

для интересующего нас точечного преобразования¹⁾. Неподвижные точки этого точечного преобразования z^* , т. е. точки, определяемые уравнением

$$z = f(z),$$

являются точками пересечения замкнутых фазовых траекторий (пределных циклов), охватывающих цилиндр, с образующей цилиндра $\vartheta = \vartheta_0$. Согласно теореме Кенигса предельный цикл устойчив, если

$$|f'(z^*)| < 1,$$

и неустойчив, если

$$|f'(z^*)| > 1.$$

Если известно само решение, соответствующее предельному циклу, охватывающему цилиндр, $\vartheta = \vartheta(t)$, $z = z(t)$, то устойчивость этого предельного цикла может быть определена путем вычисления его характеристического показателя

$$h = \frac{1}{T} \int_0^T \{\Phi'_\vartheta[\vartheta(t), z(t)] + F'_z[\vartheta(t), z(t)]\} dt,$$

где T — период периодического движения²⁾. Именно, предельный цикл устойчив при $h < 0$ и неустойчив при $h > 0$ (доказательство этого утверждения полностью совпадает с приведенным в § 8 гл. V).

При исследовании фазового портрета динамических систем с цилиндрической фазовой поверхностью известную помощь могут оказать критерии Бендиксона и Дюлака, изложенные ранее (в §§ 9 и 11 гл. V) для случая фазовой плоскости. Нетрудно видеть, что *если условия критерия Бендиксона или критерия Дюлака выполнены в некоторой области, заключенной между двумя замкнутыми кривыми, охватывающими фазовый цилиндр, то в этой области не существует замкнутых фазовых траекторий, не охватывающих цилиндр, и не может быть более одной замкнутой фазовой траектории, охватывающей цилиндр.*

§ 2. Маятник с постоянным моментом

Цилиндрическое фазовое пространство целесообразно применять для отображения поведения ряда электромеханических систем, например синхронного электромотора, генератора переменного тока,

¹⁾ Как и в случае фазовой плоскости, вычисление функции последовательно наиболее просто проводится для кусочно-линейных систем. Пример такой системы приведен в § 10 гл. VIII.

²⁾ Функция $z(t)$ является периодической, т. е. $z(t+T) \equiv z(t)$, в то время как для функции $\vartheta(t)$, в силу ее неизрываемости, $\vartheta(t+T) \equiv \vartheta(t) \pm 2\pi$.

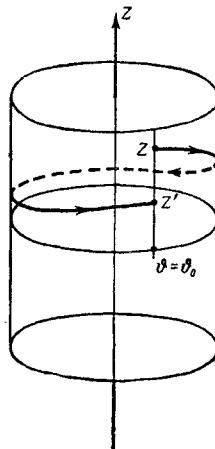


Рис. 320.

работающего в общую сеть параллельно с другими машинами, и т. д. Все эти системы приводят при определенных упрощающих предположениях к рассмотрению одной и той же математической задачи, и потому мы рассмотрим только одну из этих систем, именно обычный маятник с «линейным трением», находящийся под действием постоянного вращающего момента. Если обозначить этот постоянный момент через M_0 , то мы получим для движения маятника уравнение

$$I \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + b \frac{d\vartheta}{dt} + m g a \sin \vartheta = M_0,$$

где I — момент инерции маятника, а b — момент сил трения, действующих на маятник при угловой скорости, равной единице. Вводя новое независимое переменное $\tau = \sqrt{\frac{mga}{I}} t$, можно полученное уравнение привести к виду:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d^2\vartheta}{d\tau^2} + \alpha \frac{d\vartheta}{d\tau} + \sin \vartheta - \beta = 0, \\ & \alpha = \frac{b}{\sqrt{I m g a}} > 0 \quad \text{и} \quad \beta = \frac{M_0}{m g a} > 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

где

Прежде чем переходить к исследованию этого уравнения, мы покажем, в каких случаях могут быть приведены к такому же уравнению задачи о работе синхронного мотора и о параллельной работе генераторов.

В случае синхронного мотора через ϑ можно обозначить угол между направлениями магнитных полей статора и ротора. M_0 в этом случае выражает момент, действующий на мотор со стороны нагрузки (нагрузку мы считаем постоянной). Так как момент, действующий со стороны нагрузки, стремится замедлить вращение ротора, то мы должны здесь, так же как и для маятника, написав момент в правой части со знаком плюс, считать угол ϑ положительным, когда поле ротора отстает от поля статора. Кроме постоянного момента, действующего со стороны нагрузки, на ротор действует момент со стороны сил трения и в результате электрического демпфирования. Момент этих сил можно считать пропорциональным угловой скорости. И так как эти силы препятствуют движению, то момент их можно выразить в виде члена $-b \frac{d\vartheta}{dt}$ в правой части, причем $b > 0$. Но кроме момента со стороны нагрузки и сил трения на ротор мотора действует момент, возникающий в результате взаимодействия полей статора и ротора. Этот момент есть функция угла ϑ , причем он направлен так, что стремится уменьшить угол $|\vartheta|$ (ускорить движение отставшего ротора). Следовательно, мы можем обозначить этот момент через $-f(\vartheta)$, причем f имеет тот же знак, что и ϑ , и вместе с ϑ обращается в нуль. Мы можем теперь сумму всех действующих на

ротор моментов приравнять произведению момента инерции на угловое ускорение; получим¹⁾:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = M_0 - b \frac{d\theta}{dt} - f(\theta).$$

Что касается вида функции $f(\theta)$, характеризующей взаимодействие полей статора и ротора, то при известных упрощающих предположениях для этого взаимодействия получается синусоидальная зависимость. Заменяя $f(\theta)$ через $\sin \theta$, мы получим уравнение, вполне аналогичное тому, которое было получено для маятника (7.3).

В случае генератора, работающего в общую сеть параллельно с другими машинами, через θ следует обозначить угол опережения ротора рассматриваемого генератора по отношению к роторам других (вообще говоря, значительно более мощных) машин, а через M_0 — постоянный момент со стороны двигателя, вращающего данный генератор (при таком выборе опять M_0 стремится увеличить θ). Демпфирующий момент по-прежнему равен $-b \frac{d\theta}{dt}$. Кроме того, в случае генератора, работающего в общую цепь, при наличии сдвига θ возникает электромеханический момент, действующий на данный генератор со стороны других, работающих с ним в параллель²⁾. Этот момент есть функция от θ и стремится уменьшить $|\theta|$. Поэтому он должен быть равен $-f(\theta)$, где $f(\theta)$ имеет тот же знак, что и θ ; при известных предположениях он также может быть принят равным $\sin \theta$.

Для исследования уравнения (7.3) введем новую переменную $z = \frac{d\theta}{dt}$. Мы получим систему двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dz}{d\tau} = -az - \sin \theta + \beta; \quad \frac{d\theta}{d\tau} = z. \quad (7.4)$$

Исключая τ , можем получить одно уравнение первого порядка:

$$z \frac{dz}{d\theta} = -az - \sin \theta + \beta. \quad (7.5)$$

Исследование уравнения (7.5) мы начнем с частного случая $a = 0$ (консервативная система). Уравнение в этом случае принимает вид:

$$z \frac{dz}{d\theta} = \beta - \sin \theta. \quad (7.6)$$

¹⁾ Строго говоря, мы должны были бы рассматривать взаимодействие генераторов, а не только действие всех остальных генераторов на данный.

²⁾ Заметим, что для неподвижной системы отсчета уравнение движения ротора имеет вид:

$$I \frac{d^2\psi}{dt^2} = f(\omega t - \psi) - b \frac{d\psi}{dt} - M_0,$$

где ω — угловая скорость оси магнитного поля статора, а ψ — угол поворота ротора. Полагая $\theta = \omega t - \psi$, получим уравнение, приведенное в тексте,

После разделения переменных и интегрирования получим решение:

$$\frac{1}{2}z^2 = \cos \vartheta + \beta \vartheta + C_1 \quad \text{или} \quad z = \pm \sqrt{2(\cos \vartheta + \beta \vartheta) + C}. \quad (7.7)$$

Исследуем теперь поведение интегральных кривых (7.7), изображая их на развертке цилиндра. Прежде всего, согласно (7.6) особыми точками будут точки $(\bar{\vartheta}, 0)$, где $\bar{\vartheta}$ — корни уравнения

$$f(\vartheta, \beta) \equiv \beta - \sin \vartheta = 0. \quad (7.8)$$

Очевидно, при $\beta < 1$ имеем два положения равновесия: $\bar{\vartheta} = \vartheta_1$ и $\bar{\vartheta} = \vartheta_2 = \pi - \vartheta_1$, где $\vartheta_1 = \arcsin \beta$ ($0 \leq \vartheta_1 \leq \frac{\pi}{2}$); при $\beta = 1$ эти положения равновесия сливаются ($\vartheta_1 = \vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$) и при $\beta > 1$ не существуют. Соответствующая бифуркационная диаграмма приведена на рис. 321. Там область, в которой $f(\vartheta, \beta) > 0$, заштрихована; устойчивым состояниям равновесия (центрам) соответствуют точки линии, начертанной жирно с черными точками и для которой $\bar{\vartheta} = \vartheta_1$, неустойчивым состояниям равновесия (седлам $\bar{\vartheta} = \vartheta_2$) — точки тонкой линии с кружками. Значение $\beta = 1$ является, очевидно, бифуркационным.

Для построения интегральных кривых воспользуемся приемом, указанным в § 3 гл. II. Построив на вспомогательной плоскости ϑ, y кривую

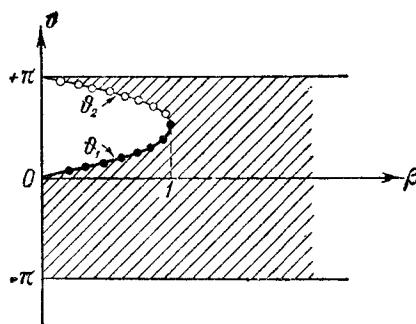
$$y = 2(\cos \vartheta + \beta \vartheta) \quad (7.9)$$

Рис. 321.

и расположив под ней развертку фазового цилиндра, нетрудно построить на развертке для каждого заданного β семейство интегральных кривых (7.7). Построение интегральных кривых на плоскости ϑ, z сводится к тому, что, задавая разные значения C , мы будем извлекать корень из суммы $C + y$ и откладывать его вверх и вниз по оси z . При заданном C каждому значению y , для которого $y + C > 0$, будут соответствовать две точки на плоскости ϑ, z , а для значений y , для которых $y + C < 0$, это не будет иметь места, так как значения для z будут получаться мнимые.

Построения эти дадут разные результаты при разных значениях β .

Случай $\beta = 0$, т. е. движение маятника без добавочного постоянного момента, мы уже рассматривали в § 4 гл. II. Мы там видели, что все фазовые траектории, кроме двух особых точек (центра и седла) и сепаратрис седла, суть замкнутые и соответствуют перио-



дическим движениям маятника, причем внутри сепаратрис лежат замкнутые траектории, охватывающие центр и не охватывающие цилиндр, а вне их — замкнутые траектории, охватывающие фазовый цилиндр. Последние соответствуют новому типу периодических движений, о которых мы уже говорили.

Для $\beta \neq 0$ мы получим разные картины в зависимости от того, будет ли $\beta < 1$ или $\beta > 1$. На вспомогательной плоскости мы должны построить кривую

$$y = 2 \cos \theta + 2\beta\theta.$$

При $\beta < 1$ эта кривая имеет максимум при $\theta = \theta_1 = \arcsin \beta$ ($0 \leq \theta_1 < \frac{\pi}{2}$) и минимум при $\theta = \theta_2 = \pi - \theta_1$ (при построении кривой (7.9) мы можем ограничиться значениями $-\pi < \theta \leq +\pi$). При $\beta = 1$ кривая $y = 2(\cos \theta + \beta\theta)$ не имеет ни максимума, ни минимума, но имеет при $\theta = \frac{\pi}{2}$ точку перегиба с горизонтальной касательной. При $\beta > 1$ кривая $y = 2(\cos \theta + \beta\theta)$ возрастает монотонно и не имеет ни экстремумов, ни точек перегиба.

Для случая $\beta < 1$ (рис. 322) мы снова получаем одну особую точку типа центра, одну особую точку типа седла и сепаратрису. На цилиндре мы получим картину, изображенную на рис. 323. Кривые,

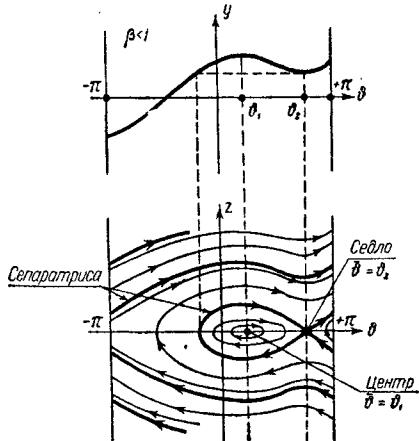


Рис. 322.

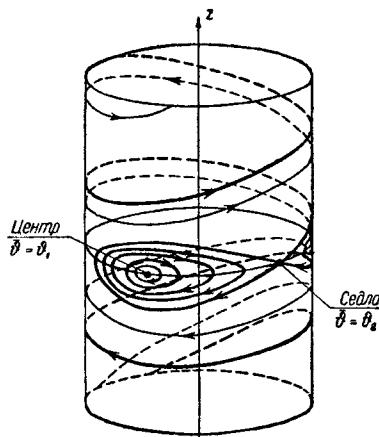


Рис. 323.

находящиеся внутри сепаратрисы, — замкнутые и соответствуют периодическим движениям. Кривые, лежащие вне сепаратрисы, не замыкаются на цилиндре, так как при увеличении θ на 2π x для них не приобретает прежнего значения, а с каждым оборотом возрастает (по абсолютной величине). Следовательно, периодические движения

«второго типа» в этом случае невозможны. Для $\beta = 1$ (рис. 324) мы получим одну особую точку высшего порядка. В этом случае замкнутых кривых на цилиндре (рис. 325) нет совсем. Для $\beta > 1$ особых точек совсем нет (рис. 326), нет также и замкнутых кривых

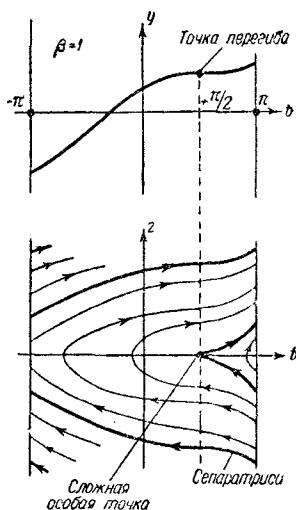


Рис. 324.

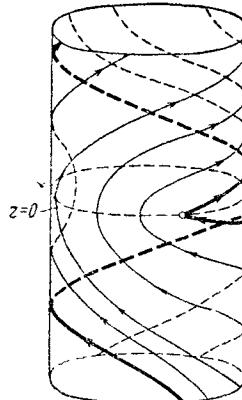


Рис. 325.

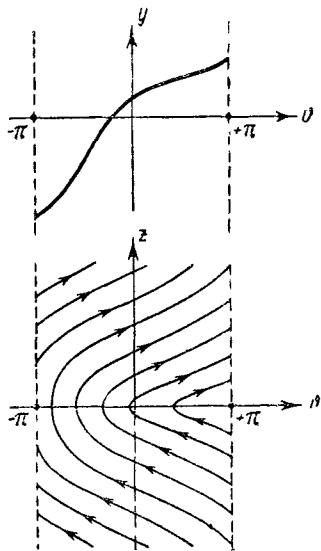


Рис. 326.

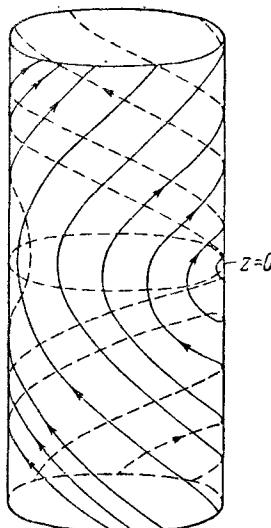


Рис. 327.

на цилиндре (рис. 327). Следовательно, при $\beta \geq 1$ невозможны периодические движения ни первого, ни второго типа. Физический смысл

полученных результатов совершенно ясен. Если постоянный момент не слишком велик, так что он нижнее положение равновесия смещает менее чем на $\frac{\pi}{2}$ (т. е. постоянный момент меньше, чем наибольший момент силы тяжести), то при достаточно малых начальных отклонениях (и начальных скоростях) возможны колебания вокруг этого смещенного положения равновесия. При этом, двигаясь в сторону, противоположную внешнему моменту, маятник отдает ту же энергию, которую он получил при движении в направлении внешнего момента. Если начальное отклонение велико, то благодаря действию постоянного внешнего момента маятник пройдет через верхнее положение равновесия и дальше будет двигаться в направлении постоянного момента, причем скорость маятника после каждого оборота будет возрастать. Если же $\beta > 1$, то внешний момент превосходит наибольший момент силы тяжести. В таком случае колебания вообще невозможны, и при любых начальных условиях маятник в конце концов будет вращаться в направлении постоянного момента с монотонно возрастающей скоростью, поскольку теперь $\frac{dz}{d\tau} = \frac{d^2\theta}{d\tau^2} > 0$ при любых θ .

§ 3. Маятник с постоянным моментом. Неконсервативный случай [198]

Перейдем к рассмотрению неконсервативной системы (7.4) при $\alpha > 0$. В этом случае уравнение интегральных кривых на цилиндре

$$z \frac{dz}{d\theta} = -\alpha z - \sin \theta + \beta \quad \text{или} \quad \frac{dz}{d\theta} = \frac{-\alpha z - \sin \theta + \beta}{z}$$

уже не поддается непосредственному интегрированию. Поэтому мы должны применить методы качественного интегрирования.

Прежде всего изоклина $\frac{dz}{d\theta} = 0$ есть сдвинутая синусоида. Ее уравнение

$$z = \frac{\beta - \sin \theta}{\alpha}.$$

Она пересекает ось θ только при $\beta < 1$ (рис. 328). При $\beta > 1$ эта изоклина не пересекает оси θ (рис. 329). Далее $\frac{dz}{d\theta} > 0$ между синусоидой и осью θ , т. е. в областях, заштрихованных на рис. 328 и 329. Во всей остальной области $\frac{dz}{d\theta} < 0$.

Координаты особых точек по-прежнему определяются уравнениями:

$$\beta - \sin \theta = 0, \quad z = 0.$$