

ГЛАВА VIII

МЕТОД ТОЧЕЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ¹⁾

§ 1. Введение

Перейдем теперь к количественному рассмотрению нелинейных динамических систем, ограничиваясь по-прежнему автономными системами второго порядка (с одной степенью свободы). Как мы уже говорили, при современном состоянии теории это количественное рассмотрение (аналитическими методами) может быть удовлетворительно проведено, в сущности, лишь для трех классов систем, имеющих, однако, значительный практический интерес. Один из этих классов составляют системы, близкие к консервативным, и в частности, практически наиболее интересные системы, близкие к гармоническому осциллятору; второй класс — это системы, совершающие разрывные колебания. Эти два класса будут рассмотрены соответственно в гл. IX и X. Наконец, третий класс составляют системы, количественное рассмотрение которых может быть проведено при помощи метода точечных преобразований²⁾. Наиболее просто этот метод применяется для так называемых *кусочно-линейных систем*, т. е. для систем с фазовым пространством, состоящим из областей, в каждой из которых динамические уравнения движения линейны. Количественному рассмотрению таких кусочно-линейных систем и будет посвящена настоящая глава.

Рассмотрение нескольких задач об автоколебаниях кусочно-линейных систем при помощи метода точечных преобразований было уже проведено в § 4—6 гл. III. В этих задачах нахождение предельных циклов и исследование их устойчивости сводились к построению некоторого точечного преобразования полуправой самой в себя (к вычислению соответствующей функции последования), к отысканию неподвижных точек полученного точечного преобразования и исследованию их устойчивости, причем во всех рассмотренных задачах мы

¹⁾ Написано Н. А. Железовым.

²⁾ Напомним, что основные понятия метода точечных преобразований (понятия функции последования, неподвижной точки точечного преобразования и ее устойчивости) были сформулированы в § 7 гл. V. Там же была дана и теорема Кенигса об устойчивости неподвижной точки.

получали (или могли получить) функцию последований, записанную в явном виде.

Однако в подавляющем большинстве задач трудно получить функцию последований, записанную в явном виде, но сравнительно легко можно получить ее в *параметрической форме*. Пусть, к примеру, фазовая плоскость x, y некоторой динамической системы разбивается прямыми $x = x_1$ и $x = x_2$ на три области (I), (II) и (III) (рис. 347), в каждой из которых уравнения движения рассматриваемой системы линейны. Обозначим через S, S_1, S_2 и S_3 полупрямые, через которые изображающая точка переходит соответственно из области (I) в область (II), из (II) — в (III), из (III) — в (II) и, наконец, из области (II) в область (I), и через s, s_1, s_2 и s_3 — ординаты точек этих полупрямых. Фазовые траектории рассматриваемой динамической системы в «областих линейности» (I), (II) и (III) осуществляют точечные преобразования полупрямой S в S_1, S_1 в S_2, S_2 в S_3 и S_3 в S , приводя во взаимно-однозначное и непрерывное соответствие точки этих полупрямых; обозначим эти точечные преобразования соответственно через Π_1, Π_2, Π_3 и Π_4 . Интегрируя линейные дифференциальные уравнения

движения системы в соответствующей области, мы сможем найти для каждого из этих точечных преобразований полуправую в полуправую функцию *соответствия*¹⁾ в параметрической форме:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для преобразования } \Pi_1: s_1 = \varphi_1(\tau_1), \quad s = \psi_1(\tau_1); \\ \text{для преобразования } \Pi_2: s_2 = \varphi_2(\tau_2), \quad s_1 = \psi_2(\tau_2); \\ \text{для преобразования } \Pi_3: s_3 = \varphi_3(\tau_3), \quad s_2 = \psi_3(\tau_3); \\ \text{для преобразования } \Pi_4: s' = \varphi_4(\tau_4), \quad s_3 = \psi_4(\tau_4), \end{array} \right\} \quad (8.1)$$

где τ_1, τ_2, τ_3 и τ_4 — времена пробега изображающей точки через соответствующую область²⁾.

¹⁾ Функцию последований для точечного преобразования какой-либо линии в другую линию обычно называют *функцией соответствия*.

²⁾ Так как в области (II) дифференциальные уравнения движения системы линейны, то уравнения фазовой траектории, выходящей в эту область в точке полуправой S с координатой s в момент $t = 0$, будут линейно зависеть от s :

$$x = sf_1(t) + f_2(t), \quad y = sf_3(t) + f_4(t).$$

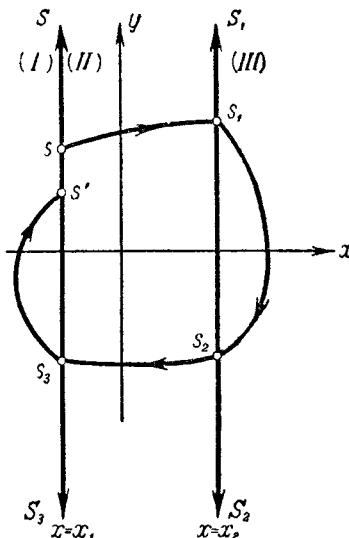


Рис. 347.

Если фазовые траектории, выходящие из некоторого отрезка полу-прямой S , возвращаются на него, пройдя по всем трем областям (пройдя через области (I), (II), (III) и (IV); см. рис. 347), то точечное преобразование Π этого отрезка полуправой S самого в себя (с функцией последованием $s' = f(s)$) получается последовательным применением преобразований Π_1 , Π_2 , Π_3 и Π_4 , т. е., как говорят, преобразование Π является произведением преобразований Π_1 , Π_2 , Π_3 и Π_4 :

$$\Pi = \Pi_1 \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_3 \cdot \Pi_4.$$

Очевидно, задача отыскания предельных циклов, проходящих по всем трем областям (т. е. через области (I), (II), (III) и (IV)), сводится к нахождению неподвижных точек этого «полного» точечного преобразования Π , т. е. к решению системы (обычно трансцендентных) уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\tau_1) &= \psi_2(\tau_2), & \varphi_3(\tau_3) &= \psi_4(\tau_4), \\ \varphi_2(\tau_2) &= \psi_3(\tau_3), & \varphi_4(\tau_4) &= \psi_1(\tau_1). \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

Устойчивость неподвижной точки и соответствующего предельного цикла нетрудно определить, пользуясь теоремой Кенигса и заметив, что в неподвижной точке

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{\varphi'_1(\bar{\tau}_1)}{\psi'_1(\bar{\tau}_1)} \cdot \frac{\varphi'_2(\bar{\tau}_2)}{\psi'_2(\bar{\tau}_2)} \cdot \frac{\varphi'_3(\bar{\tau}_3)}{\psi'_3(\bar{\tau}_3)} \cdot \frac{\varphi'_4(\bar{\tau}_4)}{\psi'_4(\bar{\tau}_4)}$$

(через $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2$, $\bar{\tau}_3$ и $\bar{\tau}_4$ обозначены значения τ_1 , τ_2 , τ_3 и τ_4 для неподвижной точки, т. е. решение системы уравнений (8.2))¹.

Принципиально таким путем можно получать точечные преобразования для любых кусочно-линейных динамических систем второго порядка и проводить количественное исследование последних. Однако, конечно, практические трудности в исследовании и решении системы уравнений, определяющей неподвижные точки, в выяснении устойчи-

Пусть при $t = \tau_1$ изображающая точка, двигаясь по этой траектории, придет на полуправую S_1 в точке с ординатой s_1 ; тогда, очевидно,

$$x_2 = s f_1(\tau_1) + f_2(\tau_1), \quad s_1 = s f_3(\tau_1) + f_4(\tau_1)$$

(x_2 — абсцисса точек полуправой S_1). Разрешая полученные соотношения относительно s и s_1 , мы и получим функцию соответствия для преобразования Π_1 :

$$s = \frac{x_2 - f_3(\tau_1)}{f_1(\tau_1)} \equiv \psi_1(\tau_1), \quad s_1 = \psi_1(\tau_1) \cdot f_3(\tau_1) + f_4(\tau_1) \equiv \varphi_1(\tau_1).$$

Точно таким же образом можно найти функции соответствия и для остальных точечных преобразований Π_2 , Π_3 и Π_4 .

¹ Вообще говоря, в рассматриваемой нами динамической системе возможны и предельные циклы, проходящие только через две области, например через области (I) и (II). Последние, очевидно, можно найти, построив точечное преобразование $\Pi' = \Pi_5 \Pi_4$, где Π_5 — преобразование полуправой (s) в (s_5), осуществляемое фазовыми траекториями, лежащими целиком в области (II).

ности найденных неподвижных точек быстро возрастают с увеличением числа областей линейности уравнений движения (т. е. числа точечных преобразований, произведением которых является «полное» точечное преобразование). Поэтому, чтобы не осложнять изложения, мы в настоящей главе ограничимся рассмотрением лишь сравнительно простых задач об автоколебательных системах, для которых «полное» точечное преобразование является произведением не более двух точечных преобразований прямой в прямую, выражаемых в параметрической форме. В этих задачах неподвижные точки, соответствующие предельным циклам, будут определяться системами двух трансцендентных уравнений; исследование последних удобно вести при помощи диаграмм Ламеря (см. гл. III).

§ 2. Ламповый генератор

1. Уравнение колебаний. В качестве первой задачи мы рассмотрим автоколебания лампового генератора с колебательным контуром в цепи сетки или в цепи анода (рис. 348). Если пренебречь анодной реак-

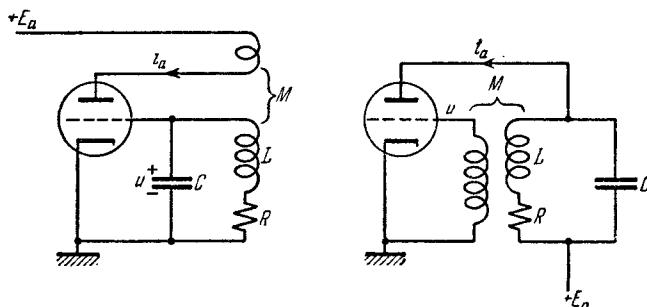


Рис. 348.

цией, сеточными токами и внутриламповыми емкостями, то, как мы видели в гл. I, § 6, уравнение колебаний такого лампового генератора может быть записано в следующем виде:

$$LC \frac{d^2u}{dt'^2} + [RC - MS(u)] \frac{du}{dt'} + u = 0 \quad (1).$$

В настоящем параграфе мы примем кусочно-линейную аппроксимацию характеристики лампы $i_a = i_a(u)$, изображенную на рис. 349:

$$i_a = \begin{cases} 0 & \text{при } u \leq -u_0, \\ S(u + u_0) & \text{при } u > -u_0, \end{cases} \quad (2)$$

¹⁾ Мы обозначаем время через t' , так как через t ниже будет обозначаться безразмерное время.