ГЛАВА VII

СИСТЕМЫ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФАЗОВОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ[1])

§ 1. Цилиндрическая фазовая поверхность

Отображая поведение динамической системы в фазовом пространстве, мы требуем *взаимно-однозначного и непрерывного соответствия* между состояниями системы и точками фазового пространства. Значит, каждому состоянию системы должна соответствовать одна и только одна точка фазового пространства, и наоборот, каждой точке фазового пространства должно соответствовать одно и только одно состояние системы, причем близким состояниям системы должны соответствовать близкие точки фазового пространства. Это требование устанавливает известную связь между характером физической системы и основными чертами того геометрического образа, который может служить для данной системы фазовым пространством. До сих пор мы рассматривали физические системы (с одной степенью свободы), для которых фазовым пространством может служить плоскость. Однако, как мы видели в гл. II и III, существуют такие системы, для которых плоскость не может служить фазовым пространством, так как при этом не соблюдается требование взаимной однозначности.

Примером такой системы может служить обычный физический маятник. Действительно, состояние маятника определяется углом его отклонения от положения равновесия и скоростью; но при изменении угла отклонения на 2π получается совершенно такое же состояние маятника, физически никак не отличимое от исходного. Поэтому на фазовой плоскости мы получим бесконечное число точек, соответствующих одному и тому же физическому состоянию системы (все точки, отстоящие друг от друга на $2k\pi$ по оси абсцисс). Следовательно, строго говоря, плоскость не пригодна в качестве фазовой поверхности для обычного физического маятника, так как при этом не удается соблюсти условия взаимной однозначности и непрерывности соответствия точек плоскости и состояний маятника. Правда, использование плоскости в качестве фазовой поверхности вряд ли может послужить причиной недоразумений, особенно до тех пор,

---

[1]) Глава переработана Н. А. Железцовым. §§ 1 и 4 написаны им заново.

пока мы ограничиваемся рассмотрением движений, не выходящих за пределы одного полного оборота. Но если мы рассматриваем движения, выходящие за пределы 2π, то для соблюдения требования взаимной однозначности и непрерывности мы должны отображать движения маятника на *фазовом круговом цилиндре*[1]). Это обстоятельство, очевидно, связано с существованием двух, качественно различных типов периодических движений маятника (колебаний около состояния равновесия и движений маятника с проворотом вокруг оси).

Аналогичная картина имеет место и для всех механических (или электромеханических) систем, положение которых вполне определяется *углом*. Так как такие системы встречаются довольно часто, то применение цилиндрической фазовой поверхности представляет большой интерес.

В настоящей главе мы рассмотрим несколько физических систем, поведение которых следует отображать на фазовом круговом цилиндре, а также покажем, как нужно применять в этом случае общие методы построения и исследования фазового портрета динамической системы.

Для того чтобы построить фазовый портрет исследуемой динамической системы, общий вид уравнения которой может быть записан в виде двух уравнений первого порядка:

$$\frac{d\vartheta}{dt}=\Phi(\vartheta,\ z),\qquad \frac{dz}{dt}=F(\vartheta,\ z), \tag{7.1}$$

где ϑ и z — координаты цилиндрической фазовой поверхности, мы, так же как и в случае фазовой плоскости, должны изучить основные элементы фазового портрета: особые точки, сепаратрисы и предельные циклы, соответствующие периодическим движениям. Но на фазовом цилиндре помимо «обычных» предельных циклов, лежащих на поверхности цилиндра и охватывающих состояния равновесия, но не охватывающих самого цилиндра (такие кривые вполне аналогичны замкнутым траекториям на фазовой плоскости), может встретиться совершенно новый тип предельных циклов, охватывающих не состояния равновесия, а самый цилиндр. Очевидно, что и эти замкнутые траектории соответствуют периодическим движениям. Для построения фазового портрета на цилиндре мы должны знать также и эти замкнутые траектории, охватывающие цилиндр. Но особенно нас должны

---

[1]) По направляющей цилиндра будем откладывать угол ϑ, определяющий положение маятника, а по образующей, например, угловую скорость $z=\dot{\vartheta}$. Часто представляется удобным вместо цилиндра брать (для изображения фазовых траекторий) его развертку на плоскость ϑ, z, как мы это уже делали в § 4 и 5 гл. II. При этом, однако, следует отождествлять точки пограничных прямых развертки, соответствующих одной и той же линии разреза цилиндра (например, точки прямых $\vartheta=+\pi$ и $\vartheta=-\pi$), т. е. считать их соответствующими одним и тем же состояниям системы (отождествлять следует точки с одинаковыми z).

интересовать эти замкнутые траектории потому, что им соответствуют периодические движения и периодические решения уравнения интегральных кривых

$$\frac{dz}{d\vartheta}=\frac{F(\vartheta, z)}{\Phi(\vartheta, z)}. \tag{7.2}$$

Поскольку эти решения периодические с периодом 2π, то они удовлетворяют условию $z(\vartheta+2\pi)=z(\vartheta)$ при любом ϑ [1]). Для того чтобы обнаружить наличие таких периодических решений, можно, например, воспользоваться следующим приемом. Если существуют два частных решения уравнения (7.2) $z_1(\vartheta)$ и $z_2(\vartheta)$, для которых при некотором ϑ_0

$$z_1(\vartheta_0+2\pi)\geqslant z_1(\vartheta_0), \quad z_2(\vartheta_0+2\pi)\leqslant z_2(\vartheta_0),$$

и если между интегральными кривыми, соответствующими этим решениям, нет особых точек, то в силу непрерывной зависимости решений от начальных условий можно утверждать, что между $z_1(\vartheta)$ и $z_2(\vartheta)$ существует периодическое решение, для которого

$$z(\vartheta_0+2\pi)=z(\vartheta_0)$$

и, следовательно,

$$z(\vartheta+2\pi)\equiv z(\vartheta)\ ^{2)}$$

(в общем случае, конечно, нельзя утверждать, что это периодическое решение единственно).

Отыскание самих предельных циклов, охватывающих цилиндр, определение их числа и устойчивости могут быть проведены путем построения точечного преобразования какой-либо образующей цилиндра $\vartheta=\vartheta_0$ самой в себя. Если через точки некоторого отрезка (L) образующей $\vartheta=\vartheta_0$ проходят фазовые траектории, охватывающие цилиндр (рис. 320), то эти точки имеют последующие на том же отрезке, и мы можем построить функцию последования

$$z'=f(z)$$

---

[1]) Мы считаем, что ϑ и z суть непрерывные функции времени t; тогда угловая координата ϑ при обходе изображающей точки вокруг цилиндра будет изменяться (возрастать или убывать в зависимости от направления обхода) на 2π; следовательно, каждой точке фазового цилиндра мы сопоставляем не одно, а счетное множество значений угловой координаты, отличающихся друг от друга на 2π. Таким образом, сохраняя непрерывность зависимости ϑ от времени t, мы вынуждены отказаться от однозначности соответствия точек фазового цилиндра и их координат.

Очевидно, функции $\Phi(\vartheta, z)$ и $F(\vartheta, z)$ — правые части уравнений движения системы (7.1) — обязательно должны быть периодически функциями угла ϑ с периодом 2π.

[2]) Мы, конечно, предполагаем, что условия теоремы Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения для системы уравнений (7.1) выполнены.

для интересующего нас точечного преобразования[1]). Неподвижные точки этого точечного преобразования z^*, т. е. точки, определяемые уравнением

$$z = f(z),$$

являются точками пересечения замкнутых фазовых траекторий (предельных циклов), охватывающих цилиндр, с образующей цилиндра $\vartheta = \vartheta_0$. Согласно теореме Кенигса предельный цикл устойчив, если

$$|f'(z^*)| < 1,$$

и неустойчив, если

$$|f'(z^*)| > 1.$$

Если известно само решение, соответствующее предельному циклу, охватывающему цилиндр, $\vartheta = \vartheta(t)$, $z = z(t)$, то устойчивость этого предельного цикла может быть определена путем вычисления его характеристического показателя

$$h = \frac{1}{T}\int_0^T \{\Phi'_\vartheta[\vartheta(t),\ z(t)] + F'_z[\vartheta(t),\ z(t)]\}\,dt,$$

где T — период периодического движения[2]). Именно, предельный цикл устойчив при $h < 0$ и неустойчив при $h > 0$ (доказательство этого утверждения полностью совпадает с приведенным в § 8 гл. V).

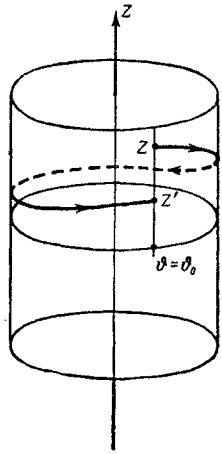

Рис. 320.

При исследовании фазового портрета динамических систем с цилиндрической фазовой поверхностью известную помощь могут оказать критерии Бендиксона и Дюлака, изложенные ранее (в §§ 9 и 11 гл. V) для случая фазовой плоскости. Нетрудно видеть, что *если условия критерия Бендиксона или критерия Дюлака выполнены в некоторой области, заключенной между двумя замкнутыми кривыми, охватывающими фазовый цилиндр, то в этой области не существует замкнутых фазовых траекторий, не охватывающих цилиндр, и не может быть более одной замкнутой фазовой траектории, охватывающей цилиндр.*

§ 2. Маятник с постоянным моментом

Цилиндрическое фазовое пространство целесообразно применять для отображения поведения ряда электромеханических систем, например синхронного электромотора, генератора переменного тока,

[1]) Как и в случае фазовой плоскости, вычисление функции последования наиболее просто проводится для кусочно-линейных систем. Пример такой системы приведен в § 10 гл. VIII.

[2]) Функция $z(t)$ является периодической, т. е. $z(t+T) \equiv z(t)$, в то время как для функции $\vartheta(t)$, в силу ее непрерывности, $\vartheta(t+T) \equiv \vartheta(t) \pm 2\pi$.