

полученных результатов совершенно ясен. Если постоянный момент не слишком велик, так что он нижнее положение равновесия смещает менее чем на  $\frac{\pi}{2}$  (т. е. постоянный момент меньше, чем наибольший момент силы тяжести), то при достаточно малых начальных отклонениях (и начальных скоростях) возможны колебания вокруг этого смещенного положения равновесия. При этом, двигаясь в сторону, противоположную внешнему моменту, маятник отдает ту же энергию, которую он получил при движении в направлении внешнего момента. Если начальное отклонение велико, то благодаря действию постоянного внешнего момента маятник пройдет через верхнее положение равновесия и дальше будет двигаться в направлении постоянного момента, причем скорость маятника после каждого оборота будет возрастать. Если же  $\beta > 1$ , то внешний момент превосходит наибольший момент силы тяжести. В таком случае колебания вообще невозможны, и при любых начальных условиях маятник в конце концов будет вращаться в направлении постоянного момента с монотонно возрастающей скоростью, поскольку теперь  $\frac{dz}{d\tau} = \frac{d^2\theta}{d\tau^2} > 0$  при любых  $\theta$ .

### § 3. Маятник с постоянным моментом. Неконсервативный случай [198]

Перейдем к рассмотрению неконсервативной системы (7.4) при  $\alpha > 0$ . В этом случае уравнение интегральных кривых на цилиндре

$$z \frac{dz}{d\theta} = -\alpha z - \sin \theta + \beta \quad \text{или} \quad \frac{dz}{d\theta} = \frac{-\alpha z - \sin \theta + \beta}{z}$$

уже не поддается непосредственному интегрированию. Поэтому мы должны применить методы качественного интегрирования.

Прежде всего изоклина  $\frac{dz}{d\theta} = 0$  есть сдвинутая синусоида. Ее уравнение

$$z = \frac{\beta - \sin \theta}{\alpha}.$$

Она пересекает ось  $\theta$  только при  $\beta < 1$  (рис. 328). При  $\beta > 1$  эта изоклина не пересекает оси  $\theta$  (рис. 329). Далее  $\frac{dz}{d\theta} > 0$  между синусоидой и осью  $\theta$ , т. е. в областях, заштрихованных на рис. 328 и 329. Во всей остальной области  $\frac{dz}{d\theta} < 0$ .

Координаты особых точек по-прежнему определяются уравнениями:

$$\beta - \sin \theta = 0, \quad z = 0.$$

Следовательно, при  $\beta > 1$  особых точек нет. При  $\beta < 1$  существуют две особые точки (два состояния равновесия):  $\theta = \theta_1$ ,  $z = 0$  и  $\theta = \theta_2 = \pi - \theta_1$ ,  $z = 0$ , где, как и раньше,  $\theta_1 = \arcsin \beta$  ( $0 \leq \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ ).

Выясним характер этих состояний равновесия. Положим с этой целью в уравнениях (7.4)  $\theta = \theta_i + \xi$  ( $i = 1, 2$ ) и разложим  $\sin \theta$  в ряд по степеням  $\xi$ . Ограничиваюсь первой степенью  $\xi$ , получим систему линеаризованных уравнений, описывающую поведение системы около состояния равновесия  $(\theta_i, 0)$ :

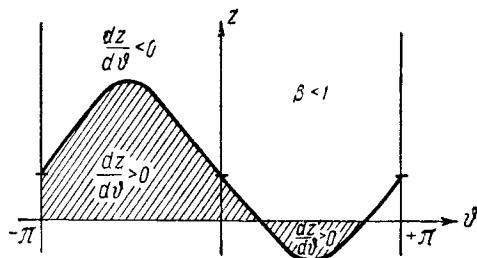


Рис. 328.

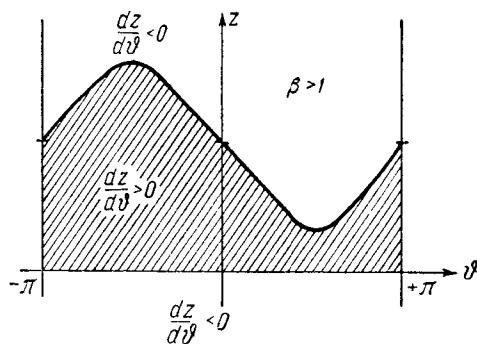


Рис. 329.

$$\frac{dz}{d\tau} = -az - \xi \cos \theta_i,$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = z \quad (7.10)$$

с характеристическим уравнением

$$\lambda^2 + a\lambda + \cos \theta_i = 0. \quad (7.11)$$

Так как  $\cos \theta_1 > 0$ , а  $\cos \theta_2 = -\cos \theta_1 < 0$ , то, следовательно, состояние равновесия  $(\theta_1, 0)$  — устойчивый фокус при  $a^2 < 4 \cos \theta_1$  и устойчивый узел при  $a^2 > 4 \cos \theta_1$ , а состояние равновесия  $(\theta_2, 0)$  — всегда

седло. При  $a = 0$  первое состояние равновесия превращается в центр.

Обозначим далее правые части уравнений (7.4) через  $F$  и  $\Phi$  ( $F = -az - \sin \theta + \beta$ ,  $\Phi = z$ ). Тогда

$$\Phi'_\theta + F'_z = -a < 0 \quad (7.12)$$

на всем фазовом цилиндре. Поэтому согласно критерию Бендиксона для траекторий на фазовом цилиндре (см. § 1 настоящей главы) динамическая система (7.4) не имеет на фазовом цилиндре замкнутых траекторий, не охватывающих цилиндр, и может иметь самое большее один предельный цикл, охватывающий цилиндр. Этот предельный цикл, если он существует, обязательно устойчив, ибо согласно (7.12) его характеристический показатель  $h = -a < 0$  и лежит целиком на верхней половине цилиндра (целиком в области  $z > 0$ ).

Прежде всего ясно, что система (7.4) не может иметь замкнутых траекторий, охватывающих цилиндр и пересекающих линию  $z = 0$ . В самом деле, предположив существование замкнутой траектории, пересекающей линию  $z = 0$  (пересечение должно иметь место по крайней мере в двух точках; рис. 330), мы придем к заключению, что она не может охватывать цилиндр, так как при переходе через ось  $z = 0$  изменяется знак  $\frac{d\vartheta}{dt}$  (напомним, что  $\frac{d\vartheta}{dt} = z$ ), и поэтому существует такой интервал  $\vartheta' < \vartheta < \vartheta''$ , в котором рассматриваемая замкнутая траектория не проходит. Следовательно, замкнутые фазовые траектории, охватывающие цилиндр, могут лежать только или целиком в области  $z < 0$  или целиком в области  $z > 0$ .

Далее, интегрируя уравнение (7.5), которое можно также записать в виде:

$$\frac{1}{2} \frac{d(z^2)}{dt} = -az - \sin \vartheta + \beta,$$

по замкнутой траектории  $z = z_0(\vartheta)$ , охватывающей цилиндр (мы предполагаем, что такая траектория существует), в пределах от  $\vartheta_0$  до  $\vartheta_0 + 2\pi$ , получим:

$$-\alpha \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0 + 2\pi} z_0(\vartheta) d\vartheta + 2\pi\beta = 0,$$

ибо  $z_0(\vartheta_0 + 2\pi) = z_0(\vartheta_0)$ . Для предельного цикла, охватывающего цилиндр и лежащего целиком в области  $z < 0$ , выполнение этого равенства невозможно в силу условия  $\beta > 0$ . Таким образом, если предельный цикл, охватывающий цилиндр, существует, то он лежит целиком в области  $z > 0$ .

Рассмотрим теперь вопрос о существовании этого предельного цикла. При этом мы будем отдельно рассматривать случаи  $\beta > 1$  и  $\beta < 1$ . Начнем с первого из этих случаев.

I.  $\beta > 1$ .

Чтобы убедиться в существовании периодических решений  $z(\vartheta)$ , достаточно, как уже указывалось, отыскать два таких частных решения  $z_1(\vartheta)$  и  $z_2(\vartheta)$ , чтобы для них удовлетворялись условия:

$$z_1(\vartheta + 2\pi) \leq z_1(\vartheta), \quad (A)$$

$$z_2(\vartheta + 2\pi) \geq z_2(\vartheta) \quad (B)$$

при каких-нибудь  $\vartheta$ . Первое из этих решений можно найти сразу. Действительно, всякое такое решение  $z_1(\vartheta)$ , для которого при некотором  $\vartheta_0$   $z_1(\vartheta_0) > \frac{1+\beta}{\alpha}$ , будет как раз искомым решением, ибо выше синусоиды  $z = \frac{\beta - \sin \vartheta}{\alpha}$  всегда  $\frac{dz}{d\vartheta} < 0$  (рис. 331) и, следовательно,  $z_1(\vartheta_0) \leq z_1(\vartheta_0 - 2\pi)$ , что удовлетворяет условию (A).

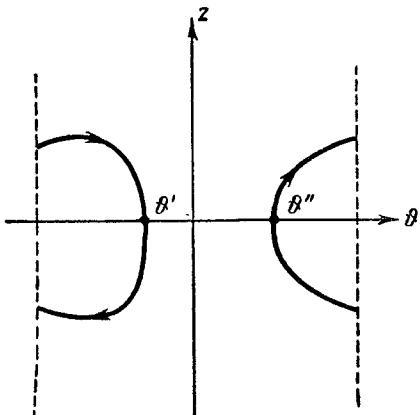


Рис. 330.

Для отыскания второго решения, удовлетворяющего условию (B), рассмотрим интегральную кривую, проходящую через точку A

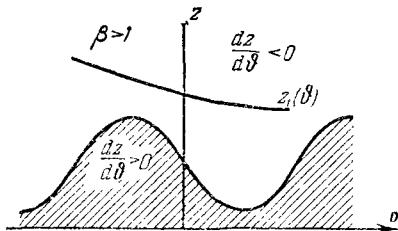


Рис. 331.

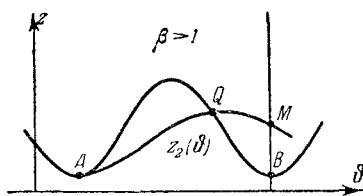


Рис. 332.

(рис. 332), с координатами  $\theta = \frac{\pi}{2}$  и  $z = \frac{\beta - 1}{\alpha}$ , т. е. через точку, в которой синусоида  $z = \frac{\beta - \sin \theta}{\alpha}$  имеет минимум. Проследим ход интегральной кривой справа от точки A. Так как между синусоидой

и осью  $\theta \frac{dz}{d\theta} > 0$ , то с возрастанием  $\theta$  кривая должна идти вверх и в некоторой точке Q пересечь синусоиду. В этой точке интегральная кривая имеет горизонтальную касательную, так как синусоида есть изоклина  $\frac{dz}{d\theta} = 0$ . Дальше интегральная кривая опускается вниз и пересекает прямую  $\theta = \frac{5\pi}{2}$  в точке M, лежащей не ниже точки B

(так как синусоида есть изоклина  $\frac{dz}{d\theta} = 0$ , то интегральная кривая должна пересечь ее, имея горизонтальную касательную; нетрудно видеть, что это возможно только в точке B или после точки B). Следовательно, рассматриваемая нами интегральная кривая соответствует решению, для которого

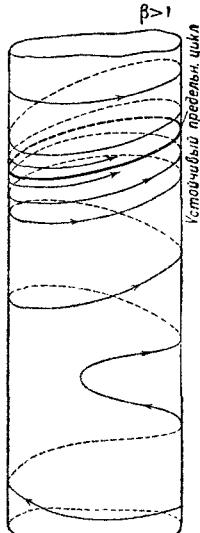
$$z_2\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) \geq z_2\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

т. е. удовлетворяет условию (B).

Рис. 333.

Так как особых точек в рассматриваемом случае ( $\beta > 1$ ) нет, то между двумя решениями  $z_1$

и  $z_2$  в силу непрерывности должно существовать периодическое решение, для которого  $z_0(\theta + 2\pi) = z_0(\theta)$ . Мы уже показали, что это периодическое решение — единственное и устойчивое. Соответствующий ему предельный цикл, охватывающий цилиндр, изображен на рис. 333.



II.  $0 < \beta < 1$ .

Для выяснения условий существования предельного цикла, охватывающего цилиндр, при  $0 < \beta < 1$  построим качественно функцию

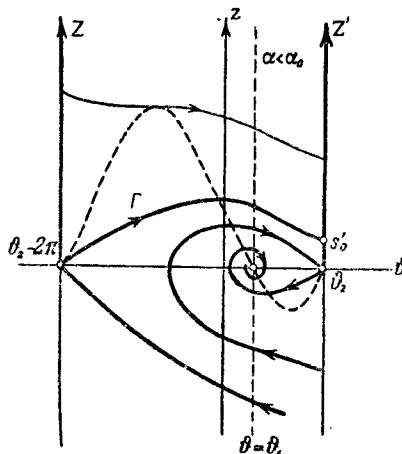


Рис. 334.

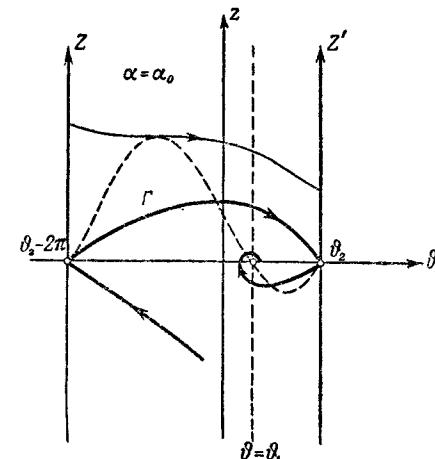


Рис. 335.

последованием точечного преобразования верхней половины образующей фазового цилиндра  $\theta = \theta_2$ , проходящей через седло  $(\theta_2, 0)$ , самой в себя; на развертке цилиндра (рис. 334—336) это преобразование будет преобразованием полупрямой  $Z$ :  $\theta = \theta_2 - 2\pi$ ,  $z \geq 0$  в полупрямую  $Z'$ :  $\theta = \theta_2$ ,  $z \geq 0$ . Обозначим через  $s$  и  $s'$  ординаты точек этой образующей и их последующих, если последние существуют ( $s, s' > 0$ ). Неподвижная точка  $s^*$  преобразования, если таковая существует, будет являться точкой пересечения предельного цикла, охватывающего цилиндр, с образующей  $\theta = \theta_2$ . Как мы видели, этот предельный цикл может лежать только целиком в области  $z > 0$ . Поэтому необходимым и достаточным условием его существования является существование неподвижной точки  $s^* > 0$  рассматриваемого точечного преобразования полупрямой  $\theta = \theta_2$ ,  $z > 0$  самой в себя, осуществляемого траекториями системы (7.4).

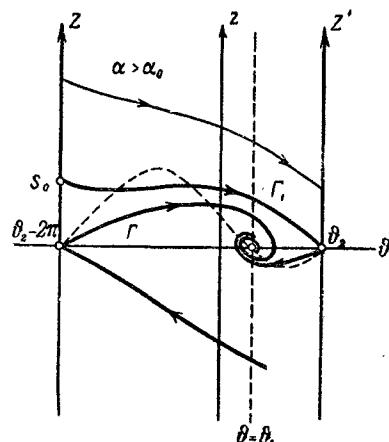


Рис. 336.

Прежде всего, так же как и в предыдущем случае, сразу можно убедиться в существовании траекторий  $z = z_1(\theta)$ , охватывающих цилиндр и удовлетворяющих условию:  $z_1(\theta_2 - 2\pi) > z_1(\theta_2)$  (такими траекториями, в частности, будут те, для которых  $z(\theta_2) > \frac{1+\beta}{\alpha}$ ).

Для них  $s' < s$ , т. е. всегда (при любых  $\alpha > 0$ ) график интересующей нас функции последования  $s' = f(s)$  при достаточно больших  $s$  лежит под биссектрисой  $s' = s$  (рис. 337).

Рассмотрим теперь ход сепаратрисы  $\Gamma$ , выходящей из седла с положительным угловым коэффициентом (три возможных случая изображены на рис. 334—336).

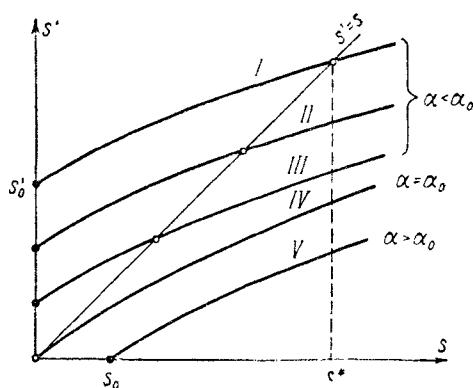


Рис. 337.

В консервативном случае  $\alpha = 0$  сепаратриса  $\Gamma$  идет целиком в верхней половине цилиндра (см. рис. 322 и 323). Поэтому при достаточно малом  $\alpha$ , когда система близка к консервативной, заведомо будет иметь место картина, изображенная на рис. 334: сепаратриса  $\Gamma$  идет в верхней половине фазового цилиндра и пересекает полупрямую  $Z'$  в некоторой точке  $s' = s'_0 > 0$ <sup>1</sup>). Так как согласно (7.5)  $dz/d\theta$  монотонно убывает с ростом

$\alpha$  (и притом неограниченно при  $\alpha \rightarrow +\infty$ ), то при увеличении параметра  $\alpha$  сепаратриса  $\Gamma$  (в пределах области  $z > 0$ ) монотонно опускается вниз, вследствие чего  $s'_0$  уменьшается и при некотором бифуркационном значении  $\alpha = \alpha_0$  обращается в нуль ( $\alpha_0$  является некоторой функцией параметра  $\beta$ ; при  $\alpha = \alpha_0$  сепаратриса  $\Gamma$ , очевидно, возвращается обратно в седло; см. рис. 335). Следовательно, при всех  $\alpha < \alpha_0$  сепаратриса  $\Gamma$  идет так, как это показано на рис. 334, и ее начальная точка  $s = 0$  имеет последующую  $s'_0 > 0$ . Кроме того, поскольку над сепаратрисой  $\Gamma$  нет особых точек уравнения (7.5), все траектории, пересекающие полупрямую  $Z$ , будут охватывать фазовый цилиндр, и соответственно все точки  $s > 0$  этой полупрямой будут иметь последующие точки  $s'$  ( $s' > s'_0 > 0$ ); иначе говоря, при  $\alpha < \alpha_0$  функция последования  $s' = f(s)$  существует (определенна) для всех  $s \geq 0$ , причем  $f(0) = s'_0 > 0$ . В силу ее непрерывности<sup>2</sup>) график функции

<sup>1</sup>) Решения уравнения (7.5) непрерывно зависят от параметра  $\alpha$  (соответствующая общая теорема приведена в Дополнении I).

<sup>2</sup>) Непрерывность функции последования следует из теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий (см. Дополнение I).

последования при  $\alpha < \alpha_0$  будет обязательно пересекать биссектрису  $s' = s$  (см. кривые I, II и III на рис. 337, изображающие графики функции последования при трех различных, последовательно возрастающих значениях параметра  $\alpha < \alpha_0$ ). Эта точка пересечения и будет неподвижной точкой  $s^*$  рассматриваемого точечного преобразования, соответствующей предельному циклу, охватывающему фазовый цилиндр (неподвижная точка единственна, поскольку, как было показано, не может быть более одного предельного цикла, охватывающего цилиндр). Ясно, что координата неподвижной точки  $s^* \rightarrow +0$  при  $\alpha \rightarrow \alpha_0$ .

Из тех же соображений относительно уменьшения  $\frac{dz}{d\vartheta}$  при увеличении параметра  $\alpha$  следует, что при  $\alpha > \alpha_0$  сепаратриса  $\Gamma$  уже не выходит на образующую цилиндра  $\vartheta = \vartheta_2$  (см. рис. 336) и точка  $s = 0$  не имеет последующей. Но тогда другая сепаратриса седла  $\Gamma_1$ , имеющая в окрестности седла отрицательный наклон ( $\frac{dz}{d\vartheta} < 0$ ), обязательно выйдет (при движении в сторону отрицательных  $\tau$ ) на образующую  $\vartheta = \vartheta_2$  (на полупрямую  $Z$  на рис. 336) в некоторой точке  $s_0 > 0$ , поскольку она не может выходить из устойчивого состояния равновесия  $(\vartheta_1, 0)$ . Поэтому точка  $s = s_0 > 0$  будет иметь последующей точку  $s' = 0$ , а график функции последования (он будет непрерывной кривой при  $s > s_0 > 0$ ) будет проходить через точку  $(s_0, 0)$ , лежащую под биссектрисой  $s' = s_0$  (см. кривую V на рис. 337), и или не будет пересекать эту биссектрису (тогда нет неподвижных точек, нет и предельных циклов), или будет пересекать ее в четном числе (неподвижных) точек. Последнее невозможно, так как точечное преобразование  $s' = f(s)$  не может иметь более одной неподвижной точки, поскольку система (7.4) не может иметь более одного предельного цикла, охватывающего фазовый цилиндр.

Таким образом, при  $0 < \beta < 1$  мы получаем два различных случая для  $\alpha < \alpha_0$  и для  $\alpha > \alpha_0$ .

При  $\alpha < \alpha_0$  существует единственное периодическое движение системы — единственный предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр (рис. 338). С ростом  $\alpha$  (но  $\alpha < \alpha_0$ ) этот предельный цикл сдвигается вниз (ибо  $s^*$  убывает) и при  $\alpha = \alpha_0$  слиивается с петлей сепаратрисы, охватывающей (при  $\alpha = \alpha_0$ ) цилиндр.

При  $\alpha > \alpha_0$  никаких периодических движений системы не существует (рис. 339).

Оба найденных нами периодических решения второго типа, т. е. охватывающих цилиндр (первое при любом  $\alpha$  и  $\beta > 1$ , второе при  $\alpha < \alpha_0$  и  $\beta < 1$ ), устойчивы, так как все соседние движения стремятся к этим периодическим движениям. Однако, в то время как в первом случае ( $\beta > 1$ ) периодическое решение устанавливается при любых начальных условиях, во втором случае существует область начальных значений, из которых система приходит к состоянию покоя

к устойчивому фокусу или узлу). Эта область показана штриховкой на рис. 338.

Физический смысл полученных результатов совершенно ясен. Если в системе существует трение, пропорциональное скорости, и на нее действует постоянный врачающий момент, то работа, затрачиваемая

на преодоление сил трения, очевидно, растет вместе со скоростью,

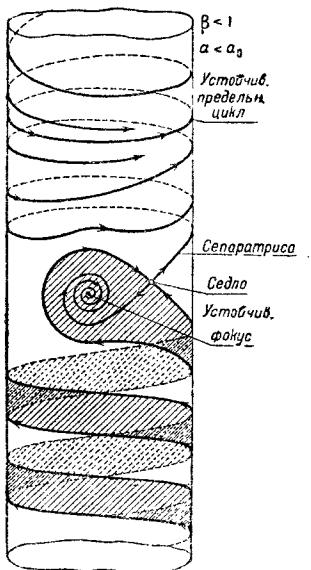


Рис. 338.

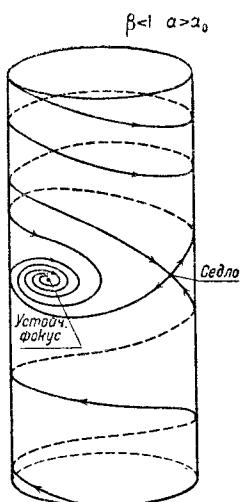


Рис. 339.

в то время как работа внешних сил остается неизменной. Поэтому, если  $\beta > 1$  и, значит, постоянный момент внешних сил настолько велик, что он превосходит наибольшее значение момента силы тяжести, то он будет при любых начальных условиях раскручивать маятник до тех пор, пока не установится баланс между энергией, рассеиваемой на трение, и работой внешних сил. Наоборот, если  $\beta < 1$  и, значит, момент внешних сил настолько мал, что наибольший момент силы тяжести его превосходит, то внешний момент сам по себе не в состоянии «провернуть» маятник. Тогда маятник может начать «прогертываться» только при известных начальных условиях. Но это движение может превратиться в периодическое только при условии, что энергия, рассеиваемая на трение за один оборот, в конце концов будет равна работе внешних сил, создающих постоянный момент. А так как, кроме того, нужны соответствующие начальные условия, именно достаточно большая начальная скорость, то потери энергии на трение при данном  $\alpha$  не могут быть сколь угодно малы (так могло бы быть только при условии, что маятник может дви-

гаться сколь угодно медленно). Значит, чтобы потери на трение за оборот не превосходили определенной величины (равной работе внешних сил за оборот), нужно, чтобы  $\alpha$  было достаточно мало, меньше, чем некоторое критическое значение  $\alpha_0$ .

Таким образом, все наши результаты получают вполне наглядное истолкование. Конечно, в случае синхронного мотора и параллельно работающих машин это истолкование будет более сложным.

#### § 4. Задача Жуковского о планирующем полете

В заключение главы рассмотрим задачу Жуковского [64] о планирующем полете планера (самолета с выключенным мотором, птицы), происходящем в некоторой вертикальной плоскости (рис. 340). Обозначим:  $\vartheta$  — угол наклона траектории,  $v$  — скорость центра тяжести планера,  $m$  — масса планера,  $F$  — площадь его крыльев,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\rho$  — плотность воздуха,  $C_x$  и  $C_y$  — аэродинамические коэффициенты сопротивления и подъемной силы планера.

Тогда уравнения движения центра тяжести планера для тангенциальной и центростремительной компонент ускорения запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= -mg \sin \vartheta - \frac{1}{2} \rho F C_x v^2, \\ mv \frac{d\vartheta}{dt} &= -mg \cos \vartheta + \frac{1}{2} \rho F C_y v^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

Пусть момент инерции планера (относительно центра тяжести) настолько мал, а стабилизирующий момент сил, развиваемых хвостовым оперением, настолько велик, что можно пренебречь изменениями угла атаки планера (изменениями угла между его продольной осью и траекторией его центра тяжести) и считать его постоянным; тогда постоянными будут и коэффициенты  $C_x$  и  $C_y$  в уравнениях (7.13). Сделав замену переменных

$$v = v_0 y,$$

где  $v_0 = \sqrt{\frac{2mg}{\rho F C_y}}$  — та скорость горизонтального полета, при которой вес планера уравновешивается подъемной силой, и

$$t = \frac{v_0}{g} t_{\text{нов}},$$

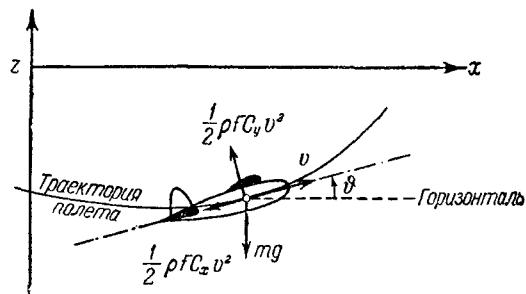


Рис. 340.