

гаться сколь угодно медленно). Значит, чтобы потери на трение за оборот не превосходили определенной величины (равной работе внешних сил за оборот), нужно, чтобы α было достаточно мало, меньше, чем некоторое критическое значение α_0 .

Таким образом, все наши результаты получают вполне наглядное истолкование. Конечно, в случае синхронного мотора и параллельно работающих машин это истолкование будет более сложным.

§ 4. Задача Жуковского о планирующем полете

В заключение главы рассмотрим задачу Жуковского [64] о планирующем полете планера (самолета с выключенным мотором, птицы), происходящем в некоторой вертикальной плоскости (рис. 340). Обозначим: ϑ — угол наклона траектории, v — скорость центра тяжести планера, m — масса планера, F — площадь его крыльев, g — ускорение силы тяжести, ρ — плотность воздуха, C_x и C_y — аэродинамические коэффициенты сопротивления и подъемной силы планера.

Тогда уравнения движения центра тяжести планера для тангенциальной и центростремительной компонент ускорения запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= -mg \sin \vartheta - \frac{1}{2} \rho F C_x v^2, \\ mv \frac{d\vartheta}{dt} &= -mg \cos \vartheta + \frac{1}{2} \rho F C_y v^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

Пусть момент инерции планера (относительно центра тяжести) настолько мал, а стабилизирующий момент сил, развиваемых хвостовым оперением, настолько велик, что можно пренебречь изменениями угла атаки планера (изменениями угла между его продольной осью и траекторией его центра тяжести) и считать его постоянным; тогда постоянными будут и коэффициенты C_x и C_y в уравнениях (7.13). Сделав замену переменных

$$v = v_0 y,$$

где $v_0 = \sqrt{\frac{2mg}{\rho F C_y}}$ — та скорость горизонтального полета, при которой вес планера уравновешивается подъемной силой, и

$$t = \frac{v_0}{g} t_{\text{нов}},$$

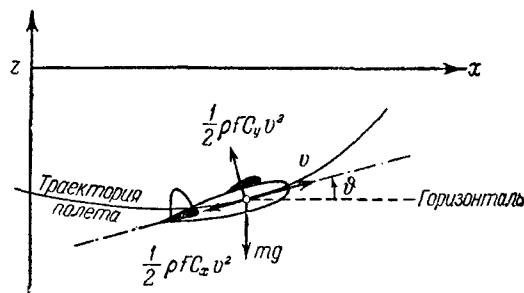


Рис. 340.

мы приведем уравнения (7.13) к следующему безразмерному виду:

$$\left. \begin{aligned} \dot{y} &= -\sin \vartheta - ay^2 = F(\vartheta, y), \\ \dot{\vartheta} &= \frac{-\cos \vartheta + y^2}{y} = \Phi(\vartheta, y), \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

где точкой сверху обозначено дифференцирование по новому, безразмерному времени и

$$a = \frac{C_x}{C_y}$$

(т. е. равно отношению силы сопротивления планера к его подъемной силе).

Поскольку состояния $(\vartheta + 2\pi, y)$ и (ϑ, y) являются состояниями физически тождественными (правые части уравнений (7.14) являются периодическими функциями угла ϑ с периодом 2π), мы должны взять в качестве фазовой поверхности круговой цилиндр (по его образующей будем откладывать величину y , пропорциональную скорости v , а по направляющей — угол ϑ). Исключив случай полета планера «хвостом вперед», мы ограничимся рассмотрением фазовых траекторий только на верхней половине цилиндра (только при $y \geq 0$). Уравнение интегральных кривых на цилиндре, очевидно, может быть записано в виде:

$$\frac{dy}{d\vartheta} = \frac{y(\sin \vartheta + ay^2)}{\cos \vartheta - y^2}. \quad (7.15)$$

Заметим, что это уравнение имеет интегральную кривую $y = 0$, которая является особой фазовой траекторией системы (7.14) и соответствует *мгновенному опрокидыванию* планера в положение $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$, как только скорость v (или y) обращается в нуль (согласно (7.14) при $y = 0$ $\dot{\vartheta} = +\infty$, если $-\frac{3\pi}{2} < \vartheta < -\frac{\pi}{2}$, и $\dot{\vartheta} = -\infty$, если $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < +\frac{\pi}{2}$).

Появление такой особой фазовой траектории, такого физически невозможного мгновенного опрокидывания планера в момент полной потери скорости ($v = 0$) обусловлено нашим предположением о неизменности угла атаки планера. Это предположение заведомо не выполняется при малых скоростях движения планера, поскольку при малых скоростях полета будет малым и стабилизирующий момент сил, развиваемый хвостовым оперением (обеспечивающий при больших скоростях полета почти полную неизменность угла атаки).

I. Как и в предыдущей задаче, рассмотрение начнем с консервативного случая $a = 0$ (силы сопротивления отсутствуют), который был подробно рассмотрен Н. Е. Жуковским [64, 171]. Дифферен-

циальное уравнение интегральных кривых (7.15) в этом случае имеет интеграл:

$$\frac{y^3}{3} - y \cos \vartheta = C (= \text{const}) \quad (7.16)$$

и три особые точки: 1) $\vartheta = 0, y = +1$; 2) $\vartheta = +\frac{\pi}{2}, y = 0$ и 3) $\vartheta = -\frac{\pi}{2}, y = 0$. Только первая из них является состоянием равновесия системы уравнений (7.14) при $a = 0$:

$$\dot{y} = -\sin \vartheta, \quad \dot{\vartheta} = \frac{-\cos \vartheta + y^2}{y}, \quad (7.14a)$$

и соответствует режиму горизонтального полета планера с постоянной скоростью $v = v_0$. Две другие особые точки лежат на особой интегральной кривой $y = 0$, соответствующей, как мы уже говорили, мгновенному опрокидыванию планера при $v = 0$, и не являются состояниями равновесия системы (7.14a), поскольку в этих точках $\dot{y} \neq 0$.

Для построения интегральных кривых можно воспользоваться тем обстоятельством, что их уравнение (уравнение (7.16)) разрешается относительно ϑ :

$$\vartheta = \pm \arccos \eta, \quad (7.16a)$$

где

$$\eta = \frac{y^2}{3} - \frac{C}{y} \quad (\mid \eta \mid \leqslant 1).$$

На рис. 341 изображено семейство вспомогательных кривых $\eta = \eta(y, C)$ для $y < 0$ ¹⁾, на рис. 342 и 343 — фазовые траектории на развертке цилиндра и на самом фазовом цилиндре. Значению $C = -\frac{2}{3}$ соответствует особая точка $\vartheta = 0, y = +1$ типа центра — состояние равновесия

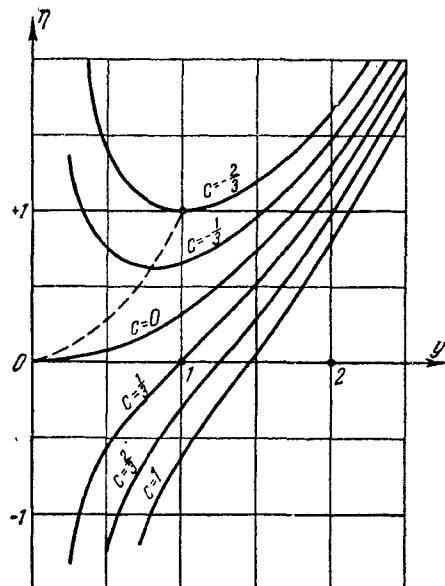


Рис. 341.

¹⁾ Кривые $\eta = \eta(y, C)$ — монотонные при $C > 0$ и имеют минимумы, лежащие на параболе $y^2 = \eta$, при $C < 0$, ибо, как нетрудно видеть,

$$\frac{d\eta}{dy} = \frac{2}{3}y + \frac{C}{y^2} = \frac{1}{y}(y^2 - \eta);$$

при $C < -\frac{2}{3}$ эти кривые лежат целиком над прямой $\eta = +1$.

системы уравнений (7.14a). Остальные фазовые траектории — замкнутые: фазовые траектории, для которых $-\frac{2}{3} < C < 0$, охватывают центр, но не охватывают цилиндра, а траектории с $C > 0$ охватывают фазовый цилиндр¹⁾. Первые из них соответствуют полету

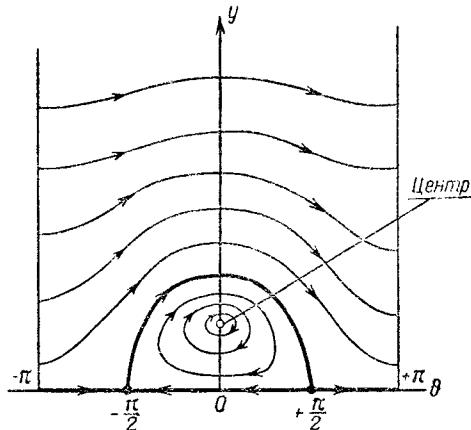


Рис. 342.

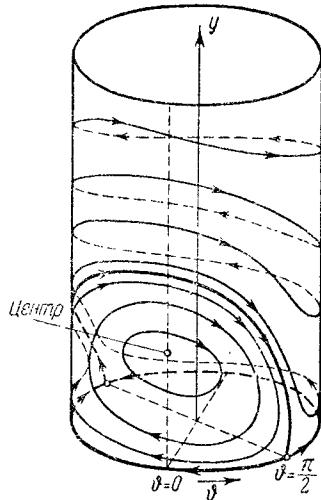


Рис. 343.

планера по «волнообразным» линиям, вторые — полету, при котором планер совершает «мертвые петли». Траектории полета планера (траектории движения его центра тяжести в вертикальной плоскости x, z) изображены на рис. 344²⁾.

¹⁾ Эти два типа замкнутых фазовых траекторий разделяются интегральной кривой $C = 0$, состоящей из окружности $y = 0$ и сепаратрис седел (уравнение последних имеет вид: $\vartheta = \pm \arccos \frac{y^2}{3}$).

²⁾ Уравнение этих траекторий симметричного полета планера в плоскости x, z (в предположении отсутствия сопротивления воздуха), которые были рассмотрены в работе Н. Е. Жуковского и в дальнейшем были названы *фугойдами*, может быть получено следующим образом. Прежде всего, заметив, что $v \sin \vartheta = \frac{dz}{dt}$, мы получим из уравнений (7.13) для случая $C_x = 0$:

$$\frac{1}{2} d(v^2) = -gdz, \quad \frac{1}{2} v^2 = -gz \text{ или } y^2 = -\frac{2gz}{v_0^2} \quad (\alpha)$$

(мы полагаем постоянную интегрирования равной нулю, т. е. отсчитываем высоту z от того уровня, которому при данных начальных условиях соответствует скорость $v = 0$). Далее, очевидно,

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} \vartheta \text{ или } dx = \frac{dz}{\operatorname{tg} \vartheta} = \frac{dz}{R(z, C)}, \quad (\beta)$$

II. Перейдем теперь к качественному рассмотрению полета планера при учете сопротивления воздуха (C_x или соответственно $a > 0$) [166]. По-прежнему имеется единственное состояние равновесия системы уравнений (7.14); его координатами, очевидно, будут:

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 &= -\operatorname{arctg} a \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta_0 < 0 \right), \\ y_0 &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \quad (0 < y_0 < 1). \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

Это состояние равновесия системы (7.14) соответствует полету планера по *нисходящей* прямой с постоянной скоростью $v < v_0$. Линеаризуя уравнения (7.14) в окрестности состояния равновесия (θ_0, y_0) , нетрудно убедиться, что последнее всегда *устойчиво* и при достаточно малых a (при $a < \sqrt{8}$) является фокусом.

Для доказательства отсутствия замкнутых интегральных кривых (кроме окружности $y = 0$) воспользуемся критерием Дюлака. Взяв y в качестве множителя $B(\theta, y)$, мы получим для уравнений (7.14):

$$\frac{\partial}{\partial y} [yF] + \frac{\partial}{\partial \theta} [y\Phi] = -3ay^2 \leqslant 0, \quad (7.18)$$

причем равенство нулю имеет место только на окружности $y = 0$. Отсюда следует, что в рассматриваемом случае не существует замкнутых интегральных кривых (или замкнутых контуров, состоящих из интегральных кривых), не охватывающих фазовый цилиндр, и имеется не более одной замкнутой интегральной кривой, охватывающей цилиндр. Поскольку такой замкнутой интегральной кривой, охватывающей фазовый цилиндр, является окружность $y = 0$ (она, как и в консервативном случае, соответствует мгновенному опрокидыванию планера при $v = 0$), можно утверждать, что система уравнений (7.14) при $a > 0$ не имеет на верхней половине фазового цилиндра (в области $y > 0$) замкнутых фазовых траекторий, как охватывающих цилиндр, так и не охватывающих его. Иначе говоря, рассматриваемая система не имеет (при наличии сил сопротивления воздуха) никаких периодических колебательных движений.

где $R(z, C)$ — функция z , которая получается, если выразить $\operatorname{tg} \theta$ через z при помощи соотношений (7.16а) и (α). Интегрируя уравнение (β) каким-либо приближенным методом (интеграл от правой части в элементарных функциях не выражается), мы получим зависимость x от z , графики которой изображены на рис. 344.

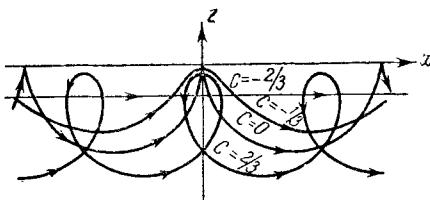


Рис. 344.

Уравнение интегральных кривых (7.15), как и в случае $a=0$, имеет кроме состояния равновесия (ϑ_0, y_0) еще две особые точки типа седла: $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ и $(\frac{\pi}{2}, 0)$, которые не являются состояниями равновесия системы уравнений (7.14). Однако теперь в отличие от случая $a=0$ сепаратриса седла $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, выходящая на верхнюю половину фазового цилиндра, уже не может входить в седло $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ¹⁾. Наконец, следует отметить, что все окружности $y = \text{const} \geq \frac{1}{\sqrt{a}}$ являются циклами без контакта, на которых $\dot{y} \leq 0$.

Следовательно, все фазовые траектории идут из далеких областей верхней половины цилиндра в область, заключенную между окружностями $y=0$ и $y=\frac{1}{\sqrt{a}}$ и содержащую в себе состояние равновесия (ϑ_0, y_0) . Принимая во внимание отсутствие замкнутых интегральных

кривых (кроме окружности $y=0$), мы можем утверждать, что *все фазовые траектории асимптотически приближаются к устойчивому состоянию равновесия — к точке (ϑ_0, y_0)* (к ней, в частности, приближается и сепаратриса седла $(-\frac{\pi}{2}, 0)$).

Сказанного достаточно для построения качественной картины разбиения фазового цилиндра на фазовые траектории системы (7.14) при любом $a > 0$. Это разбиение изображено на рис. 345.

Таким образом, планер при наличии сопротивления воздуха имеет единственный устойчивый равновесный режим — полет с постоянной скоростью $v=v_0 y_0$ по нисходящей прямой, составляющей с горизонтом угол ϑ_0 . Этот режим устанавливается при любых начальных условиях. Если начальная скорость планера достаточно велика (на фазовом цилиндре мы попадаем на фазовую траекторию, охватывающую несколько раз цилиндр), то планер совершил сначала несколько

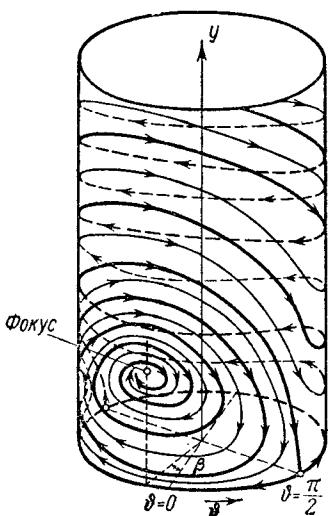


Рис. 345.

1) Если бы эта сепаратриса входила в седло $(\frac{\pi}{2}, 0)$, то тогда на фазовом цилиндре имелось бы два замкнутых контура, состоящих из интегральных кривых (из сепаратрисы седла и той или иной полуокружности $y=0$) и не охватывающих цилиндр, что невозможно, поскольку выполнены условия критерия Дюлака.

1) Если бы эта сепаратриса входила в седло $(\frac{\pi}{2}, 0)$, то тогда на фазовом цилиндре имелось бы два замкнутых контура, состоящих из интегральных кривых (из сепаратрисы седла и той или иной полуокружности $y=0$) и не охватывающих цилиндр, что невозможно, поскольку выполнены условия критерия Дюлака.

«мертвых петель» (их число определяется начальными условиями) и затем по «волнообразной» траектории будет приближаться к траектории прямолинейного полета. Такая траектория полета планера (траектория

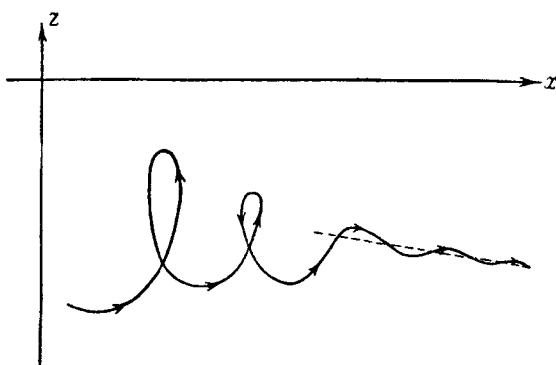


Рис. 346.

движения его центра тяжести в вертикальной плоскости x, z) приведена на рис. 346¹⁾.

На этом мы закончим краткое рассмотрение динамических систем с цилиндрической фазовой поверхностью²⁾. В некоторых задачах оказывается необходимым ввести и другие типы фазовой поверхности, отличные от плоскости и цилиндра, например тор или многолистные поверхности. Системы с фазовой поверхностью в виде тора выходят за рамки настоящей книги, а несколько систем с многолистной фазовой поверхностью будут рассмотрены в следующей главе.

¹⁾ Уравнения траекторий полета планера в плоскости x, z , в отличие от консервативного случая $a = 0$, уже не может быть получено в квадратурах поскольку в рассматриваемом диссипативном случае $a > 0$ не имеет места ни интеграл (7.16), ни закон сохранения энергии (α), приведенный в примечании на стр. 500.

²⁾ Еще одна динамическая система с цилиндрической фазовой поверхностью (простейшая модель паровой машины) будет рассмотрена в следующей главе (в § 10).