

смысле противотипами служат случаи *B1*. Именно, случаи *BII* получаются из случаев *B1* путем соответствующей замены одного или двух узлов другими элементами притяжения или отталкивания — предельными циклами; количество различных типов при этом сильно возрастает вследствие того, что один цикл может располагаться внутри или вне другого и ввиду необходимости различать на циклах направление вращения. Также без специального рассмотрения мы оставим случаи ячеек, примыкающих к циклу без прикосновения. Случаи, которые могут здесь осуществляться, изображены на рис. 310.

После рассмотрения различных типов элементарных ячеек в грубых системах возникает вопрос о «законах совместного существования» элементарных ячеек различных типов. Мы не будем здесь касаться этого еще не решенного полностью вопроса. Поясним только одно понятие, которое имеет к этому вопросу некоторое отношение. Именно, иногда бывает удобно пользоваться понятием области *устойчивости* в *большом* данного элемента притяжения; под такой областью устойчивости в большом понимается тогда совокупность всех элементарных ячеек, имеющих рассматриваемый особый элемент своим элементом притяжения. Этим замечанием мы заканчиваем рассмотрение грубых систем¹⁾.

§ 5. Зависимость качественной картины траекторий от параметра [10—13]

Мы уже неоднократно рассматривали случай, когда в правые части дифференциальных уравнений, соответствующих рассматриваемой динамической системе, входит некоторый параметр, и занимались вопросом об изменении качественной структуры разбиения на траектории при изменении этого параметра (см. гл. II). Сейчас мы остановимся на этом вопросе подробнее и при более общих предположениях относительно рассматриваемой системы дифференциальных уравнений, чем в гл. II.

Всякая система уравнений, соответствующая реальной физической системе, содержит некоторое число параметров, границы изменения которых определяются из условий задачи. Такими параметрами могут быть, например, коэффициент взаимоиндукции, сопротивление контура и т. д. Предположим, что мы дали этим параметрам некоторые фиксированные значения. Согласно сказанному в предыдущем параграфе мы должны считать, что качественная картина траекторий на фазо-

¹⁾ Отметим еще одно простое, но весьма важное свойство грубых систем: качественная структура разбиения на траектории всякой грубой системы может быть установлена путем приближенного построения всех особых траекторий (состояний равновесия, предельных циклов и сепаратрис). Точность приближения, с которой особые траектории должны быть построены, определяется некоторой величиной — «мерой грубоści» [31].

вой плоскости при данных частных значениях параметров лишь в том случае отображает реальные черты физической системы, если эта качественная картина не меняется при «малых» изменениях параметров, т. е. если при данных частных значениях параметров система является грубой¹⁾. Однако при значительных изменениях параметров характер движения физической системы, вообще говоря, может сильно меняться. Так, например, при одних значениях параметров в системе могут иметь место автоколебания, а при других автоколебания могут отсутствовать. В соответствии с этим при значительных изменениях параметров будет изменяться и качественная картина траекторий, определяемая дифференциальными уравнениями, соответствующими рассматриваемой физической системе.

Нашей задачей и будет изучение изменения качественной картины траекторий на фазовой плоскости при изменении параметров. При этом для простоты мы предположим, что правые части рассматриваемой системы дифференциальных уравнений зависят только от одного параметра λ (в случае большего числа параметров рассмотрение аналогично). Таким образом, рассматриваемая система имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y, \lambda); \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y, \lambda). \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

Мы предположим, кроме того, что правые части $P(x, y, \lambda)$ и $Q(x, y, \lambda)$ являются аналитическими функциями x и y для значений этих переменных в некоторой области G (не зависящей от λ) и аналитическими функциями λ для значений λ в области $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, где λ_1 и λ_2 — некоторые постоянные.

Основными теоремами, необходимыми для исследования изменений траекторий при изменении параметра, являются сформулированные в Дополнении I теоремы IV, V и VI. Однако, как мы уже отмечали в § 4 настоящей главы, эти теоремы отвечают лишь на вопрос о том, как при изменении параметра меняется часть траектории, соответствующая конечному промежутку времени, и непосредственно ничего не говорят о том, как будет меняться целая траектория или как будет меняться качественная картина траекторий. Вопрос о том, как может меняться качественная картина траекторий при изменении параметра, требует специального рассмотрения.

1. Бифуркационное значение параметра. Напомним введенное в § 5 гл. II определение бифуркационного значения параметра. Пусть нам дано какое-нибудь значение $\lambda = \lambda_0$ ($\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$). Если существует такое ϵ ($\epsilon > 0$), что для всех значений λ , удовле-

¹⁾ Или «релятивно грубой», т. е. грубой по отношению к данной зависимости от параметра. Однако для простоты мы будем предполагать систему просто грубой.

творяющих условию $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, топологическая структура разбиения фазовой плоскости на траектории одинакова, то мы скажем, что $\lambda = \lambda_0$ есть обыкновенное значение параметра; значение $\lambda = \lambda_0$ называется *бифуркационным* значением параметра, если найдутся сколь угодно близкие к λ_0 значения параметра λ , для которых качественная картина разбиения фазовой плоскости на траектории отлична от такой же картины, соответствующей $\lambda = \lambda_0$. Из самого определения бифуркационного значения параметра очевидно, что для такого значения система не может быть грубой.

Качественная картина разбиения фазовой плоскости на траектории, как мы знаем, определяется так называемыми особыми элементами, особыми траекториями (см. § 3 настоящей главы). Поэтому, чтобы изучить зависимость качественной картины фазовых траекторий от параметра, следует изучить зависимость от параметра системы особых элементов. В этом параграфе мы рассмотрим ряд случаев зависимости особых элементов, главным образом предельных циклов, от параметра.

Пусть при $\lambda = \lambda_0$ наша система является грубой, т. е. на фазовой плоскости существует цикл без прикосновения, определяющий собой область G , внутри которой все состояния равновесия грубые, т. е. таковы, что для них $\Delta \neq 0$, и при $\Delta > 0$, $\sigma \neq 0$ все предельные циклы имеют характеристические показатели, отличные от нуля, и сепаратрисы не идут из седла в седло. Очевидно, что в этом случае значение $\lambda = \lambda_0$ не может быть бифуркационным по самому определению грубых систем и по нашему предположению об аналитичности правых частей уравнений (6.22) как функций λ .

Действительно, нетрудно видеть, что если $\lambda = \lambda_0$ соответствует грубой системе, то мы всегда можем указать интервал (достаточно малый) значений λ вокруг $\lambda = \lambda_0$, чтобы при значениях λ из этого интервала система также была грубой, и при этом качественная картина траекторий была бы такой же, как и при $\lambda = \lambda_0$. Отсюда ясно, что не может быть «последнего грубого» (т. е. соответствующего грубой системе) значения λ , но может быть «первое негрубое».

Предположим для упрощения рассуждений, что при всех рассматриваемых изменениях параметра ($\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$) цикл без прикосновения так и остается циклом без прикосновения. Очевидно, что только те значения параметра λ могут быть бифуркационными, при которых появляются особые элементы, имеющие негрубую природу.

Укажем простейшие случаи таких негрубых образований:

- 1) сложные состояния равновесия (такие состояния равновесия могут либо появиться вновь, либо получиться от слияния простых точек, например узла и седла);
- 2) вырожденный фокус или центр;
- 3) двойной предельный цикл (такой цикл может либо появиться вновь, либо получиться от слияния устойчивого и неустойчивого циклов);

4) сепаратриса, идущая из седла в седло.

При дальнейшем изменении параметра система может опять сделяться грубой; сложная особая точка может или исчезнуть, или разбиться на простые; вырожденный фокус может, как мы увидим в дальнейшем, стать невырожденным, изменения при этом устойчивость и породив предельный цикл, и т. д.

2. Простейшие бифуркации состояний равновесия. Выскажем сначала несколько простых соображений, касающихся зависимости состояний равновесия от параметра. Во-первых, очевидно (мы уже говорили об этом в связи с так называемой σ , Δ -диаграммой), что при изменении параметра характер состояния равновесия может измениться лишь в том случае, если для соответствующего состояния равновесия либо Δ , либо σ обратится в нуль. Во-вторых, легко видеть, что при наших предположениях о $P(x, y, \lambda)$ и $Q(x, y, \lambda)$ индекс замкнутой кривой

$$j = \frac{1}{2\pi} \int_N \frac{P dQ - Q dP}{Q^2 + P^2}$$

есть непрерывная (и даже аналитическая) функция параметра λ , если только на самой кривой N не появляются состояния равновесия; отсюда следует, что при этом условии индекс не меняется при изменении параметра, так как он является целым числом.

Отсюда вытекает, что одно состояние равновесия с индексом, не равным нулю, не может ни появиться, ни исчезнуть при изменении параметра. Если мы имеем простую особую точку — узел, то она может, например, исчезнуть лишь после предварительного слияния с седлом, при котором образуется сложная особая точка с индексом, равным нулю. Обратно, седло или узел могут, например, появиться следующим образом: сначала появляется сложная особая точка с индексом, равным нулю, которая затем разделяется на две: седло и узел¹⁾.

Отметим, что мы могли бы прийти к тем же заключениям, принимая во внимание, что состояния равновесия являются общими точками кривых (изоклин).

$$P(x, y, \lambda) = 0 \quad \text{и} \quad Q(x, y, \lambda) = 0.$$

Среди сложных особых точек наиболее «простой»²⁾ является сложная

¹⁾ В некоторых случаях бывает удобно исследовать сложные особые точки путем подходящего введения параметра таким образом, чтобы для определенного значения параметра мы получили сложную особую точку, а для соседних значений параметра эта особая точка распадалась бы на ряд простых.

²⁾ Можно внести точный смысл в неопределенные слова «наиболее простая» особая точка. Именно, если рассматривать только негрубые особые точки и среди них выделить «релятивно грубые», то такой релятивно грубой особой точкой будет особая точка седло-узел.

особая точка, образующаяся от слияния седла и узла. Эта особая точка называется «седло-узел». Можно показать¹⁾, что окрестность такой особой точки имеет характер, изображенный на рис. 311. Если у рассматриваемой системы при значении $\lambda = \lambda_0$ есть особая точка «седло-узел», а при всех достаточно близких к λ_0 значениях λ у системы

нет такой точки, то, очевидно, при изменении λ от значения λ_0 особая точка седло-узел либо распадается на две: на седло и узел, либо исчезает.

3. Появление предельных циклов из сложных предельных циклов. Рассмотрим теперь те случаи, когда при переходе через бифуркационное значение параметра могут появляться или исчезать предельные циклы. В § 4 мы уже останавливались на том, как при изменении правых частей системы дифференциальных уравнений сложные предельные циклы могут разделяться на несколько циклов или исчезать.

Вернемся снова к этому вопросу в предположении, что правые части являются функциями параметра λ . Так же как и в § 4 настоящей главы, мы используем при этом функцию последования.

Предположим, что при значении $\lambda = \lambda_0$ мы имеем отрезок без контакта I и функцию последования на нем. Опираясь на теорему VI Дополнения I, о которой мы говорили в начале этого параграфа, можно высказать следующее утверждение: всегда можно указать такое $\eta > 0$, чтобы для всех значений λ внутри интервала $\lambda_0 - \eta < \lambda < \lambda_0 + \eta$ отрезок без контакта оставался отрезком без контакта²⁾ и на нем существовала бы функция последования $\bar{s} = f(s, \lambda)$ для значений s : $s_1 < s < s_2$, где s_1 и s_2 можно взять не зависящими от λ . При этом функция $f(s, \lambda)$ — аналитическая функция s и λ для значений переменных s и λ внутри указанных границ (ср. § 4 настоящей главы, п. 3).

Рассмотрим, как при изменении λ могут появляться и исчезать предельные циклы.

Рассмотрим плоскость \bar{s} , s и на ней диаграмму Ламерея, т. е. кривую $\bar{s} = f(s, \lambda)$ и прямую $\bar{s} = s$. Замкнутым траекториям (см.

¹⁾ Это требует рассмотрения, выходящего за рамки настоящей книги.

²⁾ Легко видеть, что то же самое предложение будет справедливо и в том случае, когда вместо неподвижного отрезка без контакта рассматривается «подвижный» отрезок (или дуга) без контакта и при этом функции в параметрических уравнениях этого отрезка (или дуги) являются аналитическими функциями λ .

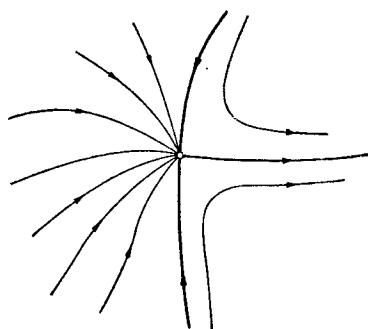


Рис. 311.

гл. V, § 7) соответствуют значения s , для которых $f(s, \lambda) - s = 0$, т. е. общие точки кривой $\bar{s} = f(s, \lambda)$ и прямой $\bar{s} = s$. Мы видели (см. гл. V, § 7), что на основании характера поведения функции $\bar{s} = f(s, \lambda)$ вблизи ее точки пересечения с прямой $\bar{s} = s$ можно сделать заключения о поведении траекторий вблизи предельного цикла.

Предположим сначала, что при $\lambda = \lambda_0$ отрезок без контакта l в точке, соответствующей $s = s_0$, пересекает грубый предельный цикл, т. е. предельный цикл, у которого $h \neq 0$ (см. § 4 настоящей главы, п. 3). Тогда на диаграмме Ламеря кривая $\bar{s} = f(s, \lambda_0)$ будет при $s = s_0$ иметь простую точку R_0 пересечения с прямой $\bar{s} = s$, т. е. общую точку, в которой касательная к кривой $\bar{s} = f(s, \lambda_0)$ не совпадает с прямой $\bar{s} = s$, так что $f'(s_0, \lambda_0) \neq 1$. Так как функция последований — аналитическая функция λ , то кривая $\bar{s} = f(s, \lambda)$ и ее касательная мало меняются при малых изменениях λ , и следовательно, при значениях λ , достаточно близких к λ_0 , кривая $\bar{s} = f(s, \lambda)$ также будет пересекать прямую $\bar{s} = s$ в точке R , близкой к R_0 , и не будет иметь других точек пересечения с прямой $\bar{s} = s$, достаточно близких к R (рис. 312).

Это означает, что при всех значениях λ , достаточно близких к λ_0 , мы будем иметь один и только один (соответствующий значениям s , достаточно близким к s_0) предельный цикл, устойчивый или неустойчивый, в зависимости от того, устойчивым или неустойчивым был предельный цикл L_0 .

Предположим, что значение $\lambda = \lambda_0$ является бифуркационным и что при этом значении λ_0 у системы (6.22) существует двойной предельный цикл (см. § 4, п. 3), пересекающий отрезок без контакта l в точке, соответствующей значению $s = s_0$, где $s_1 < s_0 < s_2$. Тогда кривая, изображающая функцию последований

$$\bar{s} = f(s, \lambda_0),$$

в точке, соответствующей значению $s = s_0$, имеет простое соприкосновение с прямой $\bar{s} = s$. При малых изменениях параметра общая точка у прямой $\bar{s} = s$ и кривой $\bar{s} = f(s, \lambda)$ может либо исчезнуть, либо разделиться на две простые точки пересечения (рис. 313). Предположим, например, что при значениях $\lambda < \lambda_0$ общая точка прямой $\bar{s} = s$ и кривой $\bar{s} = f(s, \lambda)$ исчезает, а при $\lambda > \lambda_0$ разделяется на две. Тогда при изменении параметра λ от некоторого значения $\lambda_1 < \lambda_0$ ($|\lambda_1 - \lambda_0| < \eta$) до некоторого значения $\lambda_2 > \lambda_0$ у системы сначала нет предельных циклов, пересекающих отрезок без контакта l , а затем появляется один двойной («полуустойчивый») предельный цикл, кото-

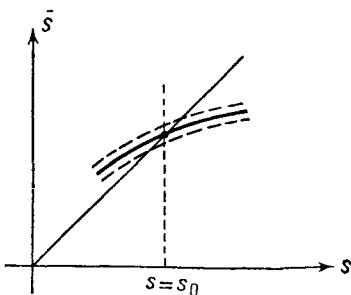


Рис. 312.

рый при дальнейшем изменении параметра разделяется на два простых предельных цикла, из которых один устойчивый, другой неустойчивый¹). Обратно, полуустойчивый цикл может получиться от слияния двух циклов, из которых один устойчивый, другой неустойчивый.

Аналогично можно было бы рассмотреть более сложный случай, именно случай k -кратного цикла ($k \geq 3$) при $\lambda = \lambda_0$ и его разделение на k простых циклов или на циклы меньшей кратности, но мы не будем на этом останавливаться. Укажем только, что высказанные

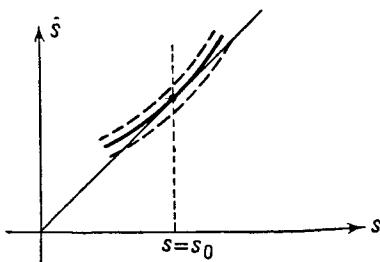


Рис. 313.

соображения могут быть также изложены в иной геометрической форме и сведены к обычной теории бифуркаций, если ввести рассмотренную выше функцию

$$\Psi(s, \lambda) = f(s, \lambda) - s.$$

Очевидно (ср. § 4), корни уравнения

$$\Psi(s, \lambda) = 0$$

при всяком данном λ соответствуют предельным циклам²).

Мы не будем подробно останавливаться на этой бифуркационной диаграмме, так как она по существу не отличается от бифуркационных диаграмм, рассмотренных ранее, и совершенно аналогичная бифуркационная диаграмма будет подробно рассмотрена для случая появления предельного цикла из состояния равновесия.

4. Появление предельных циклов из сложного фокуса. Рассмотрим теперь случай появления предельного цикла из сложного фокуса (т. е. состояния равновесия, для которого $A > 0, \sigma = 0$) или стягивание

¹⁾ Физический пример с такой бифуркацией будет рассмотрен в § 10 гл. IX (жесткое возникновение колебаний в ламповом генераторе).

²⁾ В § 4 было показано, что в случае, когда цикл k -кратный, он заведомо может быть разделен при надлежащих изменениях правой части системы не менее чем на два предельных цикла. Если при заданном λ уравнение $\Psi(s, \lambda) = 0$ обращается в тождество, то это будет означать, что все траектории, пересекающие отрезок без контакта, замкнуты. Этот исключительный случай мы сейчас не рассматриваем.

пределного цикла в такое состояние равновесия. Этого вопроса мы также уже касались в § 4. Остановимся на нем здесь еще раз в предположении, что правые части рассматриваемой системы зависят от параметра.

Предположим, что исходная система уравнений путем надлежащего преобразования приведена к каноническому виду, т. е. к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1(\lambda)x - b_1(\lambda)y + g(x, y, \lambda), \\ \frac{dy}{dt} &= b_1(\lambda)x + a_1(\lambda)y + h(x, y, \lambda), \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

так что рассматриваемое состояние равновесия лежит в начале координат. При этом $g(x, y, \lambda)$, $h(x, y, \lambda)$ — ряды, расположенные по степеням x и y , начинающиеся с членов не ниже второго порядка, а $a_1(\lambda)$ и $b_1(\lambda)$ — действительная и мнимая части корней характеристического уравнения (при этом, не нарушая общности, можно считать, что $b_1(\lambda) > 0$ при всех рассматриваемых λ). Тогда при $a_1(\lambda) < 0$ состояние равновесия O есть устойчивый фокус, а при $a_1(\lambda) > 0$ состояние равновесия O есть неустойчивый фокус; если же $a_1(\lambda) = 0$, то члены первого порядка не дают ответа на вопрос об устойчивости.

Как и в § 4, переходя к полярным координатам и заменив систему одним уравнением, получим:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= r \frac{a_1(\lambda)r + g(r \cos \theta, r \sin \theta, \lambda) \cos \theta + h(r \cos \theta, r \sin \theta, \lambda) \sin \theta}{b_1(\lambda)r + h(r \cos \theta, r \sin \theta, \lambda) \cos \theta - g(r \cos \theta, r \sin \theta, \lambda) \sin \theta} = \\ &= rR_1(\theta, \lambda) + r^2R_2(\theta, \lambda) + \dots \end{aligned} \quad (6.24)$$

Так как, по предположению, при рассматриваемых значениях λ $b_1(\lambda)$ не обращается в нуль, то ряд в правой части сходится при всех значениях θ и при всех рассматриваемых значениях λ ($\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$) для всех достаточно малых значений r , $|r| < \rho$ (ρ не зависит от θ и λ). При этом (см. § 4 настоящей главы) $R_i(\theta, \lambda)$ — периодические функции θ и, в частности, $R_1(\theta, \lambda) = \frac{a_1(\lambda)}{b_1(\lambda)}$. Как и в § 4, будем искать решение уравнения (6.24) $r = f(\theta, r_0, \lambda)$, обращающееся в r_0 при $\theta = 0$ (очевидно, имеют смысл только $r_0 \geq 0$). Это решение (ср. § 4), в силу теоремы VI Дополнения I и следствия из этой теоремы, может быть разложено в ряд по степеням r_0 , сходящийся при всех θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$, и при всех рассматриваемых значениях λ для значений r_0 , $|r_0| < \rho_0$, где ρ_0 можно взять не зависящим от λ . Таким образом,

$$r = r_0 u_1(\theta, \lambda) + r_0^2 u_2(\theta, \lambda) + \dots,$$

и $u_i(\theta, \lambda)$ вычисляются так же, как указано в § 4 настоящей главы, из рекуррентных дифференциальных уравнений вида (6.12) с той лишь разницей, что в рассматриваемом нами случае $R_i(\theta)$ зависят от λ . Рассмотрим, как и в § 4, функцию последовательности

на полуправой $\theta = 0$:

$$r = f(2\pi, r_0, \lambda) = u_1(2\pi, \lambda)r_0 + \dots,$$

где

$$u_1(2\pi, \lambda) = e^{\frac{a_1}{b_1}2\pi}.$$

Пользуясь этой функцией, мы могли бы провести геометрическое рассмотрение, аналогичное тому, которое мы провели для случая обычной функции последовательного. Однако мы воспользуемся сейчас иным геометрическим рассмотрением. Вводя функцию

$$\Psi(r_0, \lambda) = f(2\pi, \lambda) - r_0 = a_1(\lambda)r_0 + a_2(\lambda)r_0^3 + \dots$$

и рассматривая полуплоскость $r_0, \lambda, (r_0 \geq 0)$, будем строить для этого случая обычные бифуркационные диаграммы.

Посмотрим, какие здесь могут быть возможности:

1) Предположим, что для рассматриваемых значений λ $a_1(\lambda) \neq 0$, следовательно и $a_1(\lambda) \neq 0$. Тогда для рассматриваемых значений λ кривая $\Psi(r_0, \lambda) = 0$ не имеет особых точек (в смысле дифференциальной геометрии, т. е. точек, в которых одновременно $\Psi'_r = 0$ и $\Psi'_{\lambda} = 0$); знак $a_1(\lambda)$ не меняется, особая точка — фокус — сохраняет свою устойчивость и от нее не может отделиться (и к ней не может стянуться) предельный цикл.

2) Зайдем теперь случаем, о котором мы говорили выше, когда $a_1(\lambda) = \frac{\sigma}{2}$ обращается в нуль, т. е. когда среди рассматриваемых значений λ найдется такое значение $\lambda = \lambda_0$, при котором $a_1(\lambda_0) = 0$; а следовательно и $a_1(\lambda_0) = 0$ (фокус становится вырожденным). Кривая $\Psi(r_0, \lambda) = 0$ имеет тогда в точке $r_0 = 0$ особую точку (легко проверить, что $(\Psi'_r)_{\substack{r_0=0 \\ \lambda=\lambda_0}} = 0$ и $(\Psi'_{\lambda})_{\substack{r_0=0 \\ \lambda=\lambda_0}} = 0$).

Прежде чем исследовать характер бифуркационной диаграммы вокруг точки $r_0 = 0, \lambda = \lambda_0$, напомним (см. § 4), что если $a_1(\lambda_0) = 0$, то непременно обращается в нуль и $a_2(\lambda_0)$. И вообще, если $a_1(\lambda_0) = \dots = a_{2n-1}(\lambda_0) = 0$, то непременно и $a_{2n}(\lambda_0) = 0$.

Рассмотрим функцию $\Psi(r_0, \lambda) = 0$. Для исследования особой точки $r_0 = 0, \lambda = \lambda_0$ найдем выражения для вторых производных $\Psi(r_0, \lambda)$ при значении $r_0 = 0, \lambda = \lambda_0$. Получим:

$$(\Psi''_{r_0}{}_{\substack{r_0=0 \\ \lambda=\lambda_0}} = a_2(\lambda_0) = 0; \quad (\Psi''_{\lambda\lambda})_{\substack{r_0=0 \\ \lambda=\lambda_0}} = 0;$$

$$(\Psi''_{r_0\lambda})_{\substack{r_0=0 \\ \lambda=\lambda_0}} = \left(\frac{d a_1(\lambda)}{d \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} = 2\pi \frac{a'_1(\lambda_0)}{b_1(\lambda_0)}.$$

Рассмотрим подробнее случай, когда

$$(\Psi''_{r_0\lambda})_{\substack{r_0=0 \\ \lambda=\lambda_0}} = \left(\frac{d a_1(\lambda)}{d \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} \neq 0;$$

тогда

$$(\Psi''_{r_0 r_0})_{\lambda=\lambda_0} \Big|_{r_0=0} (\Psi''_{\lambda \lambda})_{\lambda=\lambda_0} \Big|_{r_0=0} - (\Psi''_{r_0 \lambda})_{\lambda=\lambda_0} \Big|_{r_0=0}^2 < 0$$

и точка $r_0 = 0, \lambda = \lambda_0$ будет простой двукратной точкой (узлом) для кривой $\Psi(r_0, \lambda) = 0$.

В этом случае при изменении λ от значений, меньших λ_0 , до значений, больших λ_0 , $\alpha_1(\lambda)$ и $\alpha_3(\lambda)$ меняют знак, и рассматриваемый фокус меняет устойчивость.

Проще всего исследовать характер точки $r_0 = 0, \lambda = \lambda_0$, если воспользоваться тем, что кривая $\Psi(r_0, \lambda) = 0$ распадается на прямую $r_0 = 0$ и кривую $\varphi(r_0, \lambda) = \alpha_1(\lambda) + \alpha_2(\lambda)r_0 + \dots = 0$.

Для того, чтобы выяснить, как расположена кривая $\varphi(r_0, \lambda) = 0$ вблизи точки $r_0 = 0, \lambda = \lambda_0$, вычислим значения $\frac{d\lambda}{dr_0}$ и $\frac{d^2\lambda}{dr_0^2}$ в этой точке. Получим:

$$\left(\frac{d\lambda}{dr_0} \right)_{\lambda=\lambda_0} \Big|_{r_0=0} = - \frac{\alpha_2(\lambda_0)}{\left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0}} = 0,$$

т. е. кривая $\varphi(r_0, \lambda) = 0$ имеет в точке $r_0 = 0, \lambda = \lambda_0$ вертикальную касательную:

$$\left(\frac{d^2\lambda}{dr_0^2} \right)_{\lambda=\lambda_0} \Big|_{r_0=0} = - \frac{2\alpha_3(\lambda_0)}{\left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0}}.$$

Предположим, что $\alpha_3(\lambda_0) \neq 0$. Тогда кривая $\varphi(r_0, \lambda) = 0$ вблизи точки $r_0 = 0, \lambda = \lambda_0$ расположена целиком по одну сторону от касательной.

Нетрудно видеть, что здесь могут быть четыре возможности в зависимости от знака $\alpha'_1(\lambda_0)$ и знака $\alpha_3(\lambda_0)$ (согласно сказанному выше $b_1(\lambda)$ не обращается в нуль, и мы будем считать, что $b_1(\lambda) > 0$). Приведем бифуркационные диаграммы, соответствующие этим случаям, где, как обычно, заштрихованные области соответствуют $\Psi(r_0, \lambda) > 0$.

а) $\alpha'_1(\lambda_0) > 0, \alpha_3(\lambda_0) < 0$;

тогда

$$\left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} > 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{d^2\lambda}{dr_0^2} \right)_{\lambda=\lambda_0} \Big|_{r_0=0} > 0.$$

Бифуркационная диаграмма представлена на рис. 314. В этом случае при возрастании λ фокус из устойчивого делается неустойчивым, и при этом появляется устойчивый предельный цикл (и только один).

б) $\alpha'_1(\lambda_0) > 0$, $\alpha_3(\lambda_0) > 0$;
тогда

$$\left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} > 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{d^2\lambda}{dr_0^2} \right)_{\lambda=\lambda_0} < 0.$$

Бифуркационная диаграмма имеет вид, представленный на рис. 315. При возрастании λ фокус из устойчивого делается неустойчивым, при

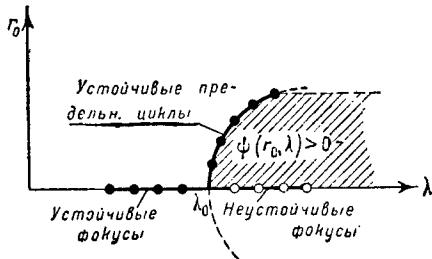


Рис. 314.

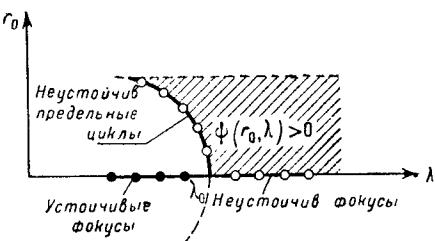


Рис. 315.

этом неустойчивый предельный цикл (только один) стягивается в фокус.

в) $\alpha'_1(\lambda_0) < 0$, $\alpha_3(\lambda_0) > 0$;

$$\left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} < 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{d^2\lambda}{dr_0^2} \right)_{\lambda=\lambda_0} > 0.$$

В этом случае неустойчивый фокус при возрастании λ делается

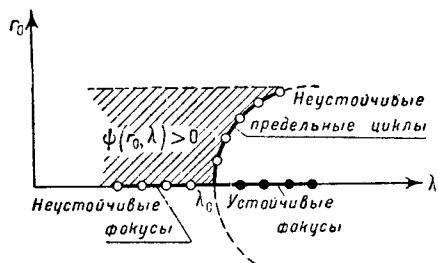


Рис. 316.



Рис. 317.

устойчивым, и появляется неустойчивый предельный цикл (рис. 316).

г) $\alpha'_1(\lambda_0) < 0$, $\alpha_3(\lambda_0) < 0$;

$$\left[\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda} \right]_{\lambda=\lambda_0} < 0 \quad \text{и} \quad \left[\frac{d^2\lambda}{dr_0^2} \right]_{\lambda=\lambda_0} < 0.$$

При возрастании λ неустойчивый фокус делается устойчивым. Устойчивый предельный цикл стягивается в фокус (рис. 317).

Такие же результаты мы получили бы, если бы $a_3(\lambda_0) = 0$ и первый не равный нулю коэффициент был бы $a_{3k+1}(\lambda_0)$, где $k > 1$. И в этом случае всегда появляется (или исчезает) один и только один предельный цикл. Случай $a'_1(\lambda_0) = 0$ мы рассматривать не будем. В этом случае, вообще говоря, при изменении λ могут появиться два, три и т. д. предельных цикла.

Прежде чем перейти к рассмотрению физического примера, заметим следующее. Как мы видели, в простейшем случае (практически наиболее интересном) для решения вопроса нам достаточно знать величины $a_k(\lambda)$ только для $\lambda = \lambda_0$. Поэтому для упрощения вычислений следует писать уравнение (6.24) только для $\lambda = \lambda_0$:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{b_1(\lambda_0)} [(P_2)_0 \cos \theta + (Q_2)_0 \sin \theta] \left\{ 1 + \frac{(P_2)_0 \sin \theta - (Q_2)_0 \cos \theta}{b_1(\lambda_0) r} + \right. \\ \left. + \left(\frac{(P_2)_0 \sin \theta - (Q_2)_0 \cos \theta}{b_1(\lambda_0) r} \right)^2 + \dots \right\}, \quad (6.25)$$

где через $(P_2)_0$ и $(Q_2)_0$ обозначены $P_2(r \cos \theta, r \sin \theta, \lambda)$ и $Q_2(r \cos \theta, r \sin \theta, \lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$, или

$$\frac{dr}{d\theta} = R_2(\theta, \lambda_0) r^2 + R_3(\theta, \lambda_0) r^3 + \dots,$$

так как $R_1(\lambda_0, \theta) = 0$. Решение этого упрощенного уравнения опять ищем в виде ряда:

$$r = r_0 u_1 + r_0^2 u_2 + r_0^3 u_3 + \dots,$$

причем $u_1 = 1$, а для остальных $u_k(\theta, \lambda_0)$ получаем уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_2}{d\theta} &= R_2(\theta, \lambda_0); \\ \frac{du_3}{d\theta} &= 2u_2 R_2(\theta, \lambda_0) + R_3(\theta, \lambda_0); \\ \frac{du_4}{d\theta} &= (u_2^2 + 2u_3) R_2(\theta, \lambda_0) + 3u_2 R_3(\theta, \lambda_0) + R_4(\theta, \lambda_0); \\ \frac{du_5}{d\theta} &= (2u_4 + 2u_2 u_3) R_2(\theta, \lambda_0) + (3u_2^2 + 3u_3) R_3(\theta, \lambda_0) + \\ &\quad + 4u_2 R_4(\theta, \lambda_0) + R_5(\theta, \lambda_0) \\ &\quad \dots \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

с начальными условиями $u_k(0, \lambda_0) = 0$ ($k = 2, 3, \dots$).

Отсюда можно найти $a_3(\lambda_0)$, а если $a_3(\lambda_0) = 0$, то $a_5(\lambda_0)$ и т. д. Что же касается выражения для $a'_1(\lambda_0)$, которое также необходимо для решения вопроса о стягивании или рождении цикла, то $a_1(\lambda)$ и $b_1(\lambda)$, нужные для его вычисления, могут быть найдены из обычного уравнения, определяющего характеристические корни.

5. Физический пример. Рассмотрим для иллюстрации сказанного так называемое мягкое возбуждение автоколебаний в ламповом генераторе. Уравнение лампового генератора с колебательным контуром в цепи сетки при обычных идеализациях и при аппроксимации характеристики лампы полиномом третьей степени

$$i_a = i_{a0} + S_0 u + S_1 u^2 - S_2 u^3,$$

где i_a — анодный ток, u — переменная составляющая напряжения на сетке лампы, а коэффициенты i_{a0} , S_0 и S_2 положительны, имеет следующий вид (см., например, гл. IX):

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + u = (MS_0 - RC + 2MS_1 u - 3MS_2 u^2) \frac{du}{dt}.$$

Если ввести безразмерные переменные $\tau = \omega_0 t$ (где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$), $y = \frac{u}{u_0}$ (u_0 — некоторый масштаб напряжений) и $x = \frac{dy}{d\tau}$, то уравнение колебаний лампового генератора запишется в виде следующей системы двух дифференциальных уравнений первого порядка¹⁾:

$$\frac{dx}{d\tau} = -y + (\alpha + \beta y - \gamma y^2) x, \quad \frac{dy}{d\tau} = x, \quad (6.27)$$

где

$$\alpha = \omega_0 (MS_0 - RC), \quad \beta = 2\omega_0 MS_1 u_0,$$

$$\gamma = 3\omega_0 MS_2 u_0^2 \quad (\gamma > 0).$$

Будем рассматривать состояние равновесия $x = 0$, $y = 0$ и будем исследовать возможное рождение цикла из этого состояния равновесия при изменении коэффициента взаимоиндукции обратной связи M . Характеристическое уравнение для этого состояния равновесия имеет вид:

$$y^2 + \alpha y + 1 = 0,$$

откуда

$$a_1(M) = \frac{\alpha}{2} = \frac{\omega_0}{2} (MS_0 - RC),$$

$$b_1(M) = + \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}} = \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{4} (MS_0 - RC)^2}.$$

Бифуркационное значение параметра M равно

$$M_0 = \frac{RC}{S_0},$$

¹⁾ Несколько необычное обозначение координат на фазовой плоскости выбрано для того, чтобы система (6.27) при $\alpha = 0$ прямо переходила в систему вида (6.23) с $a_1 = 0$ и $b_1 = 1 > 0$.

откуда

$$a'_1(M_0) = \frac{\omega_0 S_0}{2}.$$

Перейдем теперь к вычислению $\alpha_3(M_0)$. На основании (6.25) и (6.27) имеем¹⁾:

$$R_2(\theta, M_0) = \beta_0 \cos^2 \theta \sin \theta,$$

$$R_3(\theta, M_0) = -\gamma_0 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2\beta_0 \cos^3 \theta \sin^3 \theta,$$

откуда по формулам (6.26) находим:

$$u_2(\theta, M_0) = \frac{1}{3} \beta_0 (1 - \cos^3 \theta),$$

$$u_3(2\pi, M_0) = \alpha_3(M_0) = -\frac{1}{8} \gamma_0 2\pi = -\frac{3\pi\omega_0}{4} RC \frac{S_2}{S_0}.$$

Так как по предположению $S_0 > 0$, $S_2 > 0$, то $a'_1(M_0) > 0$, $\alpha_3(M_0) < 0$; мы имеем по нашей классификации первый случай — случай а): при возрастании M фокус из устойчивого делается неустойчивым и при этом появляется устойчивый предельный цикл. Отсюда следует, что при $M > M_0$, но достаточно близких к M_0 в системе наверное возможен устойчивый автоколебательный процесс. Заметим, что если бы было $S_2 < 0$, то мы имели бы второй случай — случай б), когда при возрастании M фокус из устойчивого делается неустойчивым и при этом неустойчивый цикл стягивается в точку.

Сделаем еще два замечания: 1) если бы мы учили дальнейшие члены в разложении характеристики, пропорциональные u^4 , u^5 , u^6 и т. д., то, как легко видеть из уравнений (6.26), эти члены никак не повлияли бы на решение вопроса о рождении или исчезновении цикла, если $S_2 \neq 0$; 2) все наши выводы сделаны без всяких предположений о малости величин α , β , γ . Аналогичное рассмотрение возникновения автоколебаний в ламповом генераторе при увеличении обратной связи, гораздо более далеко идущее (изменения циклов будут прослежены не только в непосредственной близости к особой точке), будет сделано в гл. IX; однако при этом придется предъявить определенные требования малости к коэффициентам характеристики лампы, к сопротивлению и т. д.

6. Появление предельных циклов из сепаратрисы, идущей из седла в седло, и из сепаратрисы состояния равновесия седло-узел при его исчезновении. Скажем несколько слов еще о двух простейших случаях рождения предельного цикла (и соответственно исчезновения предельных циклов), именно, о рождении предельного цикла при исчезновении сложной особой точки и о рождении

¹⁾ $\beta_0 = (\beta)_{M=M_0}$, $\gamma_0 = (\gamma)_{M=M_0}$.

пределного цикла от сепаратрисы. Эти случаи представляют очень большой интерес как с точки зрения теории дифференциальных уравнений, так и с точки зрения физики.

Предположим, что при некотором значении параметра из рассматриваемого промежутка λ система дифференциальных уравнений имеет

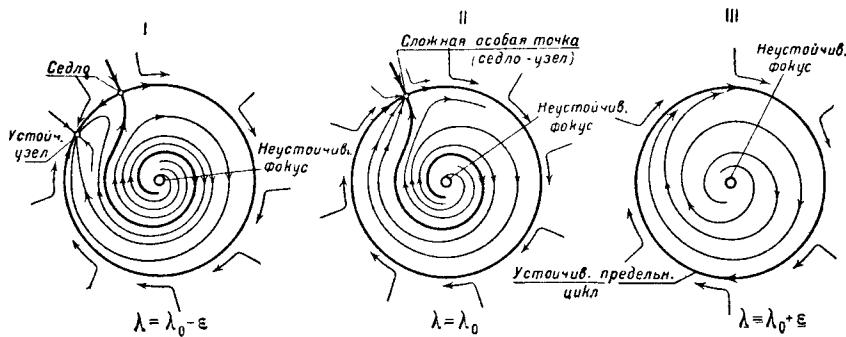


Рис. 318.

седло и две выходящие из этого седла сепаратрисы стремятся к одному и тому же узлу (рис. 318, I). Пусть кроме этого при увеличении λ седло и узел сближаются и, наконец, при некотором значении $\lambda = \lambda_0$

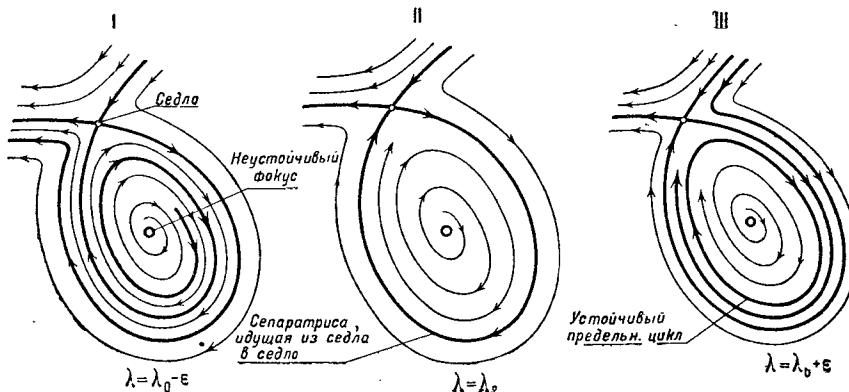


Рис. 319.

сливаются в одну сложную особую точку седло-узел (рис. 318, II). Тогда одна из сепаратрис этого седла-узла (обозначим ее через L_0), выходящая из седла-узла, будет вновь входить в него (при $t \rightarrow +\infty$) (рис. 318, II). Если при дальнейшем увеличении λ сложная особая точка седло-узел исчезает, то непременно появляется предельный цикл, лежащий при значениях λ , достаточно близких к λ_0 в сколь

угодно малой окрестности сепаратрисы L_0 (рис. 318, III)¹⁾. Очевидно также, что предельный цикл может исчезнуть, если с увеличением (или уменьшением) параметра λ , при некотором значении λ_0 на нем появляется сложная особая точка седло-узел, которая затем разделится на две.

Рассмотрим теперь случай рождения цикла от сепаратрисы седла. Предположим, что сепаратрисы седла при некотором значении λ из рассматриваемого промежутка имеют расположение, представленное на рис. 319, I, а при увеличении (или уменьшении) λ сближаются и, наконец, при некотором значении $\lambda = \lambda_0$ сливаются и образуют «петлю сепаратрисы» (т. е. при $\lambda = \lambda_0$ существует сепаратриса седла O , выходящая из этого седла и вновь возвращающаяся в него) (рис. 319, II). Если при дальнейшем увеличении (или уменьшении) параметра λ сепаратрисы седла вновь разделяются так, как показано на рис. 319, III, то при этом от петли сепаратрисы отделяется («рождается») хотя бы один предельный цикл²⁾. Очевидно, что обратно предельный цикл может исчезнуть, предварительно слившись с петлей сепаратрисы. В обоих рассмотренных случаях рис. 319, II соответствует бифуркационному значению параметра.

¹⁾ Обозначим через x_0, y_0 координаты особой точки седло-узел, существующей по предположению при $\lambda = \lambda_0$, и составим выражение

$$\sigma_0 = P'_x(x_0, y_0, \lambda_0) + Q'_y(x_0, y_0, \lambda_0).$$

Нетрудно показать, что для особой точки седло-узел $\sigma_0 \neq 0$. Можно показать, что в случае, когда $\sigma_0 < 0$, предельный цикл, появляющийся при исчезновении особой точки седло-узел, устойчив, а в случае, когда $\sigma_0 > 0$, неустойчив.

²⁾ Обозначим при $\lambda = \lambda_0$ через x_0, y_0 координаты седла и рассмотрим выражение

$$\sigma_0 = P'_x(x_0, y_0, \lambda_0) + Q'_y(x_0, y_0, \lambda_0).$$

Это выражение может быть как не равным, так и равным нулю. Можно показать, что в случае, когда $\sigma_0 < 0$, «петля сепаратрисы» устойчива (т. е. все траектории, проходящие через достаточно близкие к петле точки, лежащие внутри петли, при $t \rightarrow +\infty$ стремятся к этой петле), а в случае, когда $\sigma_0 > 0$, петля неустойчива. В случае, когда $\sigma_0 = 0$, вопрос о характере устойчивости петли не решается величиной σ_0 .

Можно также показать, что когда $\sigma_0 \neq 0$, из петли сепаратрисы рождается единственный предельный цикл, причем этот предельный цикл устойчив, если $\sigma_0 < 0$, и неустойчив, если $\sigma_0 > 0$.