зволяет полностью установить топологическую структуру разбиения на траектории в области G[1]).

Доказательство этого факта, основного в вопросе качественного исследования динамических систем и являющегося геометрически совершенно наглядным, хотя и элементарно по идее, но все же далеко выходит за рамки настоящей книги. В следующем параграфе мы вернемся к этому вопросу при рассмотрении грубых систем.

§ 4. Грубые системы [17, 145]

1. Грубые динамические системы. Вопрос о том, какими свойствами должны обладать динамические системы (модели), соответствующие физическим задачам, в общих чертах рассматривался во Введении. Вернемся к этому вопросу и остановимся на нем более подробно.

При написании дифференциального уравнения, как мы уже говорили, мы никогда не учитываем и не можем учесть всех без исключения факторов, которые так или иначе влияют на поведение рассматриваемой физической системы. С другой стороны, ни один из учитываемых нами факторов не может оставаться абсолютно неизменным во время движения физической системы. Когда мы при рассмотрении той или другой конкретной физической задачи приписываем параметрам вполне определенные фиксированные значения, то это имеет смысл только при условии, что малые изменения параметров не изменяют существенно характера движения. Предположим, что рассматриваемая динамическая система соответствует некоторой реальной физической задаче. В правые части такой динамической системы всегда войдет то или другое число параметров, соответствующих тем параметрам рассматриваемой физической задачи, которые учитывались при написании дифференциальных уравнений.

Если эта динамическая система хорошо отображает свойства рассматриваемой физической задачи, то в силу сказанного выше при малых изменениях параметров у нее, вообще говоря, должны сохраняться те черты, которые характеризуют поведение рассматриваемой физической модели. Прежде всего, у динамических систем, соответствующих физическим задачам, при малых изменениях параметров должна оставаться неизменной качественная структура разбиения на траектории. Если же некоторые качественные черты обусловлены определенными количественными соотношениями между параметрами, входящими в дифференциальные уравнения, описывающие физическую задачу, то эти качественные черты исчезают при сколь

---

[1]) Описание взаимного расположения особых траекторий называется «схемой», определяющей качественную структуру разбиения на траектории (см. [82]).

угодно малом изменении параметров. Ясно, что такие качественные черты, вообще говоря, не наблюдаются в реальных системах.

Поэтому естественно прежде всего выделить класс динамических систем, у которых топологическая структура фазовых траекторий не меняется при малых изменениях дифференциальных уравнений. Такие системы мы будем называть *«грубыми»*. В настоящем параграфе дается точное математическое определение грубых систем и устанавливаются их основные свойства.

Пусть данная система (6.1)

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x,y)$$

— в дальнейшем мы будем называть ее «системой (A)» — рассматривается в некоторой ограниченной области плоскости G. Предположим, кроме того, что граница области G является «циклом без контакта», т. е. простой замкнутой (несамопересекающейся) кривой C, которую все траектории системы (A) пересекают и ни одна не касается[1]). Это предположение (не являющееся необходимым в излагаемой ниже теории грубых систем) хотя и ограничивает весьма сильно рассматриваемый класс системы, но освобождает дальнейшее изложение от непринципиальных усложнений.

Будем наряду с системой (A) рассматривать измененную систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x,y) + p(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x,y) + q(x,y), \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

где $p(x, y)$, $q(x, y)$ — малые добавки к правым частям системы (6.1), являющиеся также аналитическими функциями x и y. При этом в дальнейшем, кроме малости самих функций $p(x, y)$ и $q(x, y)$, мы будем требовать также и малости частных производных от этих функций. Измененную систему мы в дальнейшем будем называть «системой $(\tilde{A})$».

Очевидно, при всех достаточно малых $p(x, y)$ и $q(x, y)$ кривая C будет циклом без контакта также и для траекторий системы $(\tilde{A})$.

Напомним предварительно основные общие теоремы, касающиеся изменения решений системы дифференциальных уравнений при малых изменениях правых частей этих уравнений. На этих теоремах основывается все дальнейшее изложение. Первая из этих теорем — теорема IV Дополнения I — может быть в геометрической форме сформулирована следующим образом:

---

[1]) Этот цикл без контакта должен быть столь велик, чтобы можно было ограничиться изучением характера траекторий в области внутри него, не суживая физической задачи.

Задавая любой конечный промежуток времени, всегда можно взять систему $(\tilde{A})$, *столь близкую к данной системе* (A), *и столь близкие начальные точки, чтобы соответствующие траектории систем* (A) *и* $(\tilde{A})$ *в течение выбранного промежутка времени сколь угодно мало отличались друг от друга.*

Однако основной для дальнейшего является теорема V Дополнения I, уточняющая по сравнению с теоремой IV характер близости решений систем (A) и $(\tilde{A})$ в случае, когда близки не только правые части систем (A) и $(\tilde{A})$, но и их частные производные.

В силу этой теоремы, *если*

$$x=\varphi(t-t_0,\ x_0,\ y_0),$$
$$y=\psi(t-t_0,\ x_0,\ y_0)$$

— решение системы (A), *а*

$$x=\tilde{\varphi}(t-t_0,\ \tilde{x}_0,\ \tilde{y}_0),$$
$$y=\tilde{\psi}(t-t_0,\ \tilde{x}_0,\ \tilde{y}_0)$$

— решение системы $(\tilde{A})$, *то на любом конечном промежутке времени не только сами функции* $\varphi(t-t_0,\ x_0,\ y_0)$ *и* $\tilde{\varphi}(t-t_0,\ \tilde{x}_0,\ \tilde{y}_0)$, $\psi(t-t_0,\ x_0,\ y_0)$ *и* $\tilde{\psi}(t-t_0,\ \tilde{x}_0,\ \tilde{y}_0)$, *но и их частные производные* $\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}$ *и* $\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{x}_0}$, $\frac{\partial\psi}{\partial x_0}$ *и* $\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}_0}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ *и* $\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{y}_0}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y_0}$ *и* $\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{y}_0}$ *будут сколь угодно близки, когда правые части системы* $(\tilde{A})$ *и их частные производные достаточно близки к правым частям системы* (A) *и их частным производным, а начальная точка* $\tilde{M}_0(\tilde{x}_0,\ \tilde{y}_0)$ *достаточно близка к точке* $M_0(x_0,\ y_0)$.

На основании приведенных теорем каждая траектория в части, соответствующей конечному промежутку времени, мало меняется при малых изменениях правых частей. Однако отсюда еще вовсе не следует, что она будет мало меняться в течение неограниченного промежутка времени. Отсюда, конечно, тем более не следует, что разбиение на траектории у близких систем всегда имеет одинаковый характер[1]).

Требование неизменности качественной картины разбиения на траектории, т. е. требование «грубости» системы, может быть мате-

---

[1]) Простейшим примером системы, у которой качественная картина траекторий изменяется при малых изменениях правых частей, может служить система

$$\frac{dx}{dt}=ax+by;\quad \frac{dy}{dt}=-bx+ay,$$

у которой при $a=0$ все траектории замкнуты (начало координат — центр), а при столь угодно малых $a\neq 0$ нет ни одной замкнутой траектории (начало координат — фокус).

матически сформулировано следующим образом: *система* (A) *называется «грубой»* (в области G), *если для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать* $\delta > 0$ *такое, что при всевозможных аналитических функциях* $p(x, y)$, $q(x, y)$, *удовлетворяющих в области* G *неравенствам:*

$$\left.\begin{array}{lll} |p(x, y)| < \delta, & |q(x, y)| < \delta, & |p'_x(x, y)| < \delta, \\ |p'_y(x, y)| < \delta, & |q'_x(x, y)| < \delta, & |q'_y(x, y)| < \delta, \end{array}\right\} \quad (6.6)$$

существует топологическое (т. е. взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное) *отображение области* G *в себя, при котором каждая траектория системы* (A) *отображается в траекторию измененной системы* $(\tilde{A})$ *и обратно, и при этом соответствующие друг другу точки находятся на расстоянии, меньшем* ε.

Приведем определение «грубых систем» без предположения, что граница области, в которой рассматривается динамическая система, является циклом без контакта. Введем сначала некоторую вспомогательную терминологию.

Пусть G_1 и G_1^* — две замкнутые области. Мы скажем, что эти области ε-близки, если существует топологическое отображение этих областей друг на друга, при котором соответствующие друг другу точки находятся на расстоянии, меньшем ε.

Предположим, что в двух ε-близких замкнутых областях G_1 и G_1^* определены соответственно динамические системы (A_1) и (A_1^*).

Мы скажем, что разбиение замкнутой области G_1 на траектории системы (A) ε-тождественно разбиению замкнутой области G_1^* на траектории системы (A_1^*), если существует топологическое отображение G_1 на G_1^*, переводящее траектории системы (A) и траектории системы $(\tilde{A})$ друг в друга, при котором соответствующие друг другу точки находятся на расстоянии, меньшем ε.

Пусть система (A) определена в области G и пусть G_1 — какая-нибудь замкнутая область, целиком (вместе с границей) содержащаяся в G. Система (A) называется *грубой* в замкнутой области G_1, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что какую бы систему $(\tilde{A})$, удовлетворяющую в области G неравенствам (6.6), мы ни взяли, найдется содержащаяся в области G замкнутая область G_1^*, разбиение которой на траектории системы (A) ε-тождественно разбиению области G_1 на траектории системы $(\tilde{A})$.

Таким образом, в случае, когда система (A) грубая, разбиение на траектории области G у всякой измененной системы $(\tilde{A})$, правые части которой вместе с их частными производными достаточно близки к правым частям системы (6.5), топологически тождественно разбиению на траектории, заданному системой (A), и, кроме того, мало сдвинуто (меньше чем на ε) по отношению к разбиению на траектории, заданному системой (A) (при этом $\varepsilon > 0$ может быть взято сколь угодно малым). В частности, например, очевидно, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ [1]) и надлежащем $\delta > 0$ в ε-окрестности каждого состояния равновесия системы (A) будет лежать одно и только

[1]) Именно при таком $\varepsilon > 0$, что в ε-окрестности всякого данного состояния равновесия системы (A) кроме O не лежат уже больше другие состояния равновесия и в ε-окрестности каждого данного предельного цикла системы $(\tilde{A})$ не лежат другие предельные циклы.

одно состояние равновесия системы $(\tilde{A})$ и при этом того же характера, что и у системы (A), и в ε-окрестности каждого предельного цикла системы (A) один и только один предельный цикл системы $(\tilde{A})$ и т. д.

Переходя к установлению необходимых и достаточных условий грубости, сделаем одно весьма важное замечание: ограничения, которые требование грубости накладывает на рассматриваемые динамические системы, таково, что они выделяют «общий случай». Другими словами, всякая наперед заданная система, вообще говоря, является грубой, в то время как негрубые системы являются исключительными системами (ср. также § 5 настоящей главы).

В дальнейшем, говоря о системе $(\tilde{A})$, сколь угодно близкой к системе (A), о сколь угодно малых добавках к правым частям системы (A) или о сколь угодно малых изменениях динамической системы и т. д., мы всегда будем подразумевать малость не только самих функций $p(x, y)$, $q(x, y)$, но и их частных производных.

2. Грубые состояния равновесия. Установим прежде всего, какие ограничения накладывает требование грубости на существующие в этой системе состояния равновесия.

Имеет место следующая теорема:

Теорема I. *У грубой системы не может быть состояния равновесия, для которого*

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Действительно, если состояние равновесия $O(x_0, y_0)$ таково, что для него $\Delta = 0$, то это, очевидно, означает, что кривые $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$ в их общей точке $O(x_0, y_0)$ не просто пересекаются, а имеют соприкосновение того или другого порядка. Нетрудно показать[1]), что в этом случае всегда найдутся аналитические функции

$$\tilde{P}(x, y), \qquad \tilde{Q}(x, y),$$

сколь угодно близкие (вместе со своими частными производными) к функциям $P(x, y)$, $Q(x, y)$, такие, что в сколь угодно малой окрестности точки $O(x_0, y_0)$ (т. е. при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$) у кривых

$$\tilde{P}(x, y) = 0, \qquad \tilde{Q}(x, y) = 0$$

---

[1]) Точное аналитическое доказательство, хотя и не представляющее особых затруднений, мы опускаем ввиду геометрической наглядности этого факта.

будет существовать более одной общей точки. А это, очевидно, и означает, что система (A) не может быть грубой, и следовательно, теорема доказана.

В случае, когда $\Delta(x_0, y_0) \neq 0$, изоклины

$$P(x, y) = 0, \qquad Q(x, y) = 0$$

в общей точке $O(x_0, y_0)$ имеют простую точку пересечения (такие состояния равновесия называются простыми).

Нетрудно показать в этом случае, что если взять функции $\tilde{P}(x, y)$, $\tilde{Q}(x, y)$, достаточно близкие (вместе со своими производными) к функциям $P(x, y)$, $Q(x, y)$, то кривые $\tilde{P}(x, y) = 0$, $\tilde{Q}(x, y) = 0$ будут иметь только одну общую точку, близкую к точке $O(x_0, y_0)$[1]. Однако отсюда еще не следует, что условие $\Delta \neq 0$ является достаточным для того, чтобы состояние равновесия было «грубым», т. е. могло существовать в грубой системе; мы уже видели, что линейная система, у которой состояние равновесия есть центр, — негрубая, хотя $\Delta \neq 0$. Этот вопрос требует дополнительного рассмотрения, к которому мы и перейдем.

Перечислим состояния равновесия, возможные при условии $\Delta \neq 0$. Если обозначить

$$\sigma = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0), \quad \Delta = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & Q'_x(x_0, y_0) \\ P'_y(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix},$$

то, как мы видели выше (см. § 2 и 4 гл. V), возможны следующие случаи:

1) $\Delta > 0$, $\sigma^2 - 4\Delta > 0$. Корни характеристического уравнения действительные и одинаковых знаков. Состояние равновесия — узел (устойчивый или неустойчивый в зависимости от знака σ).

2) $\Delta < 0$. Корни характеристического уравнения действительные и разных знаков. Состояние равновесия — седло.

3) $\Delta > 0$, $\sigma^2 - 4\Delta < 0$, $\sigma \neq 0$. Корни характеристического уравнения комплексные сопряженные. Состояние равновесия есть фокус (устойчивый или неустойчивый в зависимости от знака σ).

Нетрудно убедиться в том, что в случаях 1), 2) и 3) состояние равновесия является «грубым», т. е. может существовать в грубой системе. В дальнейшем мы остановимся на этом несколько подробнее.

4) $\Delta > 0$, $\sigma = 0$. Корни характеристического уравнения чисто мнимые. В этом случае характер состояния равновесия в общем виде

---

[1]) Отметим, что при этом существенно требование малости не только добавок $p(x, y)$, $q(x, y)$, но и их частных производных. Действительно, можно показать, что всегда существуют сколь угодно малые добавки $p(x, y)$, $q(x, y)$, у которых частные производные не малы, такие, что в случае $\Delta \neq 0$ кривые $P(x, y) + p(x, y) = 0$, $Q(x, y) + q(x, y) = 0$ будут иметь любое наперед заданное число общих точек, сколь угодно близких к точке $O(x_0, y_0)$.

не был установлен (для линейной системы состояние равновесия, у которого корни чисто мнимые, есть центр).

Мы рассмотрим этот случай подробно (он рассматривается значительно сложнее, чем случаи 1), 2) и 3)) и покажем, что в этом случае состояние равновесия всегда является «негрубым», т. е. не может существовать в грубой системе.

Метод, с помощью которого мы будем устанавливать характер состояния равновесия в случае 4), применим также и в случае 3). А так как единообразное рассмотрение этих двух случаев удобно для дальнейшего, то мы положим сейчас, что корни характеристического уравнения — комплексные сопряженные.

Предполагая, что состояние равновесия O совпадает с началом координат, и приводя надлежащим линейным преобразованием переменных систему (A) к каноническому виду, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - by + g(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= bx + ay + h(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

где $g(x, y)$, $h(x, y)$ — ряды, расположенные по степеням x и y, начинающиеся с членов не ниже второй степени, а a и b — действительная и мнимая части корней λ_1 и λ_2 характеристического уравнения, так что $\lambda_1 = a + jb$, $\lambda_2 = a - jb$, где $b \neq 0$; при $a \neq 0$ мы имеем случай 3), а при $a = 0$ — случай 4).

Функции $g(x, y)$ и $h(x, y)$ могут быть представлены в виде:

$$g(x, y) = P_2(x, y) + P_3(x, y) + \ldots,$$
$$h(x, y) = Q_2(x, y) + Q_3(x, y) + \ldots,$$

где $P_i(x, y)$ и $Q_i(x, y)$ — однородные многочлены степени i.

Переходя в системе (A) (см. (6.7)) к полярным координатам, получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{ar^2 + r\cos\theta\, g(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta) + r\sin\theta\, h(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)}{r} = \\ &= ar + r^2[P_2(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta + Q_2(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta] + \ldots \\ &\ldots + r^i[P_i(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta + Q_i(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta] + \ldots \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{r^2}[br^2 + g(r\cos\theta, r\sin\theta)r\cos\theta - h(r\cos\theta, r\sin\theta)r\sin\theta] = \\ &= b + r[Q_2(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta - P_2(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta] + \ldots \\ &\ldots + r^{i-1}[Q_i(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta - P_i(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta] + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

Так как $b \neq 0$, то при всех достаточно малых r, т. е. при всех достаточно малых x и y,

$$\frac{d\theta}{dt} \neq 0.$$

Это, очевидно, означает, что любая полупрямая

$$\theta = \text{const}$$

во всех достаточно близких к началу координат точках (отличных от начала координат) не имеет контактов с траекториями, при этом в зависимости от знака b будем иметь: либо $\frac{d\theta}{dt} > 0$, либо $\frac{d\theta}{dt} < 0$.

Нам удобнее будет в дальнейшем рассматривать вместо системы (6.8) одно уравнение, получающееся делением первого из уравнений (6.8) на второе:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{ar + r^2 [P_2(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta + Q_2(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta] + \ldots}{b + r[Q_2\cos\theta - P_2\sin\theta] + r^2[Q_3\cos\theta - P_3\sin\theta] + \ldots} = R(r, \theta).$$

Принимая во внимание, что знаменатель правой части этого уравнения не обращается в нуль при $r = 0$, мы, очевидно, можем разложить правую часть по степеням r:

$$\frac{dr}{d\theta} = R(r, \theta) = rR_1(\theta) + r^2R_2(\theta) + \ldots, \tag{6.9}$$

где коэффициенты $R_i(\theta)$ — периодические функции θ с периодом 2π, и ряд в правой части сходится при всех θ, во всяком случае для всех достаточно малых значений r. Нетрудно видеть[1]), что

$$\left.\begin{aligned} R_1(\theta) &= \frac{a}{b}, \\ R_2(\theta) &= \frac{P_2\cos\theta + Q_2\sin\theta}{b} - \frac{a}{b^2}(Q_2\cos\theta - P_2\sin\theta). \end{aligned}\right\} \tag{6.10}$$

Пусть

$$r = f(\theta, r_0)$$

— решение уравнения (6.9), обращающееся в r_0 при $\theta = 0$, так что

$$f(0, r_0) \equiv r_0.$$

Очевидно, всякому такому решению уравнения (6.9) соответствует траектория системы (A), пересекающая полупрямую $\theta = 0$ в точке, лежащей на расстоянии r_0 от начала; и обратно, всякой траектории, пересекающей полупрямую $\theta = 0$ в достаточно близкой к началу точке, соответствует решение $r = f(\theta, r_0)$, где r_0 принимает некоторое данное значение. Кроме того, нетрудно видеть, что все от-

---

[1]) Выражения для коэффициентов $R_i(\theta)$ через P_i и Q_i проще всего могут быть получены следующим образом: из (6.9), очевидно, следует тождественное равенство: $ar + (P_2\cos\theta + Q_2\cos\theta)r^2 + \ldots = (R_1r + R_2r^2 + \ldots) \times [b + r(Q_2\cos\theta - P_2\sin\theta) + r^2(Q_3\cos\theta - P_3\sin\theta) + \ldots]$. Приравнивая члены с одинаковыми степенями, мы получим рекуррентные соотношения для определения $R_i(\theta)$. В (6.10) через P_2 и Q_2 обозначены соответственно $P_2(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ и $Q_2(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$.

личные от состояния равновесия O траектории, проходящие через достаточно близкие к O точки, пересекают прямую $\theta=0$ в достаточно близких от начала точках[1]). Поэтому, рассматривая решение $r=f(\theta, r_0)$ при всех достаточно малых r_0, мы рассмотрим все траектории, проходящие через достаточно близкие к O точки. В силу того, что правая часть уравнения (6.9) — аналитическая функция θ и r, функция $f(\theta, r_0)$ будет аналитической функцией θ, r_0 (см. теорему III Дополнения I) и может быть разложена в ряд по степеням r_0, сходящийся при всех $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ для всех достаточно малых значений r_0 ($|r_0|<\rho_0$, где $\rho_0>0$ — некоторая достаточно малая величина):

$$r=f(\theta, r_0)=u_1(\theta)r_0+u_2(\theta)r_0^2+\ldots \tag{6.11}$$

Так как $r=f(\theta, r_0)$ есть решение уравнения (6.9), то, подставляя выражение (6.11) в это уравнение, мы должны получить тождественное относительно r_0 равенство, т. е.

$$\left(\frac{du_1}{d\theta}r_0+\frac{du_2}{d\theta}r_0^2+\ldots\right)=R_1(\theta)(u_1r_0+u_2r_0^2+\ldots)+$$
$$+R_2(\theta)(u_1r_0+u_2r_0^2+\ldots)^2+\ldots$$

Отсюда, приравнивая выражения при одинаковых степенях r_0, мы получим рекуррентные дифференциальные уравнения для определения функций $u_i(\theta)$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{du_1}{d\theta}&=u_1R_1,\\ \frac{du_2}{d\theta}&=u_2R_1+R_2u_1^2,\\ &\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \tag{6.12}$$

Кроме того, из условия

$$f(0, r_0)\equiv r_0$$

мы, очевидно, получаем:

$$u_1(0)=1,\quad u_i(0)=0,\quad i=2, 3, \ldots$$

Этими начальными условиями совместно с дифференциальными уравнениями (6.12) функции $u_i(\theta)$ определяются полностью. В частности, первое из этих уравнений дает:

$$u_1(\theta)=e^{\frac{a}{b}\theta},$$

откуда, в частности, следует, что при $a=0$

$$u_1(\theta)=1.$$

---

[1]) Это можно показать на основании теоремы II Дополнения I, если принять во внимание, что решение $r=0$ определено при всех θ.

Так как во всех достаточно близких к началу O точках (отличных от O) прямая $\theta=0$ не имеет контактов с траекториями системы (A), то достаточно малый отрезок этой прямой с концом в точке O будет вполне аналогичен отрезку без контакта, хотя один конец его упирается в состояние равновесия. Если в решении $r=f(\theta, r_0)$ положить $\theta=2\pi$, то, очевидно, при всяком данном r_0 ($|r_0|<\rho_0$) значение r соответствует «последующей» точке пересечения траектории с полупрямой $\theta=0$, а функция $r=f(2\pi, r_0)=u_1(2\pi)r_0+\ldots$ будет полностью аналогична функции последования, о которой шла речь в § 7 гл. V. При этом, конечно, мы должны рассматривать только положительные значения r_0, так как отрицательные значения не имеют геометрического смысла. Пользуясь этой функцией, мы можем сделать исчерпывающие заключения относительно возможного характера траекторий в окрестности состояния равновесия O.

Введем функцию $\Psi(r_0)=f(2\pi, r_0)-r_0=\alpha_1 r_0+\alpha_2 r_0^2+\ldots$

Здесь

$$\alpha_1=u_1(2\pi)-1=e^{2\pi\frac{a}{b}}-1,$$

$$\alpha_k=u_k(2\pi), \quad k>1.$$

Очевидно, значения r_0 (и только такие значения), при которых

$$\Psi(r_0)=f(2\pi, r_0)-r_0=0,$$

соответствуют замкнутым траекториям.

Отметим, что при $a=0$, т. е. в случае 4), мы имеем $\alpha_1=0$. Кроме того, коэффициенты α_i в разложении функции $\Psi(r_0)$ обладают следующими свойствами: если $\alpha_1=0$, то непременно и $\alpha_2=0$. И вообще, если $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_{2n-1}=0$, то непременно и $\alpha_{2n}=0$, т. е. первый не равный нулю коэффициент всегда нечетного номера[1]).

Возможны следующие два случая:

а) Хотя бы один из коэффициентов α_j отличен от нуля.

---

[1]) Покажем, что в случае, когда $a=0$, а следовательно и $\alpha_1=0$, непременно и $\alpha_2=0$. Если $a=0$, то в формулах (6.12) $R_1=\frac{a}{b}=0$. Первое из уравнений принимает вид $\frac{du_1}{d\theta}=0$. Отсюда, принимая во внимание начальные условия, $u_1=1$. Второе из уравнений (6.12) будет тогда $\frac{du_2}{d\theta}=R_2(\theta)$, но в силу (6.10) $R_2(\theta)$ есть однородная функция $\cos\theta$ и $\sin\theta$ третьей степени. Интегрируя обе части последнего уравнения в пределах от 0 до 2π и принимая во внимание, что $u_2(0)=0$, получим $u_2(2\pi)=0$. Аналогично можно показать, что первый не равный нулю коэффициент α_j — нечетного номера (см. [84], а также [13]).

Пусть α_j — первый из отличных от нуля коэффициентов (в силу предыдущего j — непременно нечетное). Тогда при всех достаточно малых $r_0 > 0$

$$\Psi(r_0) = \alpha_j r_0^j + \ldots$$

отлично от нуля. В этом случае все траектории, проходящие через достаточно близкие к O точки, являются спиралями, стремящимися к состоянию равновесия O либо при $t \to +\infty$ (когда $\alpha_j < 0$ и $b > 0$, т. е. когда при всех достаточно малых r_0 $\Psi(r_0) < 0$ и $\frac{d\Psi}{dt} > 0$, или когда $\alpha_j > 0$ и $b < 0$, т. е. $\Psi(r_0) > 0$ и $\frac{d\Psi}{dt} < 0$), либо при $t \to -\infty$ (когда $\alpha_j < 0$ и $b < 0$, т. е. когда при всех достаточно малых r_0 $\Psi(r_0) < 0$ и $\frac{d\Psi}{dt} < 0$, или когда $\alpha_j > 0$ и $b > 0$, т. е. $\Psi(r_0) > 0$ и $\frac{d\varphi}{dt} > 0$). Состояние равновесия имеет характер фокуса. Этот фокус может быть устойчивым или неустойчивым (в зависимости от знаков b и α_j). Случай $a \neq 0$, т. е. $j = 1$, был уже рассмотрен. В случае $j > 1$ мы будем называть состояние равновесия *сложным фокусом кратности* j или j-кратным фокусом.

б) Все коэффициенты α_i равны нулю.

В этом случае $\Psi(r_0) \equiv 0$ и, следовательно, все траектории, проходящие через достаточно малую окрестность O, замкнуты.

Состояние равновесия O есть *центр*[1]).

Указанные два случая, очевидно, исчерпывают все возможности, которые могут здесь представиться.

Мы покажем ниже, что в грубой системе не может быть сложного фокуса и центра. Для этого сделаем некоторые предварительные замечания.

Пусть наряду с системой (A) рассматривается измененная система $(\tilde{A})$, достаточно близкая к системе (A), вида[2]):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \tilde{a}x - \tilde{b}y + \tilde{g}(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= \tilde{b}x + \tilde{a}y + \tilde{h}(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{6.13}$$

---

[1]) Можно показать, что в этом случае система (A) обладает аналитическим интегралом, именно, интегралом вида

$$x^2 + y^2 + A_3(x, y) + \ldots = C,$$

где невыписанные члены содержат x и y в степени не ниже третьей. Отметим еще также, что в случае, когда правые части системы не являются аналитическими функциями, возможен случай, когда существует бесконечная последовательность вложенных друг в друга и стягивающихся в точку замкнутых траекторий, между которыми могут лежать как замкнутые, так и незамкнутые траектории.

[2]) К такому виду можно, очевидно, с помощью линейной замены переменных привести любую измененную систему, достаточно близкую к системе (A).

Вводя полярные координаты, а затем переходя, как и выше при рассмотрении системы (A), от системы к одному уравнению, мы получим соответствующее системе $(\tilde{A})$ дифференциальное уравнение

$$\frac{dr}{d\theta} = \tilde{R}(r, \theta) = \tilde{R}_1(\theta) r + \tilde{R}_2(\theta) r^2 + \ldots, \tag{6.14}$$

аналогичное уравнению (6.9).

Если

$$r = \tilde{f}(\theta, r_0) = \tilde{u}_1(\theta) r_0 + \tilde{u}_2(\theta) r_0^2 + \ldots$$

— решение уравнения (6.14), то, очевидно, для определения функций $\tilde{u}_i(\theta)$ мы получим такие же рекуррентные дифференциальные уравнения, как и для определения $u_i(\theta)$, нужно только в них вместо $R_i(\theta)$ подставить $\tilde{R}_i(\theta)$.

В частности (так же как и в случае уравнения (6.9)),

$$\tilde{u}_1(\theta) = e^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}\theta}.$$

Будем, как и в случае системы (A), рассматривать функцию последования:

$$r = \tilde{f}(2\pi, r_0),$$

а также функцию

$$\tilde{\Psi}(r_0) = \tilde{f}(2\pi, r_0) - r_0.$$

Предположим, что построенная для исходной системы (A) функция

$$r = f(2\pi, r_0)$$

определена при всех значениях r_0, удовлетворяющих неравенству: $|r_0| < \rho_0$ (ρ_0 — некоторая положительная постоянная).

На основании теоремы V Дополнения I нетрудно показать, что у всякой системы $(\tilde{A})$, достаточно близкой к системе (A), функция

$$r = \tilde{f}(2\pi, r_0)$$

также определена при всех значениях r_0, $|r_0| < \rho_0$, и при этих значениях сколь угодно близка к функции $f(2\pi, r_0)$, а производная ее сколь угодно близка к производной от функции $f(2\pi, r_0)$.

После этого замечания перейдем к доказательству следующей теоремы.

Теорема II. *У грубой системы не может быть состояния равновесия, для которого*

$$\Delta > 0, \quad \sigma = P'_x + Q'_y = 0.$$

Для доказательства теоремы предположим противное, т. е. предположим, что у системы (A), являющейся грубой, есть состояние равновесия, для которого

$$\Delta(x_0, y_0) > 0, \quad \sigma = 0.$$

Если предположить, как и выше, что состояние равновесия лежит в начале координат, то система (A) может быть в этом случае приведена к виду:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -by + g(x, y) = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= bx + h(x, y) = Q(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{6.15}$$

Для нее возможны два указанных случая а) и б), т. е. состояние равновесия O может быть либо сложным фокусом, либо центром.

Покажем, что в обоих случаях можно указать сколь угодно близкую к системе (A) измененную систему, у которой разбиение на траектории некоторой области, содержащей начало, качественно отлично от разбиения этой области на траектории, заданного системой (A). Для этого рассмотрим измененную систему $(\tilde{A})$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \tilde{a}x - by + g(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= \tilde{a}y + bx + h(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{6.16}$$

у которой $\tilde{a} \neq 0$ (знак $\tilde{a}$ будет фиксирован дальше).

Пусть

$$\Psi(r_0) = f(2\pi, r_0) - r_0,$$
$$\tilde{\Psi}(r_0) = \tilde{f}(2\pi, r_0) - r_0$$

— введенные выше функции, построенные соответственно для систем (A) и $(\tilde{A})$, определенные при всех r_0, $|r_0| < \rho_0$.

Рассмотрим отдельно случаи а) и б), которые возможны для системы (A).

а) Состояние равновесия $O(0,0)$ системы (A) есть сложный фокус. В этом случае не все коэффициенты в разложении $\Psi(r_0)$ обращаются в нуль. Пусть α_{2k+1} — первый не обращающийся в нуль коэффициент, так что

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{2k} = 0, \quad \alpha_{2k+1} \neq 0.$$

Предположим для определенности, что $b > 0$ и $\alpha_{2k+1} < 0$, т. е. что сложный фокус системы (A) устойчив (совершенно аналогично рассматривается случай, когда сложный фокус неустойчив). В этом случае функция $\Psi(r_0)$ имеет вид:

$$\Psi(r_0) = r_0^{2k+1}(\alpha_{2k+1} + \ldots),$$

и всегда можно указать столь малое $r_0' < \rho_0$, чтобы мы имели

$$\Psi(r_0') < 0.$$

Но всегда можно взять измененную систему $(\tilde{A})$ (см. (6.16)) столь близкой к системе (A), чтобы соответствующая функция $\tilde{\Psi}(r_0)$ при всех r_0, $|r_0| < \rho_0$, была сколь угодно близка к функции $\Psi(r_0)$, так что мы имели бы

$$\tilde{\Psi}(r_0') < 0.$$

С другой стороны, знак функции $\tilde{\Psi}(r_0)$

$$\tilde{\Psi}(r_0) = r_0(\tilde{\alpha}_1 + \ldots)$$

для всех достаточно малых r_0 (очевидно, заведомо меньших r_0') совпадает со знаком $\tilde{\alpha}_1$.

Если взять $\tilde{a} > 0$, то $\tilde{\alpha}_1 = e^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} 2\pi} - 1 > 0$ и, следовательно, заведомо можно указать столь малое $r_0'' < r_0'$, при котором

$$\tilde{\Psi}(r_0'') > 0.$$

Таким образом, мы имеем:

$$\tilde{\Psi}(r_0'') > 0, \quad \tilde{\Psi}(r_0') < 0$$

и, следовательно, непременно существует r_0^* $(r_0'' < r_0^* < r_0')$ такое, что $\tilde{\Psi}(r_0^*) = 0$. Это, очевидно, означает, что через точку полупрямой $\theta = 0$, соответствующей значению $r = r_0^*$, проходит замкнутая траектория — предельный цикл — системы $(\tilde{A})$. Нетрудно убедиться в том, что чем меньше $\tilde{a}$, тем в меньшей окрестности точки O он лежит [1]).

Если бы система (A) была грубой, то в любой, достаточно малой окрестности O разбиения на траектории, заданные системой (A) и рассматриваемыми системами $(\tilde{A})$ (см. (6.16)), должны были быть тождественными. Но это, очевидно, невозможно, так как мы всегда можем взять окрестность точки O такой, чтобы в ней не лежало ни одного предельного цикла системы (A), а в силу предыдущего при достаточно малом $\tilde{a} > 0$ в этой окрестности заведомо будет лежать предельный цикл системы $(\tilde{A})$.

Перейдем теперь ко второму возможному для системы (A) случаю.

б) Состояние равновесия O системы (A) есть центр. При $a \neq 0$ состояние равновесия O системы $(\tilde{A})$ является фокусом (устойчивым или неустойчивым в зависимости от знака $\tilde{a}$). Следовательно, состояние равновесия O имеет различный характер у систем (A) и $(\tilde{A})$

---

[1]) Этот предельный цикл «рождается» из сложного состояния равновесия O системы (A).

и система (A) не может быть грубой. Таким образом, теорема доказана.

Из доказанных теорем I и II, очевидно, следует, что у грубой системы возможны только простые состояния равновесия типа 1), 2) и 3). Эти состояния равновесия — «грубые» в том смысле, что разбиения некоторой достаточно малой окрестности такого состояния равновесия на траектории исходной системы (A) и на траектории всякой достаточно близкой к ней системы $(\tilde{A})$ топологически тождественны и мало сдвинуты одно по отношению к другому. В частности, когда состояние равновесия O системы (A) — седло, состояние равновесия $\tilde{O}$ системы $(\tilde{A})$ — тоже седло и сепаратрисы седла $\tilde{O}$ мало сдвинуты по сравнению с сепаратрисами седла O системы (A)[1]).

3. Простые и сложные предельные циклы. Грубые предельные циклы. Перейдем теперь к выяснению тех условий, которым должна удовлетворять замкнутая траектория для того, чтобы она могла существовать в грубой системе. Для этого рассмотрим сначала окрестность произвольной замкнутой траектории, не обязательно являющейся траекторией грубой системы. Рассмотрение, которое при этом проводится, аналогично проведенному в случае сложного фокуса и центра. Итак, пусть L_0 — замкнутая траектория,

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t)$$

— какое-нибудь соответствующее ей периодическое движение и τ — период этого движения.

Рассмотрим отрезок без контакта l, проведенный через какую-нибудь точку Q траектории L_0, содержащий точку Q внутри. Пусть s — параметр на этом отрезке и

$$\bar{s}=f(s)$$

— функция последования на нем[2]) (см. § 7 гл. V). Введем функцию $\Psi(s)=f(s)-s$. Функции $f(s)$ и $\Psi(s)$ являются аналитическими функциями s (см. § 7, п. 3, гл. V).

Если s_0 — значение параметра s, соответствующее точке Q отрезка l, через которую проходит замкнутая траектория L_0, то, очевидно,

$$\Psi(s_0)=f(s_0)-s_0=0.$$

Если для рассматриваемой замкнутой траектории характеристический показатель h не равен нулю, то, как известно (см. § 7 гл. V), при $h<0$, т. е. когда $\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)<1$ и, следовательно, $\Psi'(s_0)<0$,

---

[1]) Подробное доказательство этих геометрически очевидных фактов мы не приводим.

[2]) Напомним, что функция последования строилась так, что «последующие» точки соответствовали значениям t бо́льшим, чем «предыдущие».

траектория L_0 — устойчивый предельный цикл, а при $h > 0$, т. е. когда $\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right) > 1$ и, следовательно, $\Psi'(s_0) > 0$, траектория L_0 — неустойчивый предельный цикл.

В обоих этих случаях значение $s = s_0$ является простым корнем уравнения $\Psi(s) = 0$. Поэтому в случае, когда $h \neq 0$, предельный цикл называется простым.

Остановимся теперь на случае, оставленном без рассмотрения в § 7 гл. V, когда характеристический показатель $h = 0$, т. е. $\frac{d\bar{s}}{ds} = 1$ и, следовательно, $\Psi'(s_0) = 0$. В этом случае $s = s_0$ есть корень уравнения $\Psi(s) = 0$ кратности выше первой. При этом могут представиться следующие две возможности:

1) Хотя бы одна из производных функции $\Psi(s)$ не обращается в нуль при $s = s_0$, т. е. существует такое целое $k > 1$, что

$$\Psi'(s_0) = \ldots = \Psi^{(k-1)}(s_0) = 0; \quad \Psi^{(k)}(s_0) \neq 0.$$

Мы будем иметь, следовательно:

$$\Psi(s) = (s - s_0)^k [\Psi^{(k)}(s_0) + (s - s_0)\Psi^{(k+1)}(s_0) + \ldots].$$

В этом случае всегда существует $d > 0$ такое, что при всех отличных от s_0 значениях s, удовлетворяющих неравенству

$$|s - s_0| < d,$$

$\Psi(s)$ не обращается в нуль, т. е. часть отрезка, для точек которой $|s - s_0| < d$, пересекает только одна замкнутая траектория, именно рассматриваемая траектория L_0. Эта замкнутая траектория L_0 называется *сложным k-кратным предельным циклом.*

Рассмотрим случай, когда k — нечетное. Предположим, что $\Psi^{(k)}(s_0) < 0$. Тогда при $s < s_0$

$$\Psi(s) > 0, \quad \text{т. е.} \quad f(s) > s,$$

а при $s > s_0$

$$\Psi(s) < 0, \quad \text{т. е.} \quad f(s) < s.$$

Следовательно, всякая последующая точка на отрезке l ближе к точке Q (в которой замкнутая траектория L_0 пересекает отрезок l), чем предыдущая. Так как по самому построению функции последования «последующая» точка соответствует значению t большему, чем предыдущая, то, принимая во внимание, что L_0 — единственная замкнутая траектория, пересекающая рассматриваемую часть отрезка без контакта l, нетрудно показать[1]) на основании теоремы IV § 2

[1]) В силу того, что в рассматриваемом случае $f'(s_0) = 1$, здесь, очевидно, нельзя провести рассуждения, приведенного в § 7 гл. V.

настоящей главы, что всякая отличная от L_0 траектория, пересекающая отрезок l достаточно близко к точке Q, при $t \to +\infty$ стремится к предельному циклу L_0. Предельный цикл L_0 является устойчивым (нечетно-кратным) предельным циклом.

Если $\Psi^{(k)}(s_0) > 0$, то совершенно таким же рассуждением можно показать, что всякая траектория, пересекающая отрезок l достаточно близко в точке Q, при $t \to -\infty$ стремится к предельному циклу L_0. Предельный цикл L_0 является неустойчивым (нечетно-кратным) предельным циклом.

Пусть теперь k — четное. Тогда при всех $s \neq s_0$, в зависимости от знака $\Psi^{(k)}(s_0)$, либо $\Psi(s) > 0$, т. е. $f(s) > s$ (если $\Psi^{(k)}(s_0) > 0$), либо $\Psi(s) < 0$, т. е. $f(s) < s$ (если $\Psi^{(k)}(s_0) < 0$). Нетрудно показать, что в случае, когда $\Psi^{(k)}(s_0) > 0$, все траектории, проходящие через точки отрезка l, соответствующие значениям $s < s_0$, стремятся к L_0 при $t \to +\infty$, а все траектории, проходящие через точки отрезка l, соответствующие значениям $s > s_0$, стремятся к L_0 при $t \to -\infty$, и наоборот, когда $\Psi^{(k)}(s_0) < 0$.

Очевидно, в рассматриваемом случае (четное k) предельный цикл L_0 неустойчив. Однако часто предельный цикл этого типа называют «полуустойчивым» (четно-кратным), сохраняя термин «неустойчивый» лишь для цикла, к которому все достаточно близкие траектории стремятся при $t \to -\infty$.

При $k > 1$, как в случае четного, так и в случае нечетного k, предельный цикл называется также «сложным предельным циклом».

2) Производные всех порядков от функции $\psi(s)$ при $s = s_0$ обращаются в нуль, т. е. при любом i

$$\Psi^{(i)}(s_0) = 0.$$

Тогда, очевидно, при всех рассматриваемых s, в силу того, что функция $\Psi(s)$ — аналитическая функция,

$$\Psi(s) \equiv 0;$$

т. е. функция последования имеет вид:

$$\bar{s} = s.$$

Это, очевидно, означает, что все траектории, проходящие через достаточно близкие к L_0 точки, замкнуты.

Для того чтобы сообщить изложенному бóльшую наглядность, рассмотрим диаграмму Ламерея, т. е. рассмотрим плоскость с прямоугольными координатами $\bar{s}$ и s и на этой плоскости — кривую, представляющую функцию последования

$$\bar{s} = f(s),$$

и прямую $\bar{s} = s$. Замкнутые траектории соответствуют значениям s, для которых

$$f(s) = s,$$

т. е. тем значениям s, при которых кривая $\bar{s}=f(s)$ имеет общую точку с прямой $\bar{s}=s$. Если эта общая точка является простым пересечением, то соответствующая замкнутая траектория есть предельный цикл, для которого $\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)\neq 1$. Если эта общая точка есть точка соприкосновения того или другого порядка, то предельный цикл будет той или другой кратности. В частности, когда кривая $\bar{s}=f(s)$ совпадает с прямой $\bar{s}=s$, имеет место случай 2).

Мы покажем, что замкнутая траектория, являющаяся k-кратным предельным циклом (случай 1)) при $k>1$, и замкнутая траектория, в окрестности которой все траектории замкнуты (случай 2)), не могут существовать в грубой системе.

Сделаем предварительно некоторые замечания.

Отрезок l, являющийся отрезком без контакта для траекторий системы (A), будет также отрезком без контакта и для траекторий всякой измененной системы $(\tilde{A})$, достаточно близкой к системе (A). Кроме того, если s_1 и s_2 $(s_1<s_2)$ — значения параметра s, соответствующие отличным от концов точкам отрезка l, то на основании теоремы IV Дополнения I нетрудно показать, что при всех значениях s, $s_1\leqslant s\leqslant s_2$ на l может быть определена соответствующая системе $(\tilde{A})$ функция последования:

$$\bar{s}=\tilde{f}(s).$$

На основании теоремы V Дополнения I нетрудно видеть, что эта функция $\tilde{f}(s)$ и ее производная $\tilde{f}'(s)$ сколь угодно мало отличаются соответственно от функции $f(s)$ и ее производной $f'(s)$, если система $(\tilde{A})$ достаточно близка к системе (A).

Принимая сказанное во внимание, естественно ожидать, что замкнутая траектория, у которой характеристический показатель $h=0$, т. е. в случае, когда $k>1$, и в случае 2), не может существовать в грубой системе. Действительно, пусть R_0 — общая точка кривой $\bar{s}=f(s)$ и прямой $\bar{s}=s$, соответствующая такой замкнутой траектории. Кривая $\bar{s}=f(s)$ либо имеет в точке R_0 соприкосновение того или другого порядка с прямой $\bar{s}=s$ (случай 1)), либо совпадает с прямой $\bar{s}=s$ (случай 2)). Но в обоих этих случаях можно указать функцию $\bar{s}=\tilde{f}(s)$, сколь угодно близкую к функции $f(s)$ и с производной, сколь угодно близкой к $f'(s)$, такую, чтобы кривая $\bar{s}=\tilde{f}(s)$ в сколь угодно малой окрестности точки R_0 либо имела с прямой $\bar{s}=s$ более одной общей точки, либо (в случае, когда кривая $\bar{s}=f(s)$ имеет с прямой $\bar{s}=s$ соприкосновение четного порядка, см. рис. 313, а также в случае, когда она совпадает с прямой $\bar{s}=s$) не имела бы ни одной общей точки с этой прямой. Если, кроме того, мы покажем, что существует измененная система $(\tilde{A})$, сколь угодно близкая к системе (A), для которой такая функция $\tilde{f}(s)$ является функцией последования на отрезке l, то, очевидно, это будет означать, что

при надлежащим образом выбранных, но сколь угодно малых изменениях правых частей системы (A) рассматриваемая замкнутая траектория либо разделяется на несколько предельных циклов, либо исчезает (в случае четного k и в случае 2)). Отсюда, очевидно, будет следовать, что система (A) не может быть грубой. Таким образом, доказательство того, что в грубой системе не может существовать k-кратного предельного цикла, при $k > 1$ может быть проведено с помощью построения измененной системы $(\tilde{A})$, для которой функция последования $\tilde{f}(s)$ обладает нужными свойствами. Очевидно, такое доказательство (оно проводится ниже) весьма аналогично доказательству теоремы II.

Перейдем к точному его изложению. Сформулируем сначала без доказательства одну вспомогательную лемму:

Лемма. *Существует определенная в области G функция*

$$z = F(x, y),$$

имеющая непрерывные частные производные не менее чем до второго порядка и такая, что: 1) $F(\varphi, \psi) \equiv 0$ (*т. е. функция* $z = F(x, y)$ *обращается в нуль в точках траектории* L_0); 2) $[F'_x(\varphi, \psi)]^2 + [F'_y(\varphi, \psi)]^2 \neq 0$.

Утверждение этой леммы имеет очень простой геометрический смысл. Именно, рассмотрим в пространстве x, y, z функцию $z = F(x, y)$, обладающую указанными в лемме свойствами. Эта функция изображается гладкой поверхностью, которая проходит через траекторию L_0, лежащую в плоскости x, y, и в силу условия 2) ни в одной точке L_0 не касается плоскости x, y [1]).

---

[1]) Доказательство существования функции $F(x, y)$, обладающей указанными в лемме свойствами, может быть, например, проведено следующим образом. Рассмотрим криволинейную систему координат, введенную в § 7, п. 3, гл. V (см. (5.55)). Кривые $v = \text{const}$ являются замкнутыми кривыми, причем, очевидно, кривая $v = 0$ — это рассматриваемая замкнутая траектория L_0. В точках траектории L_0, т. е. при $v = 0$ и всевозможных u, детерминант

$$D = \begin{vmatrix} \varphi'(u) - v\psi''(u), & -\psi'(u) \\ \psi'(u) + v\varphi''(u), & \varphi'(u) \end{vmatrix},$$

очевидно, не обращается в нуль. Поэтому в окрестности каждой точки траектории L_0 можно найти u как функцию x и y: $u = \Phi(x, y)$. Нетрудно убедиться в том, что функция $u = \Phi(x, y)$ — однозначная аналитическая функция, определенная в некоторой окрестности L_0, а в точках L_0 эта функция обращается в нуль. Кроме того, нетрудно показать, что для функции $\Phi(x, y)$ выполняются условия настоящей леммы. Функция $\Phi(x, y)$ была определена только в некоторой, вообще говоря, небольшой окрестности траектории L_0. Однако, в силу известных теорем о продолжении функции (см. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, Гостехиздат, 1951, Дополнение I), всегда можно указать функцию $z = F(x, y)$, определенную во всей области, в которой определена система (A), совпадающую с функцией $\Phi(x, y)$ в некоторой окрестности траектории L_0.

Функция $F(x, y)$ с указанными в лемме свойствами поможет построить измененную систему $(\tilde{A})$, обладающую нужными свойствами.

Перейдем теперь к доказательству самой теоремы, устанавливающей необходимые условия для того, чтобы замкнутая траектория могла существовать в грубой системе, т. е. была «грубой замкнутой траекторией».

Теорема III. *У грубой системы не может существовать замкнутых траекторий, для которых*

$$h = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau [P'_x(\varphi, \psi) + Q'_y(\varphi, \psi)]\, dt = 0.$$

Если для замкнутой траектории L_0 системы (A), параметрические уравнения которой

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

выполняется условие

$$h = 0,$$

то в согласии с изложенным выше либо эта замкнутая траектория является сложным k-кратным $(k > 1)$ предельным циклом (случай 1)), и тогда существует окрестность L_0, не содержащая кроме L_0 больше ни одной замкнутой траектории, либо все траектории в окрестности L_0 замкнуты. Рассмотрим сначала случай 1).

Для простоты предположим, что при выбранном на отрезке l параметре s точка пересечения этого отрезка с замкнутой траекторией L_0 соответствует значению $s = 0$. Пусть, как и выше, $\bar{s} = f(s)$ — функция последования на отрезке l и $\Psi(s) = f(s) - s$. Очевидно, $\Psi(0) = 0$; кроме того в рассматриваемом случае $\Psi'(0) = \Psi''(0) = \ldots = \Psi^{(k-1)}(0)$; $\Psi^{(k)}(0) \neq 0$ (k может быть как четным, так и нечетным). Будем для определенности предполагать, что $\Psi^{(k)}(0) > 0$ (в случае $\Psi^{(k)}(0) < 0$ рассуждение полностью аналогично).

Доказательство утверждения теоремы будет дальше проводиться следующим образом: сначала рассмотрим вспомогательную измененную систему, правые части которой не являются аналитическими функциями [1]), а затем рассмотрим сколь угодно близкую к ней систему, правые части которой уже являются аналитическими функциями.

Вспомогательная измененная система (правые части которой не являются аналитическими функциями), которую мы будем рассматри-

---

[1]) Такие системы нами раньше не рассматривались. Однако если правые части системы не являются аналитическими функциями, но имеют непрерывные частные производные, то для такой системы выполняется теорема I о существовании и единственности решения, а также теорема II Дополнения I. Заметим, что если бы функция $F(x, y)$, обладающая свойствами 1) и 2) леммы, была аналитической, то рассматриваемая ниже система (A_λ^*) также была бы аналитической, и дальнейшие рассуждения настоящей теоремы были бы значительно упрощены. Однако точное доказательство существования аналитической функции, удовлетворяющей условиям 1) и 2) леммы, значительно более сложно, чем проводимое дальше рассуждение.

вать, имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=P(x,\ y)+\lambda F(x,\ y)F'_x(x,y)=P^*(x,\ y),\\ \frac{dy}{dt}&=Q(x,\ y)+\lambda F(x,\ y)F'_y(x,y)=Q^*(x,\ y),\end{aligned}\right\}\qquad(6.17)$$

где λ — параметр, а функция $F(x,y)$ удовлетворяет условиям предыдущей леммы, так что правые части этой системы во всяком случае имеют непрерывные частные производные первого порядка (в силу того, что функция $F(x,y)$ согласно требованиям леммы имеет непрерывные частные производные до второго порядка); систему (6.17) мы будем называть «системой (A^*_λ)».

Так как по самому выбору функции $F(x,y)$

$$F[\varphi(t),\ \psi(t)]\equiv 0,$$

то, очевидно,

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$$

является решением также и системы (A^*_λ), т. е. траектория L_0 является также и траекторией системы (A^*_λ). Очевидно, при всех достаточно малых λ система (A^*_λ) будет сколь угодно близка к системе (A). Будем рассматривать лишь столь малые значения λ ($|\lambda|<\eta$, где η — надлежащим образом выбранная постоянная), при которых отрезок l остается отрезком без контакта для системы (A^*_λ). Пусть

$$\bar{s}=f^*(s,\ \lambda)$$

— функция последования, построенная для системы (A^*_λ) на отрезке l, и $\Psi^*(s,\ \lambda)=f^*(s,\ \lambda)-s$.

Функция последования $\bar{s}=f^*(s,\lambda)$ может быть найдена совершенно так же, как и в случае системы (A). При этом, в силу того, что L_0 является траекторией как системы (A), так и системы (A^*_λ), мы можем воспользоваться той же системой криволинейных координат u, v (см. § 7 гл. V), что и в случае системы (A). Пусть уравнение, аналогичное уравнению (5.56) и соответствующее системе (A^*_λ), есть $\frac{dv}{du}=g^*(u,\ v,\ \lambda)$ и решение этого уравнения, принимающее значение s при $u=0$, есть $v=\Phi^*(u,\ s,\ \lambda)$ (напомним, что мы всегда можем предполагать отрезок l отрезком на прямой $u=0$). Тогда функция последования $f^*(s,\lambda)=\Phi^*(\tau,\ s,\ \lambda)$ (τ — период движения на замкнутой траектории L_0). Так как правые части системы (A^*_λ), а следовательно, и функции $\Phi^*(\tau,\ s,\ \lambda)$ не являются аналитическими функциями, то функция $\Psi^*(s,\lambda)=f^*(s,\lambda)-s$ тоже не является аналитической и рассуждение, которое было проведено в § 7 гл. V (опиравшееся на тот факт, что функции $g^*(u,v,\lambda)$ и $\Phi^*(u,s,\lambda)$ могут быть разложены в ряд), здесь не может быть использовано. Однако нетрудно показать, что функция $g^*(u,\ v,\ \lambda)$ заведомо имеет непрерывные частные производные первого порядка. Отсюда в силу известных теорем следует, что функция $\Phi^*(u,\ s,\ \lambda)$ имеет непрерывную производную по s

и эта производная является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{du}\frac{\partial\Phi^*}{\partial s}=\frac{\partial g^*}{\partial v}\frac{\partial\Phi^*}{\partial s}.$$

Воспользовавшись этим уравнением, мы совершенно так же, как и в § 7, п. 3, гл. V, получаем:

$$f^{*\prime}(0)=e^{\int\limits_0^\tau (P_x^{*\prime}+Q_y^{*\prime})\,dt}$$

В силу теоремы V Дополнения I функция $\Psi^*(s,\lambda)$ и ее производная сколь угодно близки к функции $\Psi(s)$ и ее производной при достаточно малых λ. В силу того, что замкнутая траектория L_0 является траекторией и системы (A_λ^*), мы, очевидно, имеем:

$$\Psi^*(0,\lambda)=0.$$

Найдем выражение для $\Psi^{*\prime}(0,\lambda)$. Принимая во внимание выражения для $P^*(x,y,\lambda)$ и $Q^*(x,y,\lambda)$ и принимая во внимание, что по условию

$$h=\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau (P_x'+Q_y')\,dt=0,$$

мы будем иметь:

$$f^{*\prime}(0,\lambda)=e^{\int\limits_0^\tau (P_x^{*\prime}+Q_y^{*\prime})\,dt}=e^{\lambda\int\limits_0^\tau (F_x'^2+F_y'^2)\,dt}>0$$

и

$$\Psi^{*\prime}(0,\lambda)=e^{\lambda\int\limits_0^\tau [F_x'^2+F_y'^2]\,dt}-1.$$

Из этих выражений, очевидно, следует, что замкнутая траектория L_0 является для системы (A_λ^*) простым предельным циклом, устойчивым при $\lambda<0$ и неустойчивым при $\lambda>0$.

По условию

$$\Psi^{(k)}(0)>0.$$

Так как

$$\Psi(s)=\Psi^{(k)}(0)\,s^k+\ldots,$$

то всегда можно взять такое значение $s_1>0$ (s_1 можно взять сколь угодно малым), при котором

$$\Psi(s_1)>0.$$

Но при всех достаточно малых значениях λ функция $\Psi^*(s,\lambda)$ сколь угодно мало отличается от функции $\Psi(s)$, поэтому всегда можно взять

фиксированное значение λ^* (λ^* можно взять сколь угодно малым по абсолютной величине и любого знака), чтобы мы имели

$$\Psi^*(s_1, \lambda^*) > 0. \tag{6.18}$$

Но если взять $\lambda^* < 0$, то мы будем иметь:

$$\Psi^{*\prime}(0, \lambda^*) = e^{\lambda^* \int_0^\tau (F_x'^2 + F_y'^2)\, dt} - 1 < 0.$$

Следовательно, в этом случае всегда можно подобрать такое $s_2 > 0$ ($s_2 < s_1$), чтобы мы имели

$$\Psi^*(s_2, \lambda^*) < 0. \tag{6.19}$$

Из (6.18) и (6.19) очевидно следует, что у системы (A_λ^*) кроме L_0 существует еще одна замкнутая траектория, пересекающая отрезок l при некотором значении s, лежащем между s_1 и s_2.

Наконец, в силу того, что

$$\Psi^*(0, \lambda^*) = 0, \text{ а } \Psi^{*\prime}(0, \lambda^*) < 0,$$

всегда можно указать $s_3 < 0$ такое, чтобы $\Psi^*(s_3, \lambda^*) > 0$, т. е. $\Psi^*(s, \lambda)$ обращается в нуль еще раз на интервале $s_3 < s < s_2$, а система (A_λ^*) имеет еще одну замкнутую траекторию (кроме L_0), пересекающую отрезок l на указанном интервале.

Но при любом фиксированном λ^* всегда можно указать измененную систему $(\tilde{A})$

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{P}(x,y); \quad \frac{dy}{dt} = \tilde{Q}(x,y), \tag{6.20}$$

правые части которой — аналитические функции x и y, столь близкую к системе (A_λ^*), чтобы мы имели также

$$\tilde{\Psi}(s_3) > 0, \quad \tilde{\Psi}(s_2) < 0, \quad \tilde{\Psi}(s_1) > 0,$$

где $\tilde{\Psi}(s)$ — функция последования, аналогичная $\Psi(s)$ и построенная для системы $(\tilde{A})$. А тогда непременно существуют значения $\tilde{s}_1$ и $\tilde{s}_2$ такие, что

$$\tilde{\Psi}(\tilde{s}_2) = 0 \text{ и } \tilde{\Psi}(\tilde{s}_1) = 0,$$

т. е. у системы $(\tilde{A})$ существует не менее двух замкнутых траекторий, пересекающих отрезок без контакта l (в точках этого отрезка, соответствующих значениям $\tilde{s}_1$ и $\tilde{s}_2$). Выбирая достаточно малые по абсолютной величине значения s и λ и систему $(\tilde{A})$, достаточно близкую к системе (A_λ^*), всегда можно добиться того, чтобы эта система $(\tilde{A})$ была сколь угодно близка к системе (A) и указанные замкнутые траектории этой системы лежали бы в сколь угодно малой окрестности траектории L_0. Но отсюда, очевидно, следует, что

система (A) не может быть «грубой», и таким образом в случае I (сложного предельного цикла) утверждение теоремы доказано.

В случае II, т. е. в случае, когда все траектории замкнуты, рассматриваем ту же вспомогательную неаналитическую систему (A_λ^*). Как и выше, имеем:

$$f^{*\prime}(0, \lambda^*) = e^{\lambda^* \int_0^\tau (P_x^{*\prime} + Q_y^{*\prime})\, dt}.$$

Следовательно, функция $\Psi^*(s, \lambda)$ на рассматриваемом интервале значений s не равна нулю тождественно. Нетрудно видеть, что тогда у всякой системы $(\tilde{A})$ с аналитическими правыми частями, достаточно близкой к системе (A_λ^*), соответствующая функция $\tilde{\Psi}(s)$ тоже не будет равна нулю тождественно. А это означает, что среди траекторий системы $(\tilde{A})$, пересекающих рассматриваемую часть отрезка без контакта, существуют не только замкнутые траектории. Так как можно указать сколь угодно близкую к системе (A) систему $(\tilde{A})$, обладающую этим свойством, то, очевидно, система (A) — негрубая [1]).

В случае, когда предельный цикл L_0 системы (A) простой, т. е. для него $h \neq 0$ и, следовательно, $f'(0) \neq 1$ и $\Psi'(0) \neq 0$, этот предельный цикл является «грубым», т. е. может существовать в грубых системах. В этом случае точка пересечения R_0 кривой $\bar{s} = f(s)$ и прямой $\bar{s} = s$, соответствующая предельному циклу L_0, является простой точкой пересечения, т. е. в этой точке кривая $\bar{s} = f(s, \lambda)$ не касается прямой $\bar{s} = s$. Тогда кривая $\bar{s} = f(s, \lambda)$, соответствующая любой функции $\tilde{f}(s)$, достаточно близкой к $f(s)$, производная которой $\tilde{f}'(s)$ достаточно близка к $f'(s)$, будет иметь одну и только одну сколь угодно близкую к R_0 общую точку R с прямой $\bar{s} = s$ [2]). Отсюда, очевидно, следует, что у всякой измененной системы $(\tilde{A})$, достаточно близкой к системе (A), будет существовать один и только один предельный цикл L_0, сколь угодно близкий к рассматриваемому предельному циклу L_0 системы (A). В силу того, что $\tilde{f}'(s)$ сколь угодно мало отличается от $f'(s)$, этот предельный цикл $\tilde{L}_0$ будет устойчив, если устойчив предельный цикл L_0, и неустойчив, если неустойчив предельный цикл L_0.

На основании этого нетрудно показать, кроме того, что разбиения некоторой окрестности предельного цикла L_0 на траектории системы (A)

---

[1]) В случае, когда предельный цикл четно-кратный, а также в случае II доказательство негрубости может быть очень просто проведено, если рассмотреть систему, которая используется в теореме IV настоящей главы, т. е. систему, поле которой повернуто на постоянный угол по отношению к полю системы (A).

[2]) Нетрудно видеть, что при этом существенно требование близости не только самих функций $\tilde{f}(s)$ и $f(s)$, но и их производных $\tilde{f}'(s)$ и $f'(s)$.

и на траектории системы $(\tilde{A})$ мало сдвинуты одно по отношению к другому.

Отметим, что как в случае состояний равновесия, так и в случае предельных циклов требование грубости накладывает аналитическое условие на систему дифференциальных уравнений. Топологически у простых и сложных состояний равновесия и у простых и сложных предельных циклов разбиение окрестности на траектории может быть одинаково (например, у сложного нечетно-кратного предельного цикла и у простого предельного цикла).

4. Поведение сепаратрисы седел в грубых системах.

Перейдем теперь к рассмотрению особых траекторий еще одного типа, возможного в грубых системах, именно сепаратрис седел. Требование грубости накладывает ограничения также и на характер сепаратрис. Если сепаратриса седла O, стремящаяся к этому седлу при $t \to +\infty$, при $t \to -\infty$ также стремится к седлу (отличному от O или к тому же седлу O), то мы будем коротко говорить, что эта сепаратриса «идет из седла в седло».

Теорема IV. *В грубых системах не может быть сепаратрис, идущих из седла в седло.*

Для доказательства теоремы предположим противное, т. е. предположим, что у системы (A), являющейся грубой, существует сепаратриса, либо идущая из одного седла O в другое седло O' (см., например, рис. 299), либо возвращающаяся в то же седло (см. рис. 293).

Рассмотрим первый случай (случай, когда сепаратриса возвращается в то же самое седло, рассматривается совершенно аналогично). Обозначим через L сепаратрису системы (A), идущую из седла O в седло O'.

Рассмотрим измененную систему вида:

$$\frac{dx}{dt} = P - \alpha Q, \quad \frac{dy}{dt} = Q + \alpha P. \tag{6.21}$$

Будем называть эту систему системой $(\tilde{A}_\alpha)$. Нетрудно видеть, что система $(\tilde{A}_\alpha)$ имеет состояния равновесия в тех же точках, что и система (A) (и только в этих точках). Действительно, мы можем иметь одновременно

$$P - \alpha Q = 0; \quad Q + \alpha P = 0$$

лишь в случае, когда одновременно

$$P = 0 \quad \text{и} \quad Q = 0.$$

Тангенс угла φ между касательными в данной точке $M(x, y)$ к траектории системы (A) и к траектории системы $(\tilde{A}_\alpha)$, очевидно, будет:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\dfrac{Q + \alpha P}{P - \alpha Q} - \dfrac{Q}{P}}{1 + \dfrac{Q + \alpha P}{P - \alpha Q}\dfrac{Q}{P}} = \alpha,$$

т. е. $\operatorname{tg}\varphi$ один и тот же во всех точках области G.

Мы будем говорить, что векторное поле, заданное системой $(\tilde{A}_\alpha)$, повернуто на постоянный угол (положительный или отрицательный в зависимости от знака α) по отношению к векторному полю, заданному системой (A).

В силу сказанного выше точки O и O' являются состояниями равновесия также и системы $(\tilde{A}_\alpha)$. В силу того, что по предположению система (A) является грубой, точки O и O' должны быть седлами системы $(\tilde{A}_\alpha)$, и у системы $(\tilde{A}_\alpha)$ должна существовать сепаратриса L_α, идущая из седла O в седло O'. Всегда можно взять столь малое $\varepsilon > 0$, чтобы ε-окрестность L не содержала кроме O и O' больше ни одного состояния равновесия системы (A) и, следовательно, ни одной замкнутой траектории целиком (см. следствия I и II из теории индексов и § 8 гл. V), а также не содержала бы кроме L целиком ни одной сепаратрисы седел O и O' системы (A). При всех достаточно малых α сепаратриса L_α системы $(\tilde{A}_\alpha)$ будет целиком лежать в этой ε-окрестности L. При этом сепаратрисы L и L_α могут либо иметь, либо не иметь общих точек.

Предположим сначала, что они не имеют общих точек, и рассмотрим простую замкнутую кривую C_0, состоящую из L, L_α и седел O и O'. Эта замкнутая кривая, очевидно, целиком лежит в выбранной ε-окрестности L. Сепаратриса L_α системы $(\tilde{A}_\alpha)$, очевидно, является «дугой без контакта» для траекторий системы (A) (так как поле системы $(\tilde{A}_\alpha)$ повернуто на постоянный угол по отношению к полю системы (A)), так что все траектории системы (A) пересекают L_α в одном и том же направлении. Среди пересекающих L_α траекторий системы (A) заведомо существуют траектории, отличные от сепаратрис седел O и O'. Пусть L' — такая траектория. Очевидно, в точке ее пересечения с L_α L' либо при возрастании, либо при убывании t входит внутрь C_0. Предположим, например, что L' входит внутрь C_0 при возрастании t. При дальнейшем возрастании t она больше уже не может выйти из C_0, так как она не может пересечь L (L, так же как и L', является траекторией системы (A)) и не может пересечь L_α, выходя из C_0 (так как тогда она должна бы пересечь C_0 в противоположном направлении). Следовательно, при $t \to +\infty$ L' должна стремиться к предельному множеству, целиком лежащему в C_0 и, значит, в выбранной ε-окрестности L. Но в этой окрестности не может лежать никакое предельное множество. Действительно, по самому выбору этой окрестности в ней не лежит ни одно отличное от O и O' состояние равновесия и целиком ни одна замкнутая траектория системы (A); в ней не может также лежать и предельное множество типа III (см. п. 5 § 2 настоящей главы), так как нетрудно показать, что во всякое такое предельное множество должна непременно входить еще по крайней мере одна отличная от L сепаратриса седла O или O', а в рассматриваемой ε-окрестности L кроме L_0 не лежит целиком больше ни одна сепаратриса.

Мы приходим, таким образом, к противоречию, и следовательно, в рассматриваемом случае теорема доказана.

В случае, когда L и L_α имеют общие точки, мы рассмотрим простую замкнутую кривую C_0, состоящую из точки O и частей траекторий L и L_α между точкой O и ближайшей их общей точкой (или частей траекторий L и L_α между двумя последовательными общими точками), и, рассуждая совершенно аналогично предыдущему докажем утверждение леммы также и в этом случае.

5. Необходимые и достаточные условия грубости. Объединяя полученные результаты, можно сформулировать следующие необходимые условия грубости системы (A) в области G:

I. В области G могут быть только простые (грубые) состояния равновесия, т. е. такие, для которых действительные части корней характеристического уравнения отличны от нуля. Это требование может быть сформулировано еще и так: в области G не может быть состояний равновесия $x=x_0$, $y=y_0$:

а) для которых

$$\Delta=\begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0), & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0), & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}=0;$$

б) для которых при $\Delta>0$ $\sigma=[P'_x(x_0, y_0)+Q'_y(x_0, y_0)]=0$.

II. В области G могут быть только простые (грубые) предельные циклы, т. е. такие предельные циклы, для которых характеристический показатель не равен нулю. Это требование может быть сформулировано еще и так: в области G не может быть периодических движений $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $[\varphi(t+\tau)=\varphi(t)$, $\psi(t+\tau)=\psi(t)]$, для которых

$$h=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau (P'_x+Q'_y)\,dt=0.$$

III. В области G не может быть сепаратрис, идущих из седла в седло.

В силу этих условий в грубой системе возможны особые траектории лишь следующих типов: простые (грубые) состояния равновесия, простые (грубые) предельные циклы и сепаратрисы седел, в одну сторону стремящиеся к узлу, фокусу или к предельному циклу или, наконец, при некотором значении t достигающие граничного цикла без контакта.

Очевидно при этом, что предельными траекториями в грубых системах могут быть только состояния равновесия и предельные циклы.

Действительно, если сепаратриса седла является предельной, то, как нетрудно видеть, она должна идти из седла в седло, что в грубых системах невозможно.

Таким образом, требование грубости запрещает сложный характер особых траекторий. Сформулированные выше условия I, II и III являются необходимыми условиями грубости данной системы.

Можно показать, что эти же условия являются *достаточными* для грубости системы. Именно, имеет место следующая основная в теории грубых систем обратная теорема[1]).

Теорема V. *Если система*

$$\frac{dx}{dt}=P(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=Q(x, y)$$

имеет в области G (ограниченной циклом без контакта C):

1) *лишь такие состояния равновесия, для которых $\Delta \neq 0$ и для которых $\sigma \neq 0$, если $\Delta > 0$;*

2) *лишь предельные циклы, для которых $h \neq 0$;*

3) *лишь такие сепаратрисы, которые не идут из седла в седло, то такая система в области G является грубой.*

Не приводя доказательств этой теоремы, сделаем все же к ней небольшое пояснение.

Если динамическая система, для которой выполняются условия 1), 2) и 3), является грубой, то малые изменения ее правых частей не будут менять топологической структуры ее разбиения на траектории, а будут лишь «мало сдвигать» все это разбиение. Но при выполнении условий 1), 2), 3), т. е. при условии, что особые траектории системы (A) являются лишь простыми предельными циклами и сепаратрисами, не идущими из седла в седло (подробное перечисление возможных видов сепаратрис см. ниже), нетрудно показать, что при малых изменениях правых частей системы (A) или, иначе говоря, при переходе к измененной системе $(\tilde{A})$, особые траектории не меняют своего характера и при этом лишь мало сдвигаются. Этот факт делает утверждение теоремы совершенно наглядным геометрически. Точное доказательство теоремы состоит в фактическом построении для всякой измененной системы $(\tilde{A})$, достаточно близкой к системе (A), такого топологического отображения области G в себя, при котором траектории системы $(\tilde{A})$ отображаются в траектории системы (A) и соответствующие друг другу точки находятся на сколь угодно малом расстоянии друг от друга.

6. Классификация траекторий, возможных в грубых системах. Перейдем теперь к подробной классификации траекторий, возможных в грубых системах.

При этом для определенности предположим, что все траектории системы (A) в точках цикла без контакта, являющегося границей области G, при возрастании t входят внутрь этой области. Мы полу-

---

[1]) Мы приводим это обратное предложение непосредственно после первых трех, хотя доказательство этого предложения (которое мы не даем) частично основывается на последующем изложении.

чаем 16 различных видов траекторий (на рис. 304 эти виды траекторий изображены под соответствующими номерами). В нижеследующей таблице эти виды траекторий разбиты на пять основных типов.

Особые (орбитно-неустойчивые) траектории

I. Состояние равновесия	фокус (или узел) устойчивый	(1)
	фокус (или узел) неустойчивый	(2)
	седло	(3)
II. Предельные циклы	устойчивый	(4)
	неустойчивый	(5)
III. Сепаратриса	сворачивающаяся с неустойчивого фокуса или узла	(6)
	сворачивающаяся с неустойчивого цикла	(7)
	входящая в область G через граничный цикл без контакта	(8)
	стремящаяся к устойчивому фокусу или узлу	(9)
	стремящаяся к устойчивому предельному циклу	(10)

Неособые (орбитно-устойчивые) траектории [1])

IV. Траектория, стремящаяся к устойчивому фокусу или узлу	сворачивающаяся с неустойчивого фокуса или узла	(11)
	сворачивающаяся с неустойчивого цикла	(12)
	входящая в область G через граничный цикл без контакта	(13)
V. Траектория, стремящаяся к устойчивому циклу	сворачивающаяся с неустойчивого фокуса или узла	(14)
	сворачивающаяся с неустойчивого цикла	(15)
	входящая в область G через граничный цикл без контакта	(16)

Как мы видели в § 2 настоящей главы, область G разбивается особыми (орбитно-неустойчивыми) траекториями на элементарные ячейки, заполненные неособыми (орбитно-устойчивыми) траекториями одинакового поведения. При этом все ячейки можно разбить на два класса: на ячейки, примыкающие к циклу без контакта C, ограничивающему рассматриваемую область G, и на внутренние ячейки. Принимая во внимание перечисленные в грубых системах возможные типы траекторий, нетрудно видеть, что каждая внутренняя ячейка имеет в составе своей границы один «элемент притяжения» или «сток», являющийся либо устойчивым узлом или фокусом, либо устойчивым предельным циклом, и один «элемент отталкивания» или «источник», являющийся либо неустойчивым узлом или фокусом, либо неустойчивым предельным циклом.

---

[1]) Можно показать, что в грубых системах все неособые траектории не только орбитно-устойчивы, но устойчивы по Ляпунову и при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$. Для траекторий, стремящихся при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$) к состоянию равновесия, это устанавливается рассуждением, проведенным в § 3, п. 2, в сноске на стр. 414. Относительно траекторий, стремящихся при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$) к предельному циклу, см. § 6 гл. V.

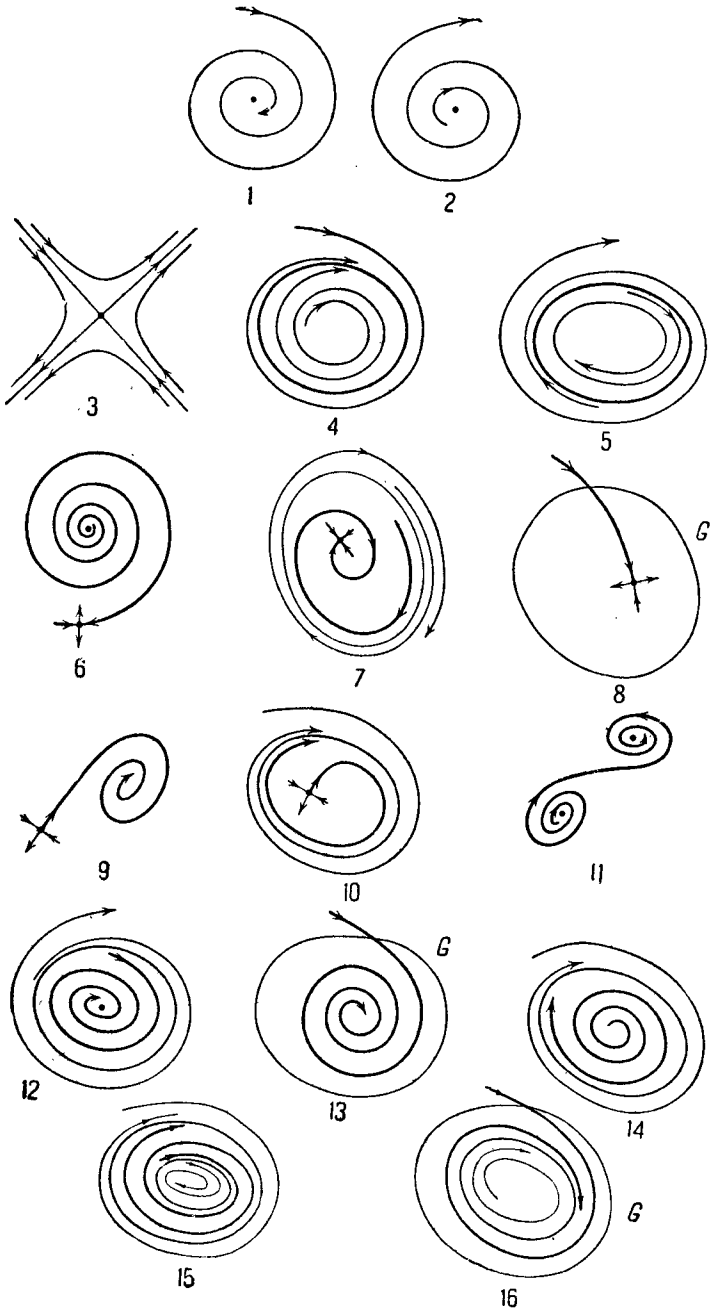

Рис. 304.

Очевидно, «элемент притяжения» или сток — это множество ω-предельных точек всякой неособой траектории данной ячейки, а элемент отталкивания или источник — множество α-предельных точек всякой неособой траектории ячейки (ср. § 3 настоящей главы, пп. 4 и 5). В каждой ячейке, примыкающей к граничному циклу, существует только один элемент притяжения — «сток». Нетрудно видеть при этом, что роль различных особых траекторий различна.

Фокусы (или узлы) служат источниками или стоками; хотя они и входят в границы ячеек, но они не играют существенной роли при разбиении фазовой плоскости на ячейки. Состояния равновесия типа седел не могут быть элементами притяжения или отталкивания; как и узлы, они входят в границу ячеек; не играя сами по себе существенной роли при разбиении фазовой плоскости на ячейки, они играют важную роль породителей сепаратрис. Сепаратрисы (усы седла) не могут служить ни источниками, ни стоками, они входят в границы ячеек и играют существенную роль при разбиении фазовой плоскости на ячейки, являясь, так сказать, «водоразделами», отделяющими друг от друга траектории различного поведения. Предельные циклы играют существенную роль при разбиении фазовой плоскости на ячейки и одновременно служат элементами притяжения (ω-предельными множествами) или отталкивания (α-предельными множествами).

Можно показать (ср. § 3 настоящей главы), что если мы знаем совокупность особых траекторий, именно, знаем взаимное расположение состояний равновесия, предельных циклов и сепаратрис и знаем направление движения по сепаратрисам и предельным циклам, а также знаем характер устойчивости элементов притяжения и отталкивания (узлов, фокусов и предельных циклов), то этих знаний нам достаточно для однозначного установления топологической структуры разбиения на траектории, т. е. для полного качественного исследования грубой динамической системы.

7. Типы ячеек, возможных в грубых системах. Выясним, какие могут быть топологические структуры разбиения на траектории отдельных ячеек в грубых системах. При этом мы будем отдельные ячейки всегда рассматривать вместе с границами. Кроме того, среди ячеек, имеющих одинаковую топологическую структуру, мы будем все же различать два типа; именно, мы будем считать ячейки принадлежащими к одному и тому же типу лишь в случае, если между ними существует топологическое отображение (переводящее траектории в траектории), *сохраняющее направление вращения*[1]).

[1]) Топологические отображения разделяются на два класса: на отображения, сохраняющие направление вращения, и отображения, меняющие направление вращения на обратное (в другой терминологии — на отображения, сохраняющие ориентацию, и на не сохраняющие ориентацию).

Простейшим примером топологического отображения, меняющего направление вращения, является зеркальное отображение. В силу сказанного в тексте, мы будем в дальнейшем две ячейки, получающиеся друг из друга зеркальным отображением, относить к различным типам.

Можно показать, что в грубых системах возможно лишь конечное число типов ячеек.

Не проводя полностью исследования возможных типов, разберем ряд простых случаев. Начнем классификацию внутренних ячеек, не примыкающих к циклу без соприкосновения; при этом мы не будем перечислять те ячейки, которые получаются из рассматриваемых путем замены t на $-t$ (при таком изменении времени меняются направления движения по «отделяющим» траекториям и устойчивость

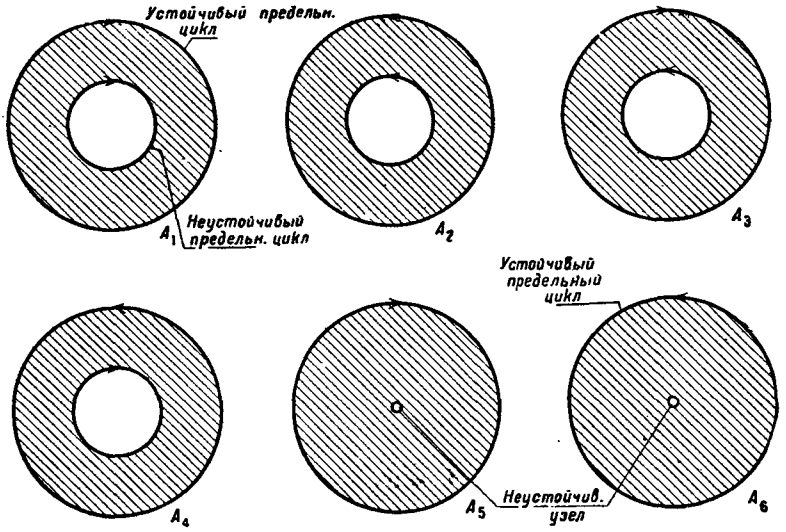

Рис. 305.

элементов притяжения и отталкивания). Возьмем какую-нибудь ячейку. Здесь могут быть следующие два случая:

1) седло не входит в границу; 2) седло входит в границу.

Рассмотрим первый случай. Если седло не входит в границу, то отсюда следует, что в границу непременно должен входить предельный цикл, так как плоскость не может разбиваться на ячейки состояниями равновесия, а особые траектории, из которых может состоять граница, суть сепаратрисы (и тогда непременно есть седло), предельные циклы и состояния равновесия. Если имеется предельный цикл, составляющий часть границы, то могут быть опять два случая:

I. Траектории рассматриваемой ячейки лежат вне (снаружи) цикла.

II. Траектории рассматриваемой ячейки лежат внутри цикла.

В первом случае (так как седла нет) должен быть еще один (внешний) предельный цикл. Так как очевидно, что в этом случае никакие другие дозволенные особые траектории не могут входить в границу, то, принимая во внимание направление вращения и устой-

чивость, мы получим в этом случае четыре различных типа областей: AIa_1, AIa_2, AIa_3, AIa_4 (рис. 305, случаи A_1, A_2, A_3, A_4). Во втором случае могут быть два варианта: либо опять внутри предельный цикл, — тогда мы опять возвращаемся к тем же типам, либо внутри фокус (или узел), — тогда имеем, учитывая направление вращения и устойчивость, два типа ячеек: $AIIb_1$ и $AIIb_2$ (рис. 305, случаи A_5, A_6).

Теперь вернемся ко второму основному случаю, когда седло входит в границу. Этот случай также придется разбить на два класса:

BI — предельный цикл не входит в границу;

BII — предельный цикл входит в границу.

Рассмотрим первый класс BI, когда предельных циклов нет, а в границу входит седло. Как известно, седло имеет четыре уса: два устойчивых и два неустойчивых. Предположим сначала (случай BIa), что в границу входят два уса одинаковой устойчивости, например два неустойчивых. Так как каждый из этих усов принадлежит границе области и не может (в силу грубости) идти в седло, то его асимптотическое поведение такое же, как у других траекторий, т. е. оба неустойчивых уса седла стремятся к устойчивому элементу, т. е. в нашем случае к устойчивому узлу (или фокусу). Мы получаем таким образом замкнутую кривую C, состоящую из седла, двух неустойчивых усов и устойчивого фокуса (или узла). Рассматриваемая нами ячейка должна лежать или вся вне этой замкнутой кривой, или вся внутри нее. Пусть она лежит вся внутри. Посмотрим, что́ еще тогда может входить в границу. Очевидно, тот устойчивый ус седла, который лежит внутри кривой C, также входит в границу. Он идет от неустойчивого элемента — неустойчивого узла (или фокуса), который, как и следовало ожидать, непременно лежит внутри кривой C. Таким образом, в границу рассматриваемой ячейки непременно входят соответственно расположенные три уса седла и три состояния равновесия. Может ли быть еще что-либо, входящее в границу? Так как мы предположили, что предельный цикл не входит в границу, поскольку граница может содержать лишь один источник и один сток, то в границу могут входить лишь седла с усами. Докажем, что этого не может быть, что граница рассматриваемой связной ячейки исчерпывается перечисленными шестью особыми элементами. Будем доказывать от противного. Предположим, что где-то внутри кривой C у нас имеется седло, входящее в границу. Но раз седло входит в границу, то есть и усы, входящие в границу.

Легко видеть, что если один из усов входит в границу, то непременно один из смежных с ним усов также входит в границу. Таким образом, должны быть один устойчивый и один неустойчивый ус, которые входят в границу. Так как эти усы непременно стремятся к тем же устойчивому и неустойчивому элементам, то наша ячейка разбивается на две части так, что кривая C уже не может входить в границу ячейки. Мы пришли к противоречию. В рассматриваемом варианте никакие другие особые элементы в границу входить не могут.

Мы еще оставили без рассмотрения другой вариант, когда рассматриваемая ячейка целиком лежит вне кривой C, которая входит в его границу. Легко показать, рассуждая совершенно аналогично предыдущему, что этот случай также приведет нас к противоречию. Таким образом, случай $B1a$ осуществляется только одним топологическим типом элементарных ячеек (см. рис. 306, случай $B1a$).

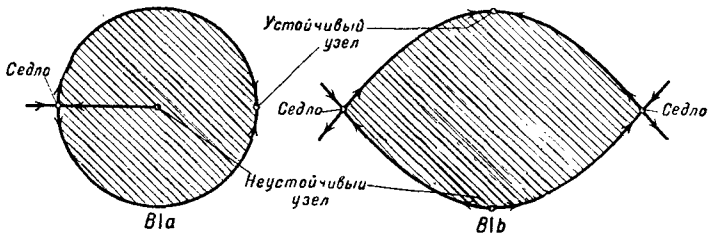

Рис. 306.

Предположим теперь (случай $B1b$), что в границу входят два рядом стоящих уса разной устойчивости: один устойчивый и один неустойчивый, а остальные два уса не входят в границу рассматриваемой ячейки. Так как усы не могут идти из седла в седло, то

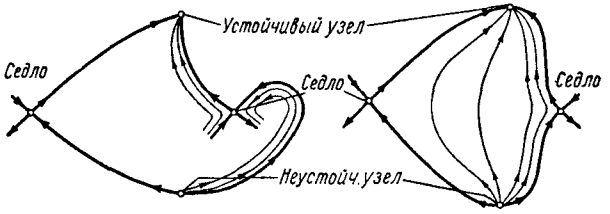

Рис. 307.

непременно устойчивый ус идет из неустойчивого узла (или фокуса), а неустойчивый ус идет в устойчивый узел (или фокус). Так как по предположению остальные усы рассматриваемого седла не входят в границу, то непременно в границу входит еще одно седло. Здесь, очевидно, возможны два случая поведения усов второго седла (рис. 307). Случай I быть не может, так как мы уже рассматривали тот вариант, когда два уса одинаковой устойчивости входят в границу ячейки, и показали, что тогда второе седло не входит в границу. Остается случай II. Здесь опять можно сделать два предположения: либо наша ячейка лежит целиком внутри замкнутой кривой C, образованной четырьмя усами и четырьмя состояниями равновесия, либо лежит целиком вне. Рассмотрим первое предположение: ячейка лежит целиком внутри кривой C. Покажем, что никакие другие особые траектории в границу рассматриваемой ячейки входить не могут. Действительно, единственные особые траектории, которые еще

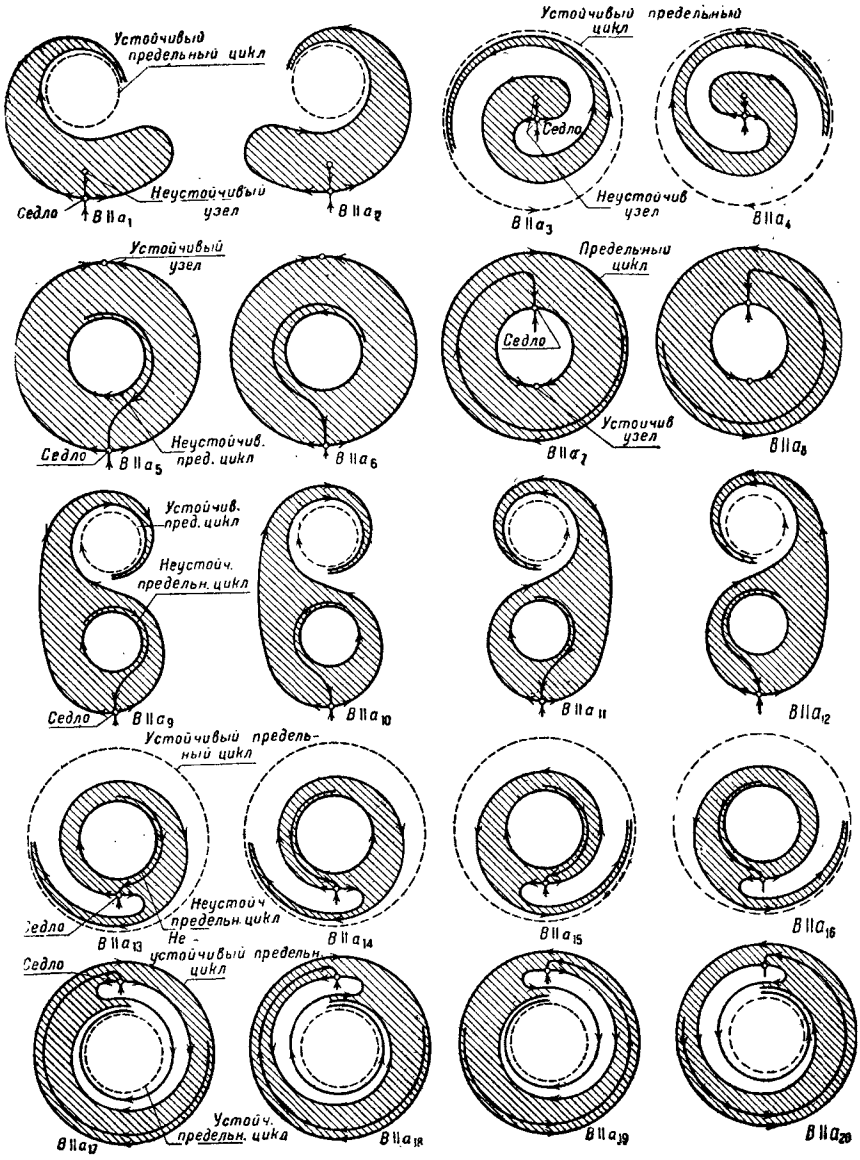
Устойчивый предельный цикл
Седло
Неустойчивый узел
B IIa1
B IIa2
Устойчивый предельный цикл
Седло
Неустойчив узел
B IIa3
B IIa4
Устойчивый узел
Седло
Неустойчив. пред. цикл
B IIa5
B IIa6
Предельный цикл
Седло
Устойчив узел
B IIa7
B IIa8
Устойчив. пред. цикл
Неустойч. предельн. цикл
Седло
B IIa9
B IIa10
B IIa11
B IIa12
Устойчивый предельный цикл
Седло
Неустойч предельн. цикл
B IIa13
B IIa14
B IIa15
B IIa16
Седло
Не - устойчивый предельн. цикл
Устойч. предельн. цикл
B IIa17
B IIa18
B IIa19
B IIa20

Рис. 308.

могут войти в границу, — это сепаратрисы и, следовательно, седла (предельные циклы не могут входить в границу по предположению; источник и сток уже имеются). Но если в границу войдет седло, то непременно войдут и два соседних уса. Эти усы обязательно пойдут в устойчивый и неустойчивый узлы (или фокусы) и разобьют нашу

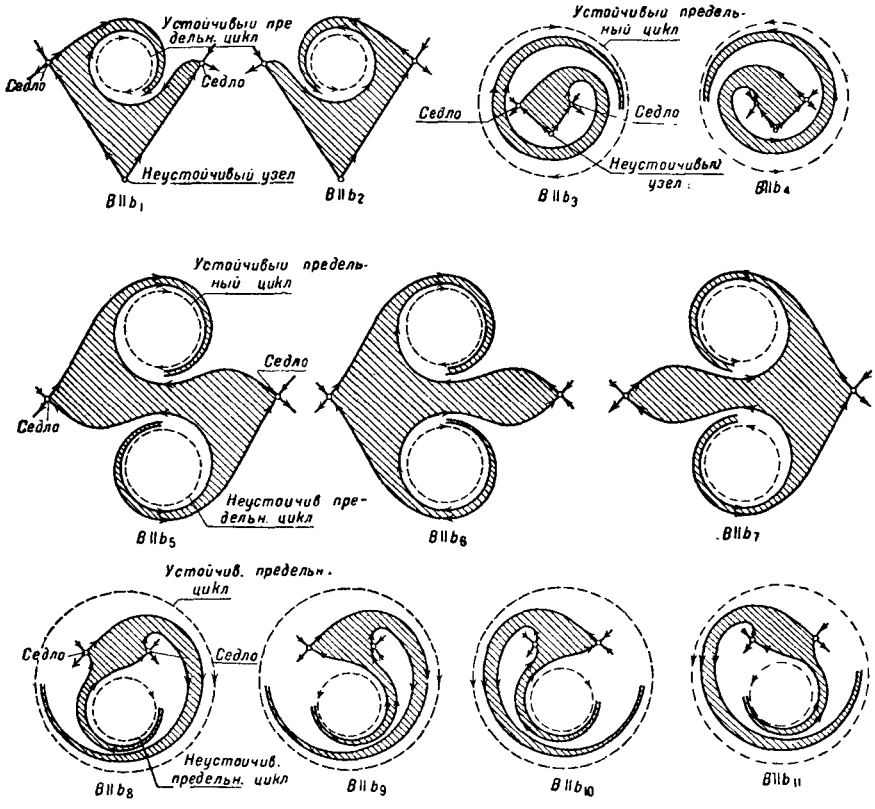

Рис. 309.

ячейку на две части таким образом, что кривая C уже не может целиком входить в границу ячейки. Мы пришли к противоречию, и следовательно, требуемое доказано. Нетрудно также опровергнуть предположение, что наша ячейка лежит целиком вне кривой C. Таким образом, случай BIb осуществляется опять только одним топологическим типом элементарных ячеек (см. рис. 306, случай BIb).

Мы не будем исследовать подробно возможные топологические типы для наиболее сложного случая BII, когда в границу ячейки входят и предельные циклы и седла. Возможные здесь случаи приведены на рис. 308 и 309. Заметим, что для случаев BII в известном

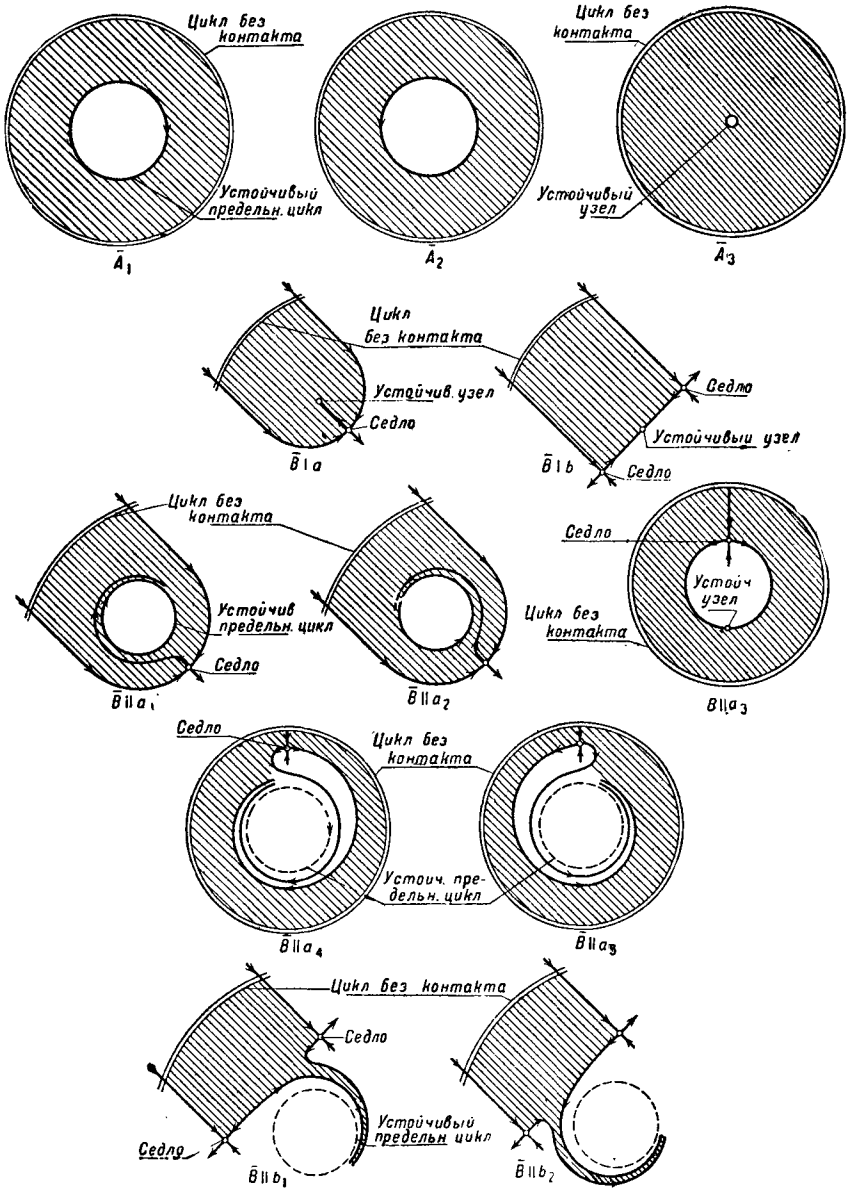
Цикл без контакта
Устойчивый предельн. цикл
$\bar{A}_1$
$\bar{A}_2$
Цикл без контакта
Устойчивый узел
$\bar{A}_3$
Цикл без контакта
Устойчив. узел
Седло
$\bar{B}$ I a
Седло
Устойчивый узел
Седло
$\bar{B}$ I b
Цикл без контакта
Устойчив предельн. цикл
Седло
$\bar{B}$ II a_1
$\bar{B}$ II a_2
Седло
Устойч узел
Цикл без контакта
B II a_3
Седло
Цикл без контакта
Устойч. предельн. цикл
B II a_4
B II a_5
Цикл без контакта
Седло
Устойчивый предельн. цикл
Седло
$\bar{B}$ II b_1
$\bar{B}$ II b_2

Рис. 310.

смысле противотипами служат случаи *BI*. Именно, случаи *BII* получаются из случаев *BI* путем соответствующей замены одного или двух узлов другими элементами притяжения или отталкивания — предельными циклами; количество различных типов при этом сильно возрастает вследствие того, что один цикл может располагаться внутри или вне другого и ввиду необходимости различать на циклах направление вращения. Также без специального рассмотрения мы оставим случаи ячеек, примыкающих к циклу без прикосновения. Случаи, которые могут здесь осуществляться, изображены на рис. 310.

После рассмотрения различных типов элементарных ячеек в грубых системах возникает вопрос о «законах совместного существования» элементарных ячеек различных типов. Мы не будем здесь касаться этого еще не решенного полностью вопроса. Поясним только одно понятие, которое имеет к этому вопросу некоторое отношение. Именно, иногда бывает удобно пользоваться понятием области *устойчивости в большом* данного элемента притяжения; под такой областью устойчивости в большом понимается тогда совокупность всех элементарных ячеек, имеющих рассматриваемый особый элемент своим элементом притяжения. Этим замечанием мы заканчиваем рассмотрение грубых систем [1]).

§ 5. Зависимость качественной картины траекторий от параметра [10—13]

Мы уже неоднократно рассматривали случай, когда в правые части дифференциальных уравнений, соответствующих рассматриваемой динамической системе, входит некоторый параметр, и занимались вопросом об изменении качественной структуры разбиения на траектории при изменении этого параметра (см. гл. II). Сейчас мы остановимся на этом вопросе подробнее и при более общих предположениях относительно рассматриваемой системы дифференциальных уравнений, чем в гл. II.

Всякая система уравнений, соответствующая реальной физической системе, содержит некоторое число параметров, границы изменения которых определяются из условий задачи. Такими параметрами могут быть, например, коэффициент взаимоиндукции, сопротивление контура и т. д. Предположим, что мы дали этим параметрам некоторые фиксированные значения. Согласно сказанному в предыдущем параграфе мы должны считать, что качественная картина траекторий на фазо-

---

[1]) Отметим еще одно простое, но весьма важное свойство грубых систем: качественная структура разбиения на траектории всякой грубой системы может быть установлена путем приближенного построения всех особых траекторий (состояний равновесия, предельных циклов и сепаратрис). Точность приближения, с которой особые траектории должны быть построены, определяется некоторой величиной — «мерой грубости» [31].