

ности найденных неподвижных точек быстро возрастают с увеличением числа областей линейности уравнений движения (т. е. числа точечных преобразований, произведением которых является «полное» точечное преобразование). Поэтому, чтобы не осложнять изложения, мы в настоящей главе ограничимся рассмотрением лишь сравнительно простых задач об автоколебательных системах, для которых «полное» точечное преобразование является произведением не более двух точечных преобразований прямой в прямую, выражаемых в параметрической форме. В этих задачах неподвижные точки, соответствующие предельным циклам, будут определяться системами двух трансцендентных уравнений; исследование последних удобно вести при помощи диаграмм Ламеря (см. гл. III).

§ 2. Ламповый генератор

1. Уравнение колебаний. В качестве первой задачи мы рассмотрим автоколебания лампового генератора с колебательным контуром в цепи сетки или в цепи анода (рис. 348). Если пренебречь анодной реак-

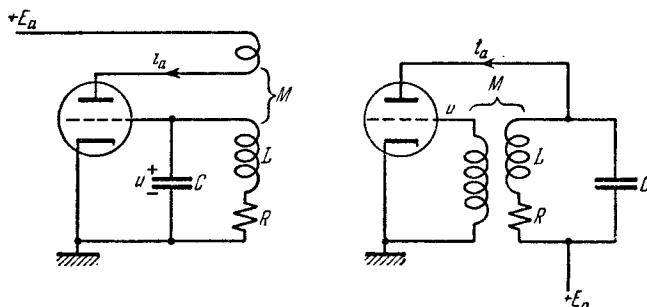


Рис. 348.

цией, сеточными токами и внутриламповыми емкостями, то, как мы видели в гл. I, § 6, уравнение колебаний такого лампового генератора может быть записано в следующем виде:

$$LC \frac{d^2u}{dt'^2} + [RC - MS(u)] \frac{du}{dt'} + u = 0 \quad (1)$$

В настоящем параграфе мы примем кусочно-линейную аппроксимацию характеристики лампы $i_a = i_a(u)$, изображенную на рис. 349:

$$i_a = \begin{cases} 0 & \text{при } u \leq -u_0, \\ S(u + u_0) & \text{при } u > -u_0, \end{cases} \quad (2)$$

¹⁾ Мы обозначаем время через t' , так как через t ниже будет обозначаться безразмерное время.

где S — крутизна восходящего участка характеристики и u_0 — абсолютная величина напряжения запирания лампы ($u_0 > 0$). Введем безразмерные переменные $x = \frac{u}{u_0}$ и $t = \omega_0 t'$, где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — «томсоновская» частота колебательного контура. В этих переменных уравнение (8.3) при кусочно-линейной аппроксимации характеристики лампы (8.4) запишется следующим образом:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{при } x < -1 & \ddot{x} + 2h_1 \dot{x} + x = 0, \\ \text{при } x > -1 & \ddot{x} - 2h_2 \dot{x} + x = 0, \end{array} \right\}, \quad (8.5)$$

где

$$h_1 = \frac{\omega_0}{2} RC \quad \text{и} \quad h_2 = \frac{\omega_0}{2} [MS - RC].$$

Таким образом, при такой кусочно-линейной аппроксимации характеристики лампы фазовая плоскость x, y ($y = \dot{x}$) лампового генератора разбивается прямой $x = -1$ на две области (I) и (II) (рис. 350), в каждой из которых фазовые траектории определяются соответствующим линейным дифференциальным уравнением (8.5)¹. Мы, очевидно, должны считать фазовые траектории непрерывными кривыми всюду и, в частности, на границе областей линейности — на прямой $x = -1$.

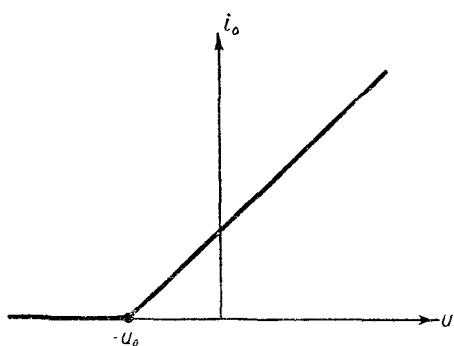


Рис. 349.

Единственное состояние равновесия $x = 0, y = 0$ лежит в области (II); оно устойчиво при $h_2 < 0$ (т. е. при $MS < RC$) и неустойчиво при $h_2 > 0$ (при $MS > RC$). Ниже мы будем рассматривать только последний случай — случай «самовозбуждающегося» генератора²). Поскольку состояние равновесия $x = 0, y = 0$ является неустойчивым фокусом при $0 < h_2 < 1$ и неустойчивым узлом при $h_2 > 1$ и никогда

¹) Ясно, что используемые нами при построении математической модели лампового генератора кусочно-линейная аппроксимация характеристики лампы и предположения об отсутствии сеточных токов и анодной реакции не могут отображать свойства реальной лампы и лампового генератора при достаточно больших положительных значениях напряжения u , когда в лампе появляются сеточные токи и анодная реакция. Поэтому некоторые свойства рассматриваемой сейчас математической модели лампового генератора (например, существование при $h_2 > 1$ траекторий, уходящих в бесконечность) не будут отображать свойства реальных ламповых генераторов.

²) Если $h_2 < 0$, т. е. $MS < RS$, то, как нетрудно убедиться, все фазовые траектории будут асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближаться к началу координат — устойчивому состоянию равновесия, и генератор не будет совершать автоколебаний.

не является седлом, особыми траекториями, определяющими качественно характер разбиения фазовой плоскости на фазовые траектории, будут уже известное нам состояние равновесия и предельные циклы, если последние существуют. Поэтому нашей основной задачей является отыскание предельных циклов и исследование их устойчивости.

Так как дифференциальные уравнения фазовых траекторий — уравнения колебаний генератора (8.5) — являются линейными в каждой из областей (I) и (II), то на фазовой плоскости не может быть предельных циклов, лежащих целиком только в одной области (только в области (I) или только в области (II)). Предельный цикл, если он существует, должен проходить через обе области и охватывать состояние равновесия. Следовательно, он будет пересекать границу этих двух областей — прямую $x = -1$.

Разобьем эту прямую на две полупрямые — на полупрямую S : $x = -1, y = -s (s > 0)$, и на полупрямую S' : $x = -1, y = s' > 0$. Эти полупрямые, очевидно, являются полупрямыми *без контакта*: полупрямая S пересекается фазовыми траекториями, идущими (при возрастании t) из области (II) в область (I), а полуправая S' — траекториями, идущими из области (I) в область (II).

Рассмотрим фазовую траекторию, выходящую из некоторой точки s из полупрямой S . Эта траектория, пройдя по области (I), пересечет полуправую S' в точке s' и затем, если $h_s < 1$, т. е. если фазовые траектории в области (II) являются спиральями, вновь выйдет на полуправую S в некоторой точке s_1 (рис. 350). Тем самым фазовые траектории при $0 < h_s < 1$ осуществляют точечное преобразование полуправой S самой в себя, ставя во взаимно-однозначное и непрерывное соответствие точки s и s_1 этой полуправой. Неподвижная точка этого преобразования, очевидно, является точкой пересечения предельного цикла с полуправой S .

Если же $h_s > 1$, то состояние равновесия $x = 0, y = 0$, как мы уже указывали, будет неустойчивым узлом; в области (II) будут иметься две прямолинейные фазовые траектории, уходящие в бесконечность (рис. 351), и, следовательно, траектории, выходящие из

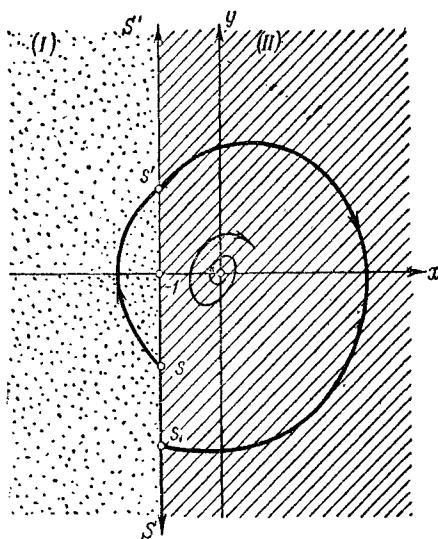


Рис. 350.

точек полупрямой s' , уже не могут приходить на полупрямую s , а будут уходить в бесконечность. Ясно, что в этом случае на фазовой плоскости x, y не существует никаких предельных циклов и все фазовые траектории уходят в бесконечность, т. е. за пределы той области, в которой принятая математическая модель лампового генератора отображает свойства реального генератора.

2. Точечное преобразование. Итак, рассмотрим случай $0 < h_2 < 1$. Точечное преобразование полупрямой S самой в себя (будем обозначать его через Π), очевидно, может быть представлено в виде произведения двух преобразований: преобразования Π_1 точек s полупрямой S в точки s' полупрямой S' , осуществляемое траекториями в области (I) , и преобразования Π_2 точек

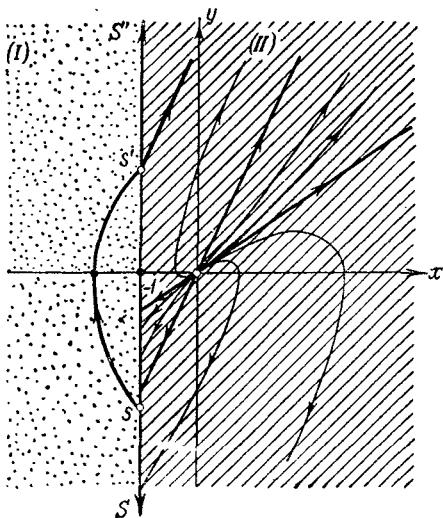


Рис. 351.

s' в точки s_1 полупрямой S (последнее осуществляется траекториями в области (II)). Найдем аналитические выражения для этих преобразований.

В области (I) ($x < -1$) фазовые траектории определяются первым из дифференциальных уравнений (8.5). Его решение (для траектории, проходящей при $t=0$ через точку $x=x_0, y=y_0$), как известно¹⁾, записывается в виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{-h_1 t} \left\{ x_0 \cos \omega_1 t + \frac{y_0 + h_1 x_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right\}, \\ y &= \dot{x} = e^{-h_1 t} \left\{ y_0 \cos \omega_1 t - \frac{x_0 + h_1 y_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

где

$$\omega_1 = + \sqrt{1 - h_1^2}.$$

Следовательно, уравнением траектории, выходящей при $t=0$ из точки s полупрямой S ($x_0 = -1, y_0 = -s$, где $s > 0$), будет:

$$\left. \begin{aligned} x &= -e^{-h_1 t} \left[\cos \omega_1 t + \frac{s + h_1}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right], \\ y &= \dot{x} = e^{-h_1 t} \left[-s \cos \omega_1 t + \frac{1 + h_1 s}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

¹⁾ См., например, гл. I, § 4.

Изображающая точка, двигаясь по траектории (8.7), в некоторый момент времени $t_1 = \frac{\tau_1}{\omega_1}$ придет на полупрямую S' в точке s' ($x = -1$, $y = s' > 0$) (рис. 350). Тогда

$$\begin{aligned} -1 &= -e^{-\frac{h_1 \tau_1}{\omega_1}} \left[\cos \tau_1 + \frac{s + h_1}{\omega_1} \sin \tau_1 \right], \\ s' &= e^{-\frac{h_1 \tau_1}{\omega_1}} \left[-s \cos \tau_1 + \frac{1 + sh_1}{\omega_1} \sin \tau_1 \right]. \end{aligned}$$

Разрешив эти уравнения относительно s и s' , мы получим функцию соответствия для преобразования Π_1 , записанную в параметрической форме:

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} - \cos \tau_1 - \gamma_1 \sin \tau_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \cdot \sin^2 \tau_1}}, \\ s' &= \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} - \cos \tau_1 + \gamma_1 \sin \tau_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \cdot \sin^2 \tau_1}}, \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{h_1}{\omega_1} = \frac{h_1}{\sqrt{1 - h_1^2}}$$

(при изменении h_1 от 0 до $+1$ γ_1 монотонно увеличивается от 0 до $+\infty$). Заметим, что выражение для s' получается из выражения для s заменой γ_1 на $-\gamma_1$. Дифференцируя (8.8), получим:

$$\frac{ds}{d\tau_1} = \frac{1 - e^{\gamma_1 \tau_1} (\cos \tau_1 - \gamma_1 \sin \tau_1)}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \cdot \sin^2 \tau_1}} \quad \text{и} \quad \frac{ds'}{d\tau_1} = \frac{1 - e^{-\gamma_1 \tau_1} (\cos \tau_1 + \gamma_1 \sin \tau_1)}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \cdot \sin^2 \tau_1}}.$$

Введем вспомогательную функцию

$$\varphi(\tau, \gamma) = 1 - e^{\gamma \tau} (\cos \tau - \gamma \sin \tau), \quad (8.9)$$

график которой (для фиксированного $\gamma > 0$) качественно изображен на рис. 352. Из свойств этой функции отметим следующие три:

$$1) \varphi(-\tau, -\gamma) \equiv \varphi(\tau, \gamma);$$

$$2) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = (1 + \gamma^2) e^{\gamma \tau} \sin \tau;$$

3) при $\gamma > 0$ $\varphi(\tau, \gamma)$ обращается в нуль при некотором $\tau = \tau^0(\gamma)$ (причем $\pi < \tau^0 < 2\pi$) и больше нуля при $\tau < \tau^0$.

Тогда

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} \varphi(\tau_1, -\gamma_1)}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \cdot \sin^2 \tau_1}}, & \frac{ds}{d\tau_1} &= \frac{\varphi(\tau_1, \gamma_1)}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \sin^2 \tau_1}}; \\ s' &= \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} \varphi(\tau_1, \gamma_1)}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \sin^2 \tau_1}}, & \frac{ds'}{d\tau_1} &= \frac{\varphi(\tau_1, -\gamma_1)}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \sin^2 \tau_1}}. \end{aligned} \right\} \quad (8.8a)$$

Из выражений (8.8а) и свойств функции $\varphi(\tau, \gamma)$ следует, что для получения всей совокупности значений s в интервале $0 < s < +\infty$ параметр преобразования τ_1 нужно изменять в интервале $0 < \tau_1 < \pi$, причем при изменении τ_1 от 0 до π , s и s' монотонно возрастают от 0 до $+\infty$ (при $\tau_1 \rightarrow +0$ $s, s' \rightarrow 0$; при $\tau_1 \rightarrow \pi - 0$ $s, s' \rightarrow +\infty$; при $0 < \tau_1 < \pi$ s, s' , $\frac{ds}{d\tau_1}$ и $\frac{ds'}{d\tau_1}$ положительны и непрерывны)¹⁾.

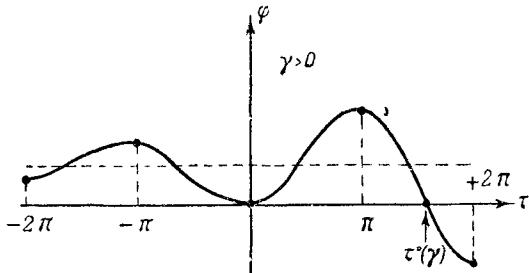


Рис. 352.

Для построения графика функции соответствия для преобразования Π_1 — функции, связывающей значения s и s' , достаточно заметить следующее:

1) при $0 < \tau < \pi$

$$\frac{ds}{ds'} = \frac{\varphi(\tau_1, \gamma_1)}{\varphi(\tau_1, -\gamma_1)} > 0$$

и монотонно возрастает от 1 при $\tau_1 \rightarrow +0$ до $e^{\gamma_1 \pi}$ при $\tau_1 \rightarrow \pi - 0$, так как

$$\begin{aligned} \frac{d^2s}{ds'^2} &= \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left\{ \frac{\varphi(\tau_1, \gamma_1)}{\varphi(\tau_1, -\gamma_1)} \right\} \frac{1}{\frac{ds'}{d\tau_1}} = \\ &= \frac{2(1 + \gamma_1^2)^{\frac{3}{2}} \sin^3 \tau_1}{[\varphi(\tau_1, -\gamma_1)]^3} [\operatorname{sh} \gamma_1 \tau_1 - \gamma_1 \sin \tau_1] > 0 \end{aligned} \quad (8.10)$$

при $0 < \tau < \pi$;

¹⁾ Параметр преобразования τ_1 имеет смысл приведенного времени пробега изображающей точки в области (I). Поэтому из всевозможных значений τ_1 , соответствующих заданному значению s (согласно первому соотношению (8.8)), мы должны брать *наименьшее положительное*. Таким образом, интервал изменения τ_1 должен быть интервалом наименьших положительных значений, которым соответствуют согласно (8.8) $0 < s < +\infty$. Таким интервалом является интервал $0 < \tau_1 < \pi$.

Предельные значения s и s' при $\tau_1 \rightarrow 0$ находятся из (8.8), например, при помощи правила Лопитала.

2) при $\tau \rightarrow \pi - 0$ график функции соответствия (8.8) имеет прямолинейную асимптоту

$$s = e^{\gamma_1 \tau} s' + a, \quad (8.11)$$

где

$$a = \lim_{\tau \rightarrow \pi - 0} [s - e^{\gamma_1 \tau} s'] = -\frac{2\gamma_1(1 + e^{\gamma_1 \pi})}{\sqrt{1 + \gamma^2}} < 0;$$

3) в силу $\frac{d^2 s}{ds'^2} > 0$ и $a < 0$ кривая (8.8) расположена над асимптотой (8.11). График функции соответствия (8.8) изображен на рис. 353 (сплошной линией для рассмотренного случая $0 < h_1 < 1$).

В случае $h_1 > 1$ решение уравнения (8.5) в области (I) получается из (8.7) заменой тригонометрических функций на соответствующие гиперболические и ω_1 на $\tilde{\omega}_1 = \sqrt{h_1^2 - 1}$; нетрудно видеть, что и функция соответствия для преобразования Π_1 в этом случае может быть получена из (8.8) тем же путем. Таким образом, в случае $h_1 > 1$

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{e^{\tilde{\gamma}_1 \tau_1} - \operatorname{ch} \tau_1 - \tilde{\gamma}_1 \operatorname{sh} \tau_1}{\sqrt{\tilde{\gamma}_1^2 - 1} \operatorname{sh} \tau_1}, \\ s' &= \frac{e^{-\tilde{\gamma}_1 \tau_1} - \operatorname{ch} \tau_1 + \tilde{\gamma}_1 \cdot \operatorname{sh} \tau_1}{\sqrt{\tilde{\gamma}_1^2 - 1} \operatorname{sh} \tau_1}, \end{aligned} \right\} (8.12)$$

где

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 - 1}}$$

(при изменении h_1 от 1 до $+\infty$ $\tilde{\gamma}_1$ монотонно уменьшается от $+\infty$ до 1). Нетрудно также убедиться, что при изменении τ_1 от 0 до $+\infty$ s монотонно растет от 0 до $+\infty$, а s' — от 0 до

$$\bar{s} = \lim_{\tau_1 \rightarrow +\infty} s' = \sqrt{\frac{\tilde{\gamma}_1 - 1}{\tilde{\gamma}_1 + 1}}$$

и что график функции соответствия (8.11) имеет вид кривой, изображенной на рис. 353 пунктирной линией.

Перейдем теперь к точечному преобразованию Π_2 — преобразованию точек полупрямой S' в точки s_1 полупрямой S , осуществляющему траекториями в области (II), ограничиваясь случаем $0 < h_2 < 1$ ¹⁾.

¹⁾ Выше было показано, что при $h_2 > 1$ преобразование Π_2 не существует и все фазовые траектории уходят в бесконечность.

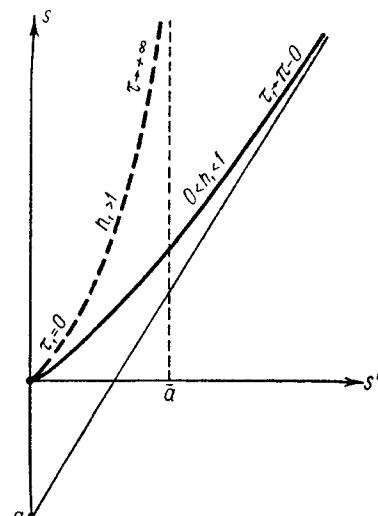


Рис. 353.

Пусть при $t=0$ изображающая точка, двигаясь по соответствующей траектории в области (II), пришла в точку s_1 полупрямой S , выйдя ранее в некоторый момент времени $t = -\frac{\tau_2}{\omega_2} < 0$ из точки s' полуправой S' (рис. 350). Поскольку решение уравнения (8.5) в области (II), очевидно, получается из решения в области (I) заменой h_1 на $-h_2$ и ω_1 на $\omega_2 = +\sqrt{1-h_2^2}$, уравнение интересующей нас траектории (с $x = -1$, $y = -s_1 < 0$ при $t = 0$ и для $-\frac{\tau_2}{\omega_2} \leq t \leq 0$) получится из (8.7), если заменить там h_1 на $-h_2$, ω_1 на ω_2 , s на s_1 и τ_1 на $-\tau_2$. Той же заменой мы получим из (8.8) функцию соответствия для преобразования Π_2 — функцию, связывающую между собой значения s' и s_1 через параметр τ_2 (приведенное время пробега изображающей точки в области (II) τ_2 , конечно, больше нуля). Таким образом, функция соответствия для преобразования Π_2 имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= -\frac{e^{\gamma_2 \tau_2} - \cos \tau_2 - \gamma_2 \sin \tau_2}{\sqrt{1 + \gamma_2^2 \sin \tau_2}}, \\ s' &= -\frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} - \cos \tau_2 + \gamma_2 \sin \tau_2}{\sqrt{1 + \gamma_2^2 \sin \tau_2}}, \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

где

$$\gamma_2 = \frac{h_2}{\omega_2} = \frac{h_2}{\sqrt{1-h_2^2}}.$$

Очевидно,

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= -\frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} \varphi(\tau_2, -\gamma_2)}{\sqrt{1 + \gamma_2^2 \sin \tau_2}}, \quad s' = -\frac{e^{\gamma_2 \tau_2} \varphi(\tau_2, \gamma_2)}{\sqrt{1 + \gamma_2^2 \sin \tau_2}}, \\ \frac{ds_1}{ds'} &= \frac{\varphi(\tau_2, \gamma_2)}{\varphi(\tau_2, -\gamma_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (8.13a)$$

и
Параметр преобразования τ_2 нужно изменять в таком интервале наименьших положительных величин, чтобы получить всю совокупность значений $0 < s' < +\infty$. Из свойств функции $\varphi(\tau, \gamma)$ (рис. 352) и выражений (8.13a) следует, что таким интервалом будет $\pi < \tau_2 < \tau_2^0$, где τ_2^0 — наименьший положительный корень уравнения $s' = 0$ или

$$\varphi(\tau_2, \gamma_2) = 0$$

(очевидно, $\pi < \tau_2^0 < 2\pi$). Нетрудно убедиться в следующих свойствах функции соответствия (8.13): 1) при уменьшении τ_2 от τ_2^0 до π s' монотонно возрастает от 0 до $+\infty$, а s_1 — от некоторого значения s_1^0 также до $+\infty$; 2) $\frac{ds_1}{ds'^2} > 0$ (для доказательства достаточно заменить в (8.10) s на s_1 , γ_1 на $-\gamma_2$ и τ_1 на $-\tau_2$ и учсть, что

$\pi < \tau_2 < \tau_2^0 < 2\pi$; следовательно, $\frac{ds_1}{ds'}$ при возрастании s' монотонно растет от 0 при $s' = 0$ (при $\tau_2 = \tau_2^0$) до $e^{\tau_2 \pi}$ при $s' \rightarrow +\infty$ (при $\tau_2 \rightarrow \pi + 0$); 3) при $\tau_2 \rightarrow \pi + 0$ кривая (8.15) имеет прямолинейную асимптоту

$$s_1 = e^{\tau_2 \pi} s' + \frac{2\gamma_2(1 + e^{\tau_2 \pi})}{\sqrt{1 + \gamma_2^2}}. \quad (8.14)$$

График функции последования (8.13) для точечного преобразования Π_2 изображен на рис. 354.

3. Неподвижная точка и ее устойчивость. Для определения неподвижных точек преобразования Π полупрямой S самой в себя нанесем на одной диаграмме (на диаграмме Ламеря) графики функции соответствия для преобразований Π_1 и Π_2 — кривые (8.8) и (8.13) (рис. 355, 356 и 357). При $0 < h_2 < h_1 < 1$ (рис. 355) кривые $s = s(s')$ и $s_1 = s_1(s')$ имеют нечетное число точек пересечения, так как эти кривые непрерывны и $s_1 > s$ при $s' = 0$,

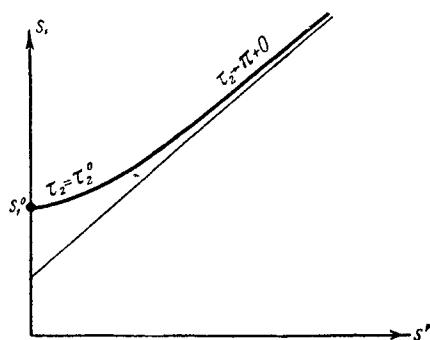


Рис. 354.

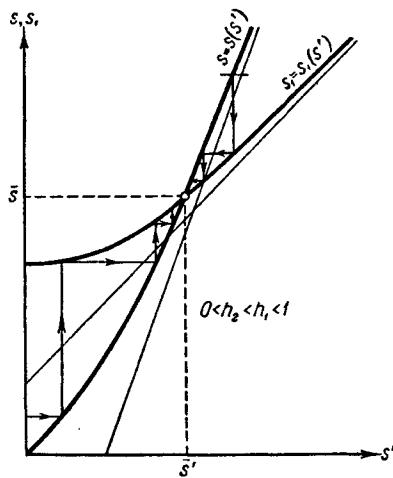


Рис. 355.

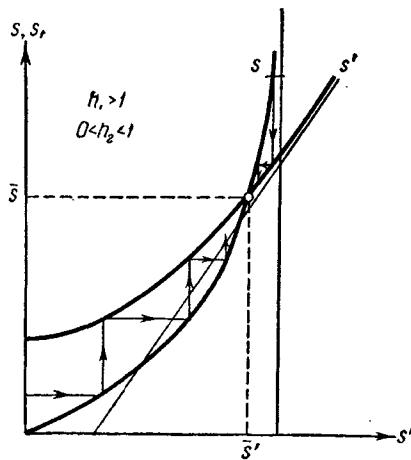


Рис. 356.

но $s_1 < s$ при $s' \rightarrow +\infty$ (поскольку $\gamma_2 < \gamma_1$, асимптота (8.14) идет более полого, чем асимптота (8.11)). Нетрудно показать, что в рассматриваемом случае существует только одна точка пересечения кривых $s = s(s')$ и $s_1 = s_1(s')$ и, следовательно, только одна неподвижная точка преобразования Π и только один предельный цикл на фазовой плоскости,

В самом деле, для неподвижной точки преобразования II (величины, относящиеся к ней, мы будем отмечать чертой сверху) согласно (8.8а) и (8.13а) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^{\gamma_1 \bar{\tau}_1}}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \sin \bar{\tau}_1}} \varphi(\bar{\tau}_1, -\gamma_1) &= -\frac{e^{-\gamma_2 \bar{\tau}_2}}{\sqrt{1 + \gamma_2^2 \sin \bar{\tau}_2}} \varphi(\bar{\tau}_2, -\gamma_2), \\ \frac{e^{-\gamma_1 \bar{\tau}_1}}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \sin \bar{\tau}_1}} \varphi(\bar{\tau}_1, \gamma_1) &= -\frac{e^{\gamma_2 \bar{\tau}_2}}{\sqrt{1 + \gamma_2^2 \sin \bar{\tau}_2}} \varphi(\bar{\tau}_2, \gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

и

$$\left(\frac{ds_1}{ds} \right) = \left(\frac{ds_1}{ds'} \right) : \left(\frac{ds}{ds'} \right) = \frac{\varphi(\bar{\tau}_2, \gamma_2) \varphi(\bar{\tau}_1, -\gamma_1)}{\varphi(\bar{\tau}_2, -\gamma_2) \varphi(\bar{\tau}_1, \gamma_1)}$$

или согласно (8.15)

$$\left(\frac{ds_1}{ds} \right) = e^{2(\gamma_2 \bar{\tau}_2 - \gamma_1 \bar{\tau}_1)} > 0. \quad (8.16)$$

Допустим, что кривые $s = s(s')$ и $s_1 = s_1(s')$ имеют несколько точек пересечения. Тогда для первой из них (с наименьшим \bar{s}'), поскольку $s_1 > s$ при малых s' , обязательно будет иметь место неравенство

$$\left(\frac{ds_1}{ds'} \right)_1 < \left(\frac{ds}{ds'} \right)_1 \text{ или } \left(\frac{ds_1}{ds} \right)_1 < 1,$$

а для второй, следующей —

$$\left(\frac{ds_1}{ds'} \right)_2 > \left(\frac{ds}{ds'} \right)_2 \text{ или } \left(\frac{ds_1}{ds} \right)_2 > 1.$$

Последнее невозможно, так как большему \bar{s}' соответствует большее $\bar{\tau}_1$ и меньшее $\bar{\tau}_2$, и следовательно, если бы вторая точка пересечения существовала, для нее согласно (8.16) выполнялось бы

$$\left(\frac{ds_1}{ds} \right)_2 < \left(\frac{ds_1}{ds} \right)_1 < 1.$$

Таким образом, существует только одна точка пересечения кривых

$s = s(s')$ и $s_1 = s_1(s')$ — одна неподвижная точка точечного преобразования II, причем для этой точки

$$0 < \left(\frac{ds_1}{ds} \right) < 1.$$

Следовательно, при $0 < h_2 < h_1 < 1$ на фазовой плоскости имеется единственный предельный цикл и притом устойчивый. К этому предельному циклу асимптотически приближаются при $t \rightarrow +\infty$ все фазовые траектории (рис. 358).

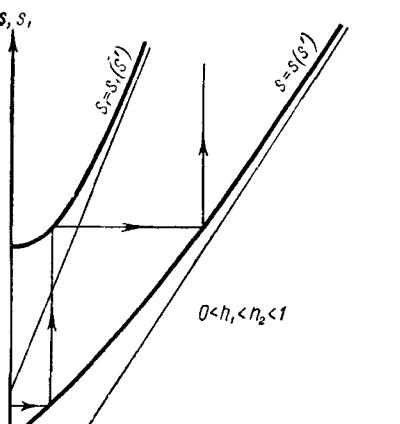


Рис. 357.

Тот же результат нетрудно получить и для случая $0 < h_2 < 1$, $h_1 > 1$ (рис. 356): и в этом случае существует единственный

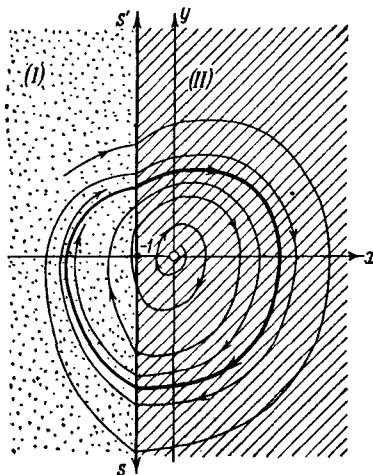


Рис. 358.

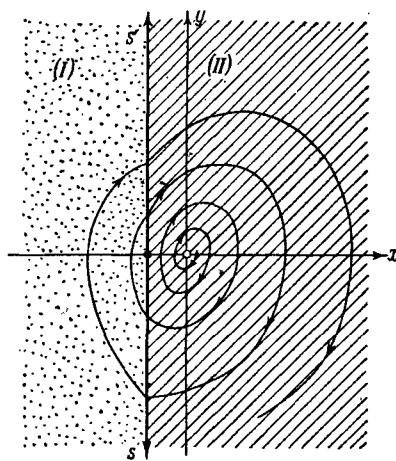


Рис. 359.

устойчивый предельный цикл, к которому асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближаются все остальные траектории.

Если же $0 < h_1 < h_2 < 1$, то кривые $s = s(s')$ и $s_1 = s_1(s')$ не пересекаются (рис. 357). В самом деле, если бы в этом случае существовали точки пересечения (их было бы четное число), то для первой из них (с наименьшим \bar{s}') необходимо должно быть

$$\left(\frac{ds_1}{ds} \right)_1 = \left(\frac{ds_1}{ds'} \right)_1 : \left(\frac{ds}{ds'} \right)_1 < 1,$$

что невозможно в силу (8.16), так как $\bar{\tau}_2 > \pi > \bar{\tau}_1$ и при $h_2 > h_1$ $\bar{\tau}_2 > \bar{\tau}_1$. Итак, при $0 < h_1 < h_2 < 1$ преобразование II полупрямой S самой в себя не имеет неподвижных точек, и следовательно, на фазовой плоскости не существует никаких предельных циклов, причем, как нетрудно убедиться, все фазовые траектории уходят в бесконечно удаленные области фазовой плоскости (рис. 359).

Ламповый генератор при сделанных предположениях имеет два существенных параметра h_1 и h_2 , и мы можем рассмотреть разбиение плоскости этих параметров на области различного качественного поведения рассматриваемой нами системы. На рис. 360 дано такое

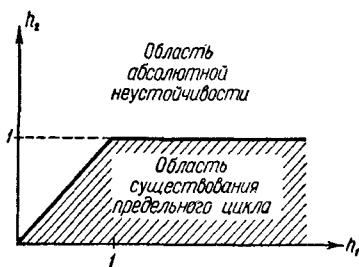


Рис. 360.

разбиение первого квадранта плоскости параметров h_1 и h_2 на область существования предельного цикла (единственного и устойчивого) и на область «абсолютной неустойчивости». Точкам последней области соответствуют такие значения параметров, при которых все фазовые траектории уходят в бесконечность. Очевидно, в этом случае (при $0 < h_1 < h_2 < 1$ или при $h_2 > 1$) развитая здесь теория не передает правильно свойства ламповых генераторов, ибо она была построена при пренебрежении сеточными токами и анодной реакцией, которые играют принципиальную роль при больших амплитудах колебаний.

4. Предельный цикл. Итак, при выполнении условий

$$0 < h_2 < h_1 \quad \text{и} \quad h_2 < 1$$

на фазовой плоскости существует единственный предельный цикл, к которому при $t \rightarrow +\infty$ асимптотически приближаются все остальные фазовые траектории, что соответствует установлению автоколебательного режима при произвольных начальных условиях¹⁾. При $0 < h_2 < h_1 < 1$ неподвижная точка точечного преобразования Π и, следовательно, предельный цикл однозначно (единственным образом) определяется системой уравнений (8.15):

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^{\gamma_1 \bar{\tau}_1} - \cos \bar{\tau}_1 - \gamma_1 \sin \bar{\tau}_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \sin \bar{\tau}_1}} &= - \frac{e^{\gamma_2 \bar{\tau}_2} - \cos \bar{\tau}_2 - \gamma_2 \sin \bar{\tau}_2}{\sqrt{1 + \gamma_2^2 \sin \bar{\tau}_2}}, \\ \frac{e^{-\gamma_1 \bar{\tau}_1} - \cos \bar{\tau}_1 + \gamma_1 \sin \bar{\tau}_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \sin \bar{\tau}_1}} &= - \frac{e^{-\gamma_2 \bar{\tau}_2} - \cos \bar{\tau}_2 + \gamma_2 \sin \bar{\tau}_2}{\sqrt{1 + \gamma_2^2 \sin \bar{\tau}_2}}, \end{aligned} \right\} \quad (8.15a)$$

причем

$$0 < \bar{\tau}_1 < \pi < \bar{\tau}_2 < \tau_2^0 < 2\pi.$$

Если эта система двух трансцендентных уравнений решена (а в этом и состоит основная вычислительная трудность рассматриваемой задачи), то не представит особого труда вычислить величины, характеризующие автоколебательный режим. Например, период автоколебаний будет равен

$$\tau = \frac{\bar{\tau}_1}{\omega_1} + \frac{\bar{\tau}_2}{\omega_2} \quad (8.17)$$

в единицах безразмерного времени и

$$T = \sqrt{LC} \left(\frac{\bar{\tau}_1}{\omega_1} + \frac{\bar{\tau}_2}{\omega_2} \right) \quad (8.17a)$$

в обычных единицах.

Решение системы уравнений (8.15a) может быть проведено при помощи методов численного счета, изложение которых выходит за рамки настоящей книги. Поэтому мы ограничимся приближенным вычис-

¹⁾ Следовательно, рассматриваемый генератор имеет при сделанных нами предположениях так называемый «мягкий режим самовозбуждения».

лением периода и амплитуды автоколебаний для наиболее интересного, с точки зрения практических приложений, случая достаточно малых значений параметров h_1 и h_2 (т. е. для случая генератора с колебательным контуром высокой добротности и слабой обратной связью).

Обозначим через a и b предельные значения величин $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_2$ при $h_1, h_2 \rightarrow 0$. Для вычисления этих предельных значений приведем уравнения (8.15а) к виду¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\operatorname{ch} \gamma_1 \bar{\tau}_1 - \cos \bar{\tau}_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \sin \bar{\tau}_1}} &= - \frac{\operatorname{ch} \gamma_2 \bar{\tau}_2 - \cos \bar{\tau}_2}{\sqrt{1 + \gamma_2^2 \sin \bar{\tau}_2}}, \\ \frac{\operatorname{sh} \gamma_1 \bar{\tau}_1 - \gamma_1 \sin \bar{\tau}_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \sin \bar{\tau}_1}} &= - \frac{\operatorname{sh} \gamma_2 \bar{\tau}_2 - \gamma_2 \sin \bar{\tau}_2}{\sqrt{1 + \gamma_2^2 \sin \bar{\tau}_2}}, \end{aligned} \right\} \quad (8.15б)$$

и подставим в них приближенные соотношения, справедливые для $h_1, h_2 \ll 1$:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= h_1, \quad \gamma_2 = h_2, \\ \operatorname{ch} \gamma_1 \bar{\tau}_1 &= 1, \quad \operatorname{ch} \gamma_2 \bar{\tau}_2 = 1, \\ \operatorname{sh} \gamma_1 \bar{\tau}_1 &= h_1 a \quad \text{и} \quad \operatorname{sh} \gamma_2 \bar{\tau}_2 = h_2 b^2. \end{aligned}$$

Тогда уравнения (8.15б) дают:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos a}{\sin a} &= - \frac{1 - \cos b}{\sin b}, \\ h_1 \frac{a - \sin a}{\sin a} &= - h_2 \frac{b - \sin b}{\sin b}, \end{aligned}$$

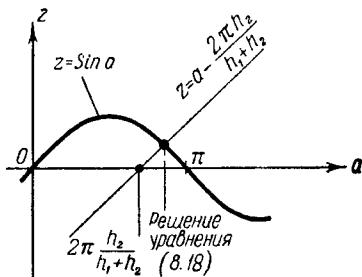


Рис. 361.

откуда получаем: $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = - \operatorname{tg} \frac{b}{2}$, т. е. $a + b = 2\pi$, и

$$a - \sin a = 2\pi \frac{h_2}{h_1 + h_2} = 2\pi \frac{MS - RC}{MS}. \quad (8.18)$$

Как нетрудно убедиться, уравнение (8.18) имеет при $h_2 < h_1$ (т. е. при $\frac{h_2}{h_1 + h_2} < \frac{1}{2}$) единственное решение $0 < a < \pi$ (графическое решение этого уравнения приведено на рис. 361). Так как при

¹⁾ Уравнения (8.15б) получаются из уравнений (8.15а) путем их сложения и вычитания.

²⁾ Как нетрудно проверить, $\omega_1 = 1 + O(\gamma_1^2)$, $\omega_2 = 1 + O(\gamma_2^2)$, $h_1 = \gamma_1 + O(\gamma_1^2)$,

$h_2 = \gamma_2 + O(\gamma_2^2)$, $\operatorname{ch} \gamma_1 \bar{\tau}_1 = 1 + O(\gamma_1^2)$, $\operatorname{ch} \gamma_2 \bar{\tau}_2 = 1 + O(\gamma_2^2)$,

$\operatorname{sh} \gamma_1 \bar{\tau}_1 = \gamma_1 a + O(\gamma_1^3)$ и $\operatorname{sh} \gamma_2 \bar{\tau}_2 = \gamma_2 b + O(\gamma_2^3)$.

$h_1, h_2 \ll 1$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1$, период автоколебаний, очевидно, равен $\tau = a + b = 2\pi$, т. е. совпадает с периодом собственных колебаний колебательного контура генератора¹⁾. Для амплитуды автоколебаний, поскольку при

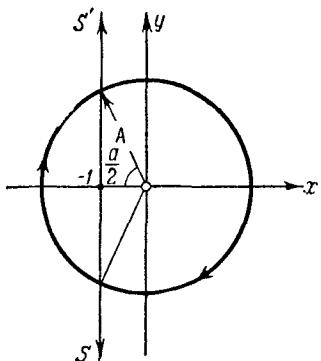


Рис. 362.

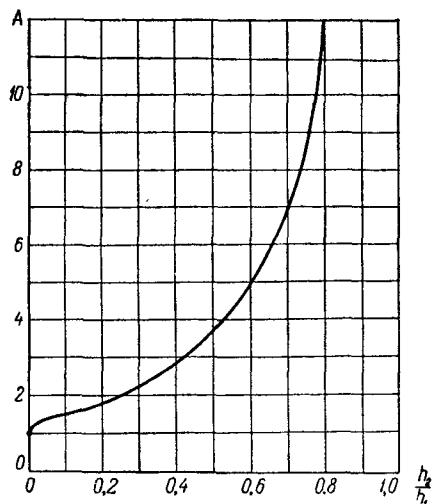


Рис. 363.

малых h_1 и h_2 предельный цикл близок к окружности, имеем (рис. 362):

$$A = \frac{1}{\cos \frac{a}{2}}. \quad (8.19)$$

Зависимость амплитуды автоколебаний A от параметров генератора, очевидно, выражается в параметрической форме соотношениями (8.18) и (8.19). На рис. 363 приведен график зависимости амплитуды A от отношения $\frac{h_2}{h_1}$. При $\frac{h_2}{h_1} \rightarrow 1$ $a \rightarrow \pi$ и, следовательно, $A \rightarrow \infty$.

¹⁾ Положив $\gamma_2 = \beta\gamma_1$, где $\beta = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} < 1$, можно искать решение системы (8.156) в виде разложений в ряды по степеням γ_1 :

$$\tilde{\gamma}_1 = a + a_1\gamma_1 + a_2\gamma_1^2 + \dots, \quad \tilde{\gamma}_2 = b + b_1\gamma_1 + b_2\gamma_1^2 + \dots$$

Подставив в уравнения (8.156) разложения в степенные ряды всех величин, зависящих от γ_1 , мы получим последовательность уравнений, определяющих коэффициенты a , b , a_1 , b_1 , a_2 , b_2 , ... Как нетрудно видеть, коэффициенты a и b определяются уравнениями, приведенными выше, и $a_1 = 0$, $b_1 = 0$. Таким образом, период автоколебаний

$$\tau = 2\pi + O(\gamma_1^2),$$

т. е. отличается от 2π (от периода собственных колебаний колебательного контура генератора) на величину порядка γ_1^2 (или h_1^2).