. заштрихованные области на рис. 295 и 296). При любом $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого достаточно большого i, всякая область G_i целиком содержится в ε-окрестности K[1]). Очевидно, все отличные от P_{i+1} и P точки части $P_{i+1}P$ дуги l принадлежат области G_i.

После этих предварительных замечаний докажем следующую теорему:

Теорема II. *Незамкнутая полутраектория L^+, имеющая среди своих предельных точек отличные от состояний равновесия, является орбитно-устойчивой.*

Для доказательства теоремы достаточно показать, что при любом $\varepsilon > 0$ все траектории, проходящие через достаточно малую окрестность какой-либо точки полутраектории L^+, с возрастанием t в конце концов войдут внутрь ε-окрестности предельного множества K и больше уже не выйдут из нее. В силу предыдущего, при любом $\varepsilon > 0$ можно указать такое целое число l (зависящее от ε), что при всяком

[1]) Геометрически этот факт очевиден, однако точное доказательство его проводится хотя и элементарным, но довольно кропотливым рассуждением.

$i > l$ область G_i, граница которой состоит из кривой C_i и множества K, целиком лежит в ε-окрестности K.

Пусть M — какая-нибудь точка полутраектории L^+ и $i > l$ — какое-нибудь фиксированное целое число. В силу предложения VIII всегда можно указать столь малую окрестность точки M, чтобы всякая траектория, при $t = t_0$ проходящая через точку этой окрестности, пересекала при некотором $t = T$ дугу l в точке, сколь угодно близкой к точке P_{i+1}, и, во всяком случае, в точке, лежащей между точками P_i и P_{i+2} (см. рис. 295 и 296). Но при значениях $t > T$ эта траектория, очевидно, будет находиться в области G_i и выйти из этой области не может.

Действительно, она не может пересечь ни кривую C_i (см. предложение V), ни предельное множество K, состоящее (в силу теоремы II § 2) из целых траекторий. Таким образом, теорема доказана.

В частности, из этой теоремы следует, что всякая полутраектория, стремящаяся к предельному циклу, орбитно-устойчива.

Перейдем теперь к выяснению того, когда замкнутая траектория является орбитно-устойчивой (т. е. неособой) и когда орбитно-неустойчивой (т. е. особой). Для этого отметим прежде всего, что для рассматриваемых нами динамических систем, т. е. систем с аналитическими правыми частями, могут представиться, как будет показано в следующем параграфе, следующие два случая:

1) либо все траектории, отличные от данной замкнутой траектории L и проходящие через достаточно малую окрестность L, не замкнуты;

2) либо все траектории, проходящие через все достаточно близкие к L точки, замкнуты [1]).

Очевидно, первый случай имеет место, когда траектория L есть предельный цикл; второй случай — в консервативных системах.

Теорема III. *Замкнутая траектория L_0, не являющаяся предельной ни для одной незамкнутой траектории, орбитно-устойчива.*

Для доказательства теоремы докажем сначала, что все траектории, проходящие через точки, достаточно близкие к траектории L_0, замкнуты. Действительно, если бы среди сколь угодно близких к L_0 траекторий могли быть незамкнутые траектории, то тогда мы имели бы указанный выше случай 1), т. е. все траектории, кроме L_0, проходящие через точки, достаточно близкие к L_0, были бы не замкнуты. Но

---

[1]) Может представиться еще одна логическая возможность, когда через сколь угодно близкие к L точки проходят как замкнутые, так и незамкнутые траектории. Например, последовательность замкнутых траекторий L_i, вложенных одна в другую, может стягиваться к данной замкнутой траектории L, а между траекториями L_i могут находиться незамкнутые траектории. Однако этот случай невозможен, когда правые части динамической системы — аналитические функции.

тогда нетрудно видеть, что траектория L_0 непременно является предельной траекторией для незамкнутой траектории. В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$ таково, что в ε-окрестности L_0 не лежит ни одного состояния равновесия и ни одной замкнутой траектории, кроме L_0. Проведем через какую-нибудь точку P на L_0 отрезок без контакта l. Пусть L' — какая-нибудь траектория, проходящая при $t = t_0$ через точку Q_1 отрезка l столь близко к P, что при некотором $\tau > t_0$, не выходя до этого из ε-окрестности L_0, она пересекает отрезок l еще раз в точке Q_2 (см. предложение VIII § 2 настоящей главы). Обозначим через C замкнутую кривую, состоящую из дуги Q_1Q_2 траектории L' и части Q_1Q_2 дуги l. Кривая C, а также кольцевая область G между C и L_0 целиком лежат в ε-окрестности L_0. С другой стороны, либо при $t < t_0$, либо при $t > \tau$ траектория L' будет целиком лежать в области G. Так как в силу выбора ε в ε-окрестности L_0 нет ни одного состояния равновесия и ни одной замкнутой траектории, кроме L_0, то из теоремы IV § 2 настоящей главы, очевидно, следует, что L_0 является предельной траекторией для незамкнутой траектории L', что противоречит предположению. Следовательно, все траектории, проходящие через точки некоторой достаточно малой окрестности L_0, замкнуты.

Но нетрудно видеть, что тогда все достаточно близкие к L_0 траектории, в силу теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий и в силу того, что они замкнуты, будут целиком лежать в ε-окрестности L_0. Это и означает, что L_0 орбитно-устойчива. Теорема доказана.

В дополнение к приведенным теоремам сделаем ряд замечаний по поводу полутраекторий, стремящихся к состоянию равновесия.

В рассмотренных выше примерах мы видели, что такие полутраектории могут быть как орбитно-устойчивыми (например, полутраектории, стремящиеся к узлу или фокусу), так и орбитно-неустойчивыми (например, полутраектории, стремящиеся к седлу). В таких примерах состояние равновесия было простое: узел, фокус или седло. Можно показать в общем виде, не делая никаких предположений относительно того состояния равновесия, к которому стремится рассматриваемая полутраектория (так что это состояние равновесия может быть как простым, так и сложным), что в случае, когда такая полутраектория орбитно-неустойчива, она непременно должна быть граничной для некоторой седловой области. Не проводя доказательства, остановимся все же на этом несколько подробнее.

Если полутраектория L_M^+, стремящаяся к состоянию равновесия O, орбитно-неустойчива, то можно указать $\varepsilon_0 > 0$ такое, что среди траекторий, проходящих через сколь угодно близкие к L точки, всегда найдется траектория, выходящая при возрастании t из ε_0-окрестности L. Рассмотрим ε_0-окрестность состояния равновесия O. Мы всегда можем предполагать ε_0 столь малым, чтобы ε_0-окрестность

O не содержала ни одного состояния равновесия кроме O, ни одной замкнутой траектории, а также не содержала бы точку M полутраектории L_M^+. Возьмем на L_M^+ точку Q, соответствующую $t=\tau$, такую, чтобы сама точка Q и все точки L_M^+, соответствующие значениям $t>\tau$, лежали бы в ε_0-окрестности состояния равновесия O. Проведем через точку Q отрезок без контакта l (целиком лежащий в ε_0-окрестности O; см. рис. 297).

Очевидно, все траектории, проходящие через достаточно близкие к точке M точки, непременно пересекут (при возрастании t) отрезок l. Предположим, что через какую-нибудь отличную от Q точку Q' отрезка l проходит полутраектория L'^+, которая, не выходя из ε_0-окрестности O, стремится к состоянию равновесия O при $t\to+\infty$. Нетрудно видеть, что тогда и все траектории, пересекающие часть QQ' отрезка l, при возрастании t не выходят из ε_0-окрестности O, так как при возрастании t они входят внутрь «мешка», образованного частями QO и $Q'O$ полутраекторий L_M^+ и L'^+ и частью QQ' отрезка без контакта.

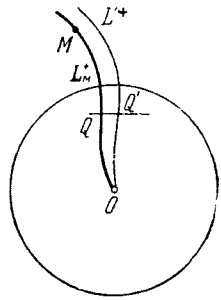

Рис. 297.

Если бы отрезок l по обе стороны от точки Q пересекали полутраектории, которые при возрастании t, не выходя из ε_0-окрестности O, стремились бы к состоянию равновесия O, то существовала бы окрестность точки O, через все точки которой проходили бы полутраектории, не выходящие из ε_0-окрестности O, что́, очевидно, противоречит предположению. Поэтому через сколь угодно близкие к Q точки отрезка l, хотя бы по одну сторону от точки Q, непременно должны проходить траектории, выходящие при возрастании t из ε_0-окрестности O (рис. 298). Можно показать, что тогда в случае рассматриваемой нами системы (т. е. системы, правые части которой — аналитические функции) непременно существует отрицательная полутраектория L^{*-}, стремящаяся к состоянию равновесия O, ограничивающая вместе с полутраекторией L_M^+ «седловую область» и при достаточно малом ε_0 имеющая точки вне ε_0-окрестности состояния равновесия O (см. рис. 298).

Мы будем называть орбитно-неустойчивые полутраектории, стремящиеся к состоянию равновесия (безразлично, к простому, т. е. к седлу, или сложному), *сепаратрисами этого состояния равновесия*. Отметим при этом, что всякая полутраектория, выделенная из незамкнутой предельной траектории, заведомо является сепаратрисой. Однако очевидно, что сепаратриса может и не быть предельной. В этом случае она является траекторией, отделяющей друг от друга траектории различного поведения. Простой пример представлен на рис. 299.

На основании всего предыдущего мы можем сделать исчерпывающие заключения относительно того, какие полутраектории, а

следовательно и какие траектории, орбитно-неустойчивы. Именно, всякая орбитно-неустойчивая (т. е. особая) траектория принадлежит к одному из следующих типов:

1) состояние равновесия [1]);

2) предельный цикл;

3) незамкнутая траектория, у которой хотя бы одна полутраектория является сепаратрисой какого-нибудь состояния равновесия.

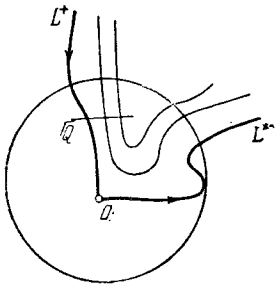

Рис. 298.

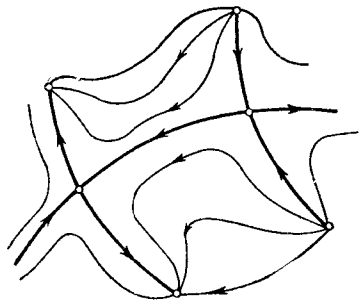

Рис. 299.

Свойство траектории быть особой или неособой является свойством топологически-инвариантным. Именно, имеет место следующая теорема:

Теорема IV. *Если разбиения на траектории, заданные двумя динамическими системами в ограниченной области G, тождественны, т. е. существует отображение плоскости в себя, при котором траектории этих систем отображаются друг в друга, то орбитно-устойчивые полутраектории отображаются в орбитно-устойчивые, а орбитно-неустойчивые — в орбитно-неустойчивые.*

Доказательство этой теоремы, не представляющее затруднений, мы опускаем.

4. Элементарные ячейки — области, заполненные неособыми траекториями одинакового поведения. Рассмотрим теперь совокупность всех особых траекторий данной системы (6.1), которую, как и всюду в настоящем параграфе, будем предполагать заданной в *ограниченной* области плоскости. Можно показать, что при сделанном нами предположении об аналитичности правых частей системы (6.1) *число особых траекторий конечно.* Для простейшего случая грубых

---

[1]) Состояние равновесия является орбитно-неустойчивым в случае, когда к нему стремится хотя бы одна траектория. Если же состояние равновесия — центр, то оно, очевидно, является орбитно-устойчивым. Однако мы во всех случаях будем причислять состояние равновесия к особым траекториям.

систем этот факт может быть просто установлен на основании изложенного в следующем параграфе [1]).

Особые траектории разделяют область G на частичные области, точки которых являются точками *неособых* (*орбитно-устойчивых*) траекторий. Граница каждой такой частичной области состоит из точек, принадлежащих особым траекториям, и из точек, граничных для области G. Мы ограничимся здесь рассмотрением только таких областей, в границу которых не входят граничные точки G. Такие области будем называть *элементарными ячейками* (или просто ячейками). Очевидно, ячейки состоят из целых орбитно-устойчивых (т. е. неособых) траекторий. Кроме того, нетрудно видеть, что граница всякой ячейки состоит из целых особых траекторий [2]). Точки одной и той же особой траектории могут быть граничными для нескольких ячеек. На основании того, что число особых траекторий конечно, нетрудно показать, что число ячеек в области G конечно [3]).

Рассмотрим теперь более подробно, как ведут себя неособые траектории одной и той же ячейки. Для этого приведем сначала несколько простых, но очень важных для дальнейшего вспомогательных предложений.

I. *Вокруг каждой точки орбитно-устойчивой полутраектории L^+, стремящейся к состоянию равновесия O, всегда можно указать такую окрестность, чтобы все проходящие через точки этой окрестности траектории были орбитно-устойчивы при $t \to +\infty$ и стремились бы к тому же состоянию равновесия O, что и L^+.*

---

[1]) Доказательство конечности числа особых траекторий в общем случае систем, правые части которых — аналитические функции, довольно сложно и заведомо выходит за рамки настоящей книги.

[2]) Это утверждение доказывается следующим рассуждением, полностью аналогичным проведенным при доказательстве теоремы I § 1. Пусть точка P, граничная для некоторой компоненты, принадлежит особой траектории L_0, не являющейся состоянием равновесия (в случае, когда L_0 есть состояние равновесия, сделанное утверждение очевидно). Тогда в любой сколь угодно малой окрестности точки P будут находиться точки данной ячейки. Но в силу того, что ячейка состоит из целых траекторий (очевидно, орбитно-устойчивых), и в силу непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных значений, какую бы отличную от P точку P_1 траектории L_0 мы ни взяли, в любой сколь угодно малой окрестности точки P_1 также будут находиться точки рассматриваемой ячейки, что и означает, что точка P_1, а значит и всякая точка L_0, также будет граничной для данной ячейки.

[3]) Подробное доказательство, которое мы опускаем, основывается на следующих элементарных предложениях. Прежде всего, особая траектория, не являющаяся предельной, может быть граничной не более чем для двух ячеек. В случае, когда особая траектория L_0 является граничной для двух ячеек, очевидно, точки одной ячейки лежат по одну ее сторону, а точки другой ячейки — по другую ее сторону. Далее доказывается следующее предложение, основывающееся на предыдущем: всякая особая траектория может быть граничной лишь для конечного числа ячеек.

Отсюда нетрудно показать, что число ячеек конечно.

Докажем это утверждение. Для этого заметим прежде всего, что вокруг каждой точки L^+, очевидно, всегда можно взять столь малую окрестность, чтобы все точки этой окрестности принадлежали той же ячейке, что и L^+[1]), и, следовательно, являлись бы точками орбитно-устойчивых траекторий. Кроме того, всегда можно взять столь малым $\varepsilon > 0$, чтобы ε-окрестность полутраектории L^+ кроме состояния равновесия O, к которому стремится полутраектория L^+, не содержала бы целиком ни одной орбитно-неустойчивой траектории. Но тогда все полутраектории, проходящие через достаточно малую окрестность любой точки L^+, в силу орбитной устойчивости L^+ при $t \to +\infty$ не выходят из ε-окрестности L^+, а следовательно, предельное множество этих полутраекторий также лежит целиком в ε-окрестности L^+. Но это предельное множество должно состоять из целых особых траекторий, а так как в ε-окрестности L^+ лежит целиком только одна особая целая траектория — состояние равновесия O, то, значит, это предельное множество состоит из одного только состояния равновесия O, что и доказывает утверждение I.

II. *Вокруг каждой точки полутраектории L^+, имеющей отличную от состояния равновесия предельную траекторию, всегда можно указать такую окрестность, что все проходящие через точки этой окрестности траектории орбитно-устойчивы при $t \to +\infty$, и при $t \to -\infty$ имеют то же предельное множество, что и L^+.*

III. *Вокруг каждой точки замкнутой орбитно-устойчивой траектории существует такая окрестность, что все проходящие через точки этой окрестности орбитно-устойчивые траектории замкнуты и одна лежит внутри другой.*

Предложения II и III доказываются рассуждениями, аналогичными проведенному при доказательстве предложения I (с небольшим дополнением), и мы их опускаем.

Используя приведенные вспомогательные предложения, можно доказать ряд теорем, полностью характеризующих поведение траекторий одной и той же ячейки.

Теорема V. *Если все траектории, принадлежащие одной и той же ячейке, не замкнуты, то они имеют одни и те же ω- и α-предельные множества.*

Для доказательства теоремы предположим противное, т. е. предположим, что существуют две принадлежащие одной и той же ячейке траектории L и L', у которых предельные множества при $t \to +\infty$ (или $t \to -\infty$) различны.

Соединим какую-нибудь точку A на L и какую-нибудь точку B на L' непрерывной дугой l, целиком лежащей внутри рассматриваемой

---

[1]) Это, очевидно, следует из того, что по самому определению ячейки она является областью и, следовательно, все ее точки являются внутренними, т. е. всегда можно указать окрестность принадлежащей ячейке точки, целиком состоящую из точек этой же ячейки.

ячейки, так что через все точки дуги l проходят орбитно-устойчивые траектории (такая дуга l, очевидно, всегда может быть проведена в силу того, что по предположению траектории L и L' принадлежат одной и той же ячейке). Принимая во внимание сформулированные в настоящем параграфе предложения I и II, нетрудно видеть, что на дуге l всегда найдутся точки двух типов: через точки первого типа проходят траектории, имеющие при $t \to +\infty$ то же предельное множество, что и траектория L, через точки второго типа — траектории, имеющие при $t \to +\infty$ то же предельное множество, что и траектория L'. Очевидно, точками первого типа являются все достаточно близкие к A точки дуги l, а точками второго типа — все достаточно близкие к B точки l. При движении по дуге l от точки A к точке B мы должны перейти от точек первого типа к точкам второго типа. Следовательно, на дуге l непременно должна быть точка (обозначим ее через M_0), являющаяся либо последней точкой первого типа, либо первой точкой второго типа, либо, наконец, через точку M_0 проходит траектория, имеющая при $t \to +\infty$ предельное множество, отличное от предельных множеств траекторий L и L'. Траектория L_0, проходящая через точку M_0, очевидно, орбитно-устойчива (так как все точки дуги l принадлежат орбитно-устойчивым траекториям). Но точка M_0 не может быть последней точкой первого типа. Действительно, если бы она была точкой первого типа, т. е. траектория L_0 при $t \to +\infty$ имела бы то же предельное множество, что и L, то в силу того, что L_0 орбитно-устойчива, и в силу предложений I и II настоящей главы все траектории, проходящие через достаточно близкие к M_0 точки дуги l, имели бы то же предельное множество, что и траектория L, и, очевидно, точка M_0 не могла бы быть *последней* точкой первого типа. Совершенно так же можно показать, что точка M_0 не может быть первой точкой второго типа. Предположим, наконец, что при $t \to +\infty$ L_0 стремится к предельному множеству, отличному от предельного множества L и от предельного множества L'. Но тогда, в силу предложений I и II, и у всех траекторий, проходящих через достаточно близкие к M_0 точки дуги l, было бы то же предельное множество, что у L_0, а это, очевидно, означает, что точка M_0 не могла бы быть первой точкой не первого типа, что противоречит сделанному предположению. Полученное противоречие доказывает теорему.

Рассуждением, полностью аналогичным проведенному при доказательстве последней теоремы, можно доказать следующую теорему:

Теорема VI. *Если внутри какой-нибудь ячейки существует хоть одна замкнутая траектория, то все траектории этой ячейки замкнуты, одна лежит внутри другой, и между любыми двумя траекториями этой ячейки не могут лежать точки, не принадлежащие этой ячейке.*

Приведенные теоремы в общем виде устанавливают тот факт, который мы охарактеризовали словами: «неособые траектории внутри

каждой ячейки ведут себя одинаковым образом», и вносят точный смысл в эти слова. Очевидно, это не имеет места для тех траекторий, которые мы назвали особыми.

5. Односвязные и двухсвязные ячейки. Естественно поставить теперь вопрос о том, какие возможны типы отдельных ячеек у рассматриваемых нами динамических систем. Именно, так же как мы говорим о топологической структуре разбиения на траектории области плоскости G, в которой определена динамическая система, можно говорить о топологической структуре разбиения на траектории отдельной ячейки и интересоваться вопросом о классификации ячеек по топологической структуре их разбиения на траектории. При этом мы можем рассматривать либо ячейку как таковую, либо ячейку вместе с границей (состоящей из целых особых траекторий), т. е. замкнутую ячейку, являющуюся замкнутой областью (для целей качественного исследования больший интерес представляет рассмотрение именно ячеек вместе с границей).

Не останавливаясь подробно на вопросе такой классификации ячеек, мы все же приведем (без доказательств) основные относящиеся сюда предложения.

Основной топологической характеристикой всякой области, а значит, в частности, и ячейки, является *число связности* [1]), и вопрос, естественно возникающий первым, — это какова связность, возможная у ячеек.

Следующая теорема, которую мы формулируем без доказательства [2]), дает ответ на этот вопрос.

---

[1]) Граница всякой области может состоять либо из одного связного куска — «граничного континуума», т. е. замкнутого связного множества, либо из двух, трех и т. д. граничных континуумов (либо из бесконечного числа граничных континуумов, но этот случай не представляет для нас никакого интереса). Если граница области состоит из одного граничного континуума, то область называется односвязной; если из двух, трех и т. д., то область соответственно называется двухсвязной, трехсвязной и т. д. В случае, когда область двухсвязна, трехсвязна и т. д., один из граничных континуумов называется внешним граничным континуумом, остальные — внутренними.

Простейшим примером односвязной области является область внутри простой замкнутой кривой (в частности, внутри окружности), двухсвязной — кольцевая область между двумя простыми замкнутыми кривыми, трехсвязной — область, граница которой состоит из одной внешней замкнутой кривой и еще двух простых замкнутых кривых, лежащих внутри внешней замкнутой кривой и одна вне другой. Отметим при этом, что в случае двухсвязной, трехсвязной и т. д. области внутренние, граничные континуумы, в частности, могут быть отдельными точками. Очевидно, области с различным числом связности заведомо не являются топологически тождественными (здесь мы рассматриваем области как точечные множества и говорим об их топологической тождественности как точечных множеств).

[2]) Доказательство этой теоремы хотя и просто по идее, но довольно длинно. Оно основывается на следующем вспомогательном предложении: на каждом из граничных континуумов ячейки непременно лежат предельные точки траекторий этой ячейки.

Теорема VII. *Всякая ячейка не более чем двухсвязна.*

Нетрудно видеть, что ячейки, заполненные замкнутыми траекториями, всегда двухсвязны. Это непосредственно следует из теоремы VI и того факта, что внутри замкнутой траектории всегда лежит состояние равновесия. Ячейки, заполненные незамкнутыми траекториями, могут быть как односвязными, так и двухсвязными.

Приведем без доказательства еще одну теорему, в которой устанавливается весьма существенное свойство границ двухсвязной ячейки, заполненной незамкнутыми траекториями.

Теорема VIII. *В случае, когда ячейка, заполненная незамкнутыми траекториями, двухсвязна, один из ее граничных континуумов является α-предельным, а другой — ω-предельным множеством для траекторий этой ячейки.*

Таким образом, в случае двухсвязной ячейки, заполненной незамкнутыми траекториями, у ячейки не может быть ни одной граничной точки, не являющейся предельной для траекторий этой ячейки.

Используя приведенные теоремы, можно исчерпывающим образом описать границы, возможные у ячеек, и установить условия (геометрически эти условия представляются очевидными), при которых две ячейки, рассматриваемые без границ или вместе с границами, имеют одинаковую топологическую структуру разбиения на траектории[1]). Однако это рассмотрение выходит за рамки настоящей книги.

В следующем параграфе будет дана исчерпывающая классификация замкнутых ячеек в случае так называемых «грубых» систем. В настоящем же параграфе мы ограничимся только тем, что приведем несколько (геометрических) примеров односвязных и двухсвязных ячеек.

Примеры односвязных областей даны на рис. 300 и 301 (см. также рис. 306 и 309). Примеры двухсвязных областей даны на рис. 302 и 303 (см. также рис. 305). Жирными линиями на этих рисунках обозначены особые траектории, входящие в границы ячейки[2]).

---

[1]) Нетрудно видеть, что число различных типов ячеек (т. е. ячеек с различной топологической структурой разбиения на траектории) в случае, когда ячейка рассматривается без границы, конечно. Число различных типов замкнутых ячеек, т. е. в случае, когда ячейка рассматривается вместе с границей, неограниченно увеличивается при увеличении числа состояний равновесия у динамической системы. Однако в случае грубых систем, рассмотренных в следующем параграфе, независимо от числа состояний равновесия системы существует лишь конечное число типов замкнутых ячеек.

[2]) Отметим, что в примере на рис. 301 граница ячейки имеет довольно сложный характер. Все точки кривой вида восьмерки являются так называемыми «недостижимыми точками границы»; именно, не существует простой дуги, концом которой являлась бы точка на кривой вида восьмерки, а остальные точки принадлежали бы ячейке.

В заключение остановимся еще в общих чертах, не приводя никаких доказательств, на вопросах, касающихся полного качественного исследования данной динамической системы (A) в области G.

Особые траектории разделяют область G на частичные области — именно на ячейки и частичные области, в границу которых входят точки границы G. Если мы будем знать топологическую структуру

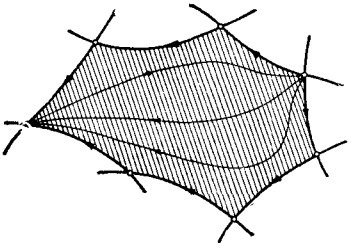

Рис. 300.

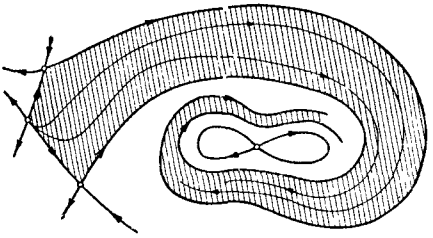

Рис. 301.

разбиения на траектории всех этих частичных областей и, кроме того, будем знать их взаимное расположение, то мы будем считать законченным качественное исследование рассматриваемой динамической системы в области G.

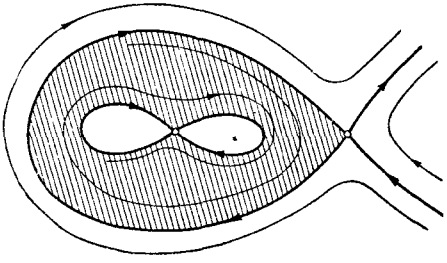

Рис. 302

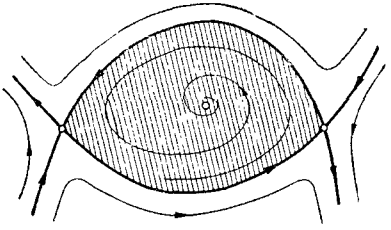

Рис. 303.

Очевидно, для того чтобы знать взаимное расположение частичных областей, необходимо знать расположение особых траекторий и поведение траекторий в ячейках.

Можно показать, что если известен характер каждого состояния равновесия, известно взаимное расположение предельных множеств (состояний равновесия, предельных циклов и предельных множеств типа III; см. § 1), а также расположение сепаратрис, не являющихся предельными, то это позволяет полностью установить топологическую структуру всех ячеек и их взаимное расположение, т. е. по-

зволяет полностью установить топологическую структуру разбиения на траектории в области G[1]).

Доказательство этого факта, основного в вопросе качественного исследования динамических систем и являющегося геометрически совершенно наглядным, хотя и элементарно по идее, но все же далеко выходит за рамки настоящей книги. В следующем параграфе мы вернемся к этому вопросу при рассмотрении грубых систем.

§ 4. Грубые системы [17, 145]

1. Грубые динамические системы. Вопрос о том, какими свойствами должны обладать динамические системы (модели), соответствующие физическим задачам, в общих чертах рассматривался во Введении. Вернемся к этому вопросу и остановимся на нем более подробно.

При написании дифференциального уравнения, как мы уже говорили, мы никогда не учитываем и не можем учесть всех без исключения факторов, которые так или иначе влияют на поведение рассматриваемой физической системы. С другой стороны, ни один из учитываемых нами факторов не может оставаться абсолютно неизменным во время движения физической системы. Когда мы при рассмотрении той или другой конкретной физической задачи приписываем параметрам вполне определенные фиксированные значения, то это имеет смысл только при условии, что малые изменения параметров не изменяют существенно характера движения. Предположим, что рассматриваемая динамическая система соответствует некоторой реальной физической задаче. В правые части такой динамической системы всегда войдет то или другое число параметров, соответствующих тем параметрам рассматриваемой физической задачи, которые учитывались при написании дифференциальных уравнений.

Если эта динамическая система хорошо отображает свойства рассматриваемой физической задачи, то в силу сказанного выше при малых изменениях параметров у нее, вообще говоря, должны сохраняться те черты, которые характеризуют поведение рассматриваемой физической модели. Прежде всего, у динамических систем, соответствующих физическим задачам, при малых изменениях параметров должна оставаться неизменной качественная структура разбиения на траектории. Если же некоторые качественные черты обусловлены определенными количественными соотношениями между параметрами, входящими в дифференциальные уравнения, описывающие физическую задачу, то эти качественные черты исчезают при сколь

---

[1]) Описание взаимного расположения особых траекторий называется «схемой», определяющей качественную структуру разбиения на траектории (см. [82]).