

§ 3. Ламповый генератор (симметричный случай)

1. Уравнения колебаний и фазовая плоскость. Рассмотрим теперь ламповый генератор (рис. 348), предполагая, что характеристика лампы имеет насыщение и симметрична (рабочая точка лампы, соответствующая состоянию равновесия, лежит посередине восходящего участка характеристики). Именно, мы будем аппроксимировать характеристику лампы симметричной кусочно-линейной функцией:

$$i_a = \begin{cases} 0 & \text{при } u < -u_0, \\ S(u + u_0) & \text{при } |u| < u_0, \\ 2Su_0 & \text{при } u > u_0, \end{cases} \quad (8.20)$$

график которой изображен на рис. 364.

Как и в предыдущем параграфе, будем пренебречь анодной реакцией лампы, сеточными токами и паразитными (в том числе и внутриламповыми) емкостями. Заменой переменных

$$x = \frac{u}{u_0}$$

$$\text{и } t = \omega_0 t' \left(\omega_0 \doteq \frac{1}{\sqrt{LC}} \right),$$

учитывая, что теперь

$$S(u) = \begin{cases} S & \text{при } |x| < 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1, \end{cases}$$

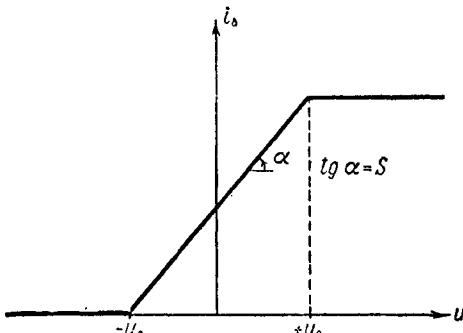


Рис. 364.

мы приведем уравнение лампового генератора (уравнение (8.3)) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2h_1 \dot{x} + x &= 0 & \text{при } |x| > 1, \\ \ddot{x} - 2h_2 \dot{x} + x &= 0 & \text{при } |x| < 1, \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (8.21)$$

где, как и раньше,

$$h_1 = \frac{\omega_0}{2} RC \quad \text{и} \quad h_2 = \frac{\omega_0}{2} [MS - RC].$$

Таким образом, при кусочно-линейной характеристике лампы (8.20) фазовая плоскость лампового генератора x, y , где $y = \dot{x}$, разбивается прямыми $x = -1$ и $x = +1$ на три «области линейности»: (I) $x < -1$, (II) $|x| < 1$ и (III) $x > +1$, в каждой из которых справедливо свое линейное уравнение (8.21) (рис. 365). При этом, исходя из ясных физических предпосылок (они ранее неоднократно приводились), мы будем требовать *непрерывности* фазовых траекторий всюду на фазовой плоскости и, в частности, на границах

«областей линейности» (на прямых $x = -1$ и $x = +1$)¹). Заметим также, что уравнение (8.21) инвариантно относительно замены переменных x, y на $-x, -y$, фазовые траектории в областях (I) и (III) симметричны друг другу относительно начала координат. Такая же симметрия имеет место и для траекторий в верхней и нижней половинах полосы (II).

Динамическая система (8.21) имеет единственное состояние равновесия — начало координат $(0, 0)$, которое является узлом или фокусом, устойчивым при $h_2 < 0$ (т. е. при $MS < RC$) и неустойчивым при $h_2 > 0$ (при $MS > RC$).

Ниже мы будем рассматривать главным образом последний случай — случай самовозбуждающегося генератора, т. е. будем считать, что $h_1 > 0$ и $h_2 > 0$ ².

2. Точечное преобразование. Фазовая плоскость x, y рассматриваемой системы заполнена кусками траекторий соответствующих линейных уравнений (8.21); эти куски траекторий «склеиваются» своими концами на прямых $x = -1$ и $x = +1$, образуя целые фазовые траектории. Изучение структуры разбиения на траектории такой «склеенной» фазовой плоскости может быть проведено путем рассмотрения

точечного преобразования полупрямой $x = -1, y < 0$ (полупрямой S) самой в себя, осуществляемого при движении изображающей точки по соответствующим кускам траекторий.

В самом деле, в рассматриваемом нами случае $h_1 > 0, h_2 > 0$ бесконечность, как нетрудно видеть, неустойчива. Также неустойчивым является и единственное состояние равновесия $(0, 0)$ (оно является неустойчивым фокусом при $0 < h_2 < 1$ и неустойчивым узлом при $h_2 > 1$). Поэтому на фазовой плоскости имеется по крайней мере один устойчивый предельный цикл (см. теорему V на стр. 409 и сноску на этой странице). Ясно, что предельные циклы должны охватывать начало координат — единственное состояние равновесия

¹⁾ На рис. 365 фазовые траектории изображены составленными из спиралей. Это, очевидно, имеет место только при $|h_1| < 1, |h_2| < 1$.

²⁾ Если $h_1 > 0$, а $h_2 < 0$, т. е. $MS < RC > 0$, то, как можно показать, все фазовые траектории будут асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближаться к устойчивому состоянию равновесия $(0, 0)$; следовательно, ламповый генератор не будет совершать автоколебаний (ни при каких начальных условиях).

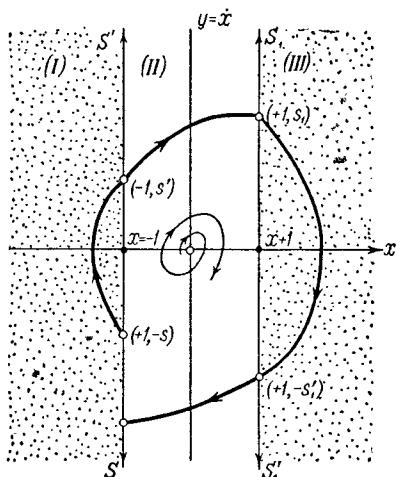


Рис. 365.

(см. § 8 гл. V) и, с другой стороны, не могут лежать целиком внутри полосы (II) ($|x| < 1$), так как внутри этой области уравнение (8.21) является линейным. Более того, поскольку рассматриваемая нами система не может иметь несимметричных предельных циклов¹⁾, предельные циклы будут симметричными (относительно начала координат) и, следовательно, будут проходить по всем трем областям и пересекать выбранную нами полупрямую «без контакта» — полупрямую S . Таким образом, мы найдем все предельные циклы (и тем самым будем знать структуру разбиения фазовой плоскости x, y на траектории²⁾), если мы построим точечное преобразование полупрямой S самой в себя, осуществляющее движением изображающей точки по траекториям, проходящим через все три «области линейности», и определим его неподвижные точки.

Это точечное преобразование (обозначим его через Π), очевидно, может быть представлено в виде произведения четырех преобразований Π_1, Π_2, Π_3 и Π_4 — точечных преобразований полупрямой S в S' , S' в S_1 , S_1 в S'_1 и, наконец, S'_1 в S , которые осуществляются траекториями соответственно в областях (I), (II), (III) и (IV) (см. рис. 365). Но преобразования

$$\Pi_3 \equiv \Pi_1 \quad \text{и} \quad \Pi_4 \equiv \Pi_2.$$

в силу указанной выше симметрии фазовых траекторий друг другу относительно начала координат. Следовательно, если ввести преобразование полупрямой S в полупрямую S_1

$$\Pi' = \Pi_1 \cdot \Pi_2, \quad \text{то} \quad \Pi = (\Pi')^2$$

(иначе говоря, «полное» преобразование Π получается двукратным применением преобразования Π' , так как преобразование $\Pi_3 \cdot \Pi_4$ — преобразование полупрямой S_1 в полупрямую S , осуществляющее траекториями в областях (III) и (IV), тождественно преобразованию Π').

Поэтому для целей изучения структуры разбиения фазовой плоскости на траектории мы можем ограничиться рассмотрением более простого преобразования Π' . Неподвижные точки этого преобразования, очевидно, являются точками пересечения симметричных предельных циклов (а иных, несимметричных предельных циклов система не имеет) с полупрямыми S и S' .

¹⁾ Допустим, что система (8.21) имеет несимметричный предельный цикл Γ_1 (он обязательно должен охватывать состояние равновесия). Тогда в силу симметрии фазовых траекторий друг другу (относительно начала координат) система (8.21) будет иметь другой предельный цикл Γ_2 , симметричный с Γ_1 и, следовательно, пересекающийся с ним. Последнее невозможно. Таким образом, рассматриваемая система может иметь только симметричные предельные циклы.

²⁾ В рассматриваемой задаче особыми траекториями, определяющими качественную структуру разбиения фазовой плоскости на траектории, являются только состояние равновесия $(0, 0)$ (узел или фокус) и предельные циклы.

Перейдем к вычислению функции соответствия для преобразования Π' . Преобразование Π_1 , очевидно, тождественно преобразованию Π_1 предыдущего параграфа (см. (8.8) и (8.12)). Таким образом, для случая $0 < h_1 < 1$ функция соответствия для преобразования Π_1 имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} - \cos \tau_1 - \gamma_1 \sin \tau_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \sin \tau_1}}, \\ s' &= \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} - \cos \tau_1 + \gamma_1 \sin \tau_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \sin \tau_1}}, \end{aligned} \right\} \quad (8.22)$$

где, как и раньше, τ_1 — параметр преобразования (приведенное время пробега изображающей точки в области (I), причем $0 < \tau_1 < \pi$) и

$$\gamma_1 = \frac{h_1}{\omega_1} = \frac{h_1}{\sqrt{1 - h_1^2}}.$$

График функции соответствия (8.22) был приведен на рис. 353¹.

Для фазовой траектории, выходящей при $t = 0$ из точки s' полу-прямой (s') ($x = -1, y = s' > 0$) и проходящей в области (II), имеем согласно (8.21) (см. § 4 гл. I) для случая $0 < h_2 < 1$:

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{h_2 t} \left[-\cos \omega_2 t + \frac{s' + h_2}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right], \\ \dot{x} &= y = e^{h_2 t} \left[s' \cos \omega_2 t + \frac{1 + s' h_2}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right], \end{aligned} \right\} \quad (8.23)$$

где

$$\omega_2 = \sqrt{1 - h_2^2}.$$

Изображающая точка, находившаяся в начальный момент на полуправой S' , попадает через некоторый интервал времени t_2 на полуправую S_1 — этот переход и был назван преобразованием Π_2 . Параметрические выражения для этого преобразования мы получим, полагая в уравнениях (8.23), что при $t_2 = \frac{\tau_2}{\omega_2} > 0$ $x = +1, y = s_1 > 0$, и разрешая полученные соотношения относительно s' и s_1 :

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} + \cos \tau_2 + \gamma_2 \sin \tau_2}{\sqrt{1 + \gamma_2^2 \sin \tau_2}}, \\ s' &= \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} + \cos \tau_2 - \gamma_2 \sin \tau_2}{\sqrt{1 + \gamma_2^2 \sin \tau_2}}, \end{aligned} \right\} \quad (8.24)$$

¹) Если $h_1 > 1$, то выражение для функции соответствия получается заменой в (8.22) тригонометрических функций на соответствующие гиперболические (см. (8.12)). График функции соответствия для этого случая изображен пунктирной линией на рис. 353.

где

$$\gamma_2 = \frac{h_2}{\omega_2} = \frac{h_2}{\sqrt{1 - h_2^2}} \text{.}$$

Для исследования кривой (8.24) достаточно заметить следующее:

- 1) При $\tau_2 \rightarrow +0$ $s' \rightarrow +\infty$.
- 2) $s' = 0$ при некотором $\tau_2 = \tau'_2$ ($0 < \tau'_2 < \pi$), определяемом уравнением $s'(\tau'_2) = 0$ или $1 + e^{\gamma_2 \tau_2} (\cos \tau_2 - \sin \tau_2) = 0$, причем, как нетрудно видеть, $s_1(\tau'_2) > 0$.

3) Дифференцируя (8.24), имеем:

$$\frac{ds_1}{d\tau_2} = -\frac{1 + e^{\gamma_2 \tau_2} (\cos \tau_2 - \gamma_2 \sin \tau_2)}{\sqrt{1 + \gamma_2^2 \sin^2 \tau_2}},$$

$$\frac{ds'}{d\tau_2} = -\frac{1 + e^{-\gamma_2 \tau_2} (\cos \tau_2 + \gamma_2 \sin \tau_2)}{\sqrt{1 + \gamma_2^2 \sin^2 \tau_2}}$$

и

$$\frac{ds_1}{ds'} = \frac{1 + e^{\gamma_2 \tau_2} (\cos \tau_2 - \gamma_2 \sin \tau_2)}{1 + e^{-\gamma_2 \tau_2} (\cos \tau_2 + \gamma_2 \sin \tau_2)}.$$

Поскольку $1 + e^{\gamma_2 \tau_2} (\cos \tau_2 - \gamma_2 \sin \tau_2) > 0$ и

$$1 + e^{-\gamma_2 \tau_2} (\cos \tau_2 + \gamma_2 \sin \tau_2) > 0$$

при $0 < \tau_2 < \tau'_2$, в этом интервале изменения τ_2 $\frac{ds'}{d\tau_2}$ и $\frac{ds_1}{d\tau_2} > 0$,

а $\frac{ds_1}{ds} > 0$, т. е. при изменении τ_2 от 0 до τ'_2 s' монотонно убывает от $+\infty$ до 0, а s_1 — от $+\infty$ до $s_1(\tau'_2) > 0$. Следовательно, интервалом наименьших положительных значений τ_2 , при прохождении которого мы переберем все точки полуправой S' , будет $0 < \tau_2 < \tau'_2$.

4) Так как

$$\frac{d^2 s_1}{ds'^2} = \frac{2(1 + \gamma_2^2)^{3/2} \sin^3 \tau_2 (\sinh \gamma_2 \tau_2 - \gamma_2 \sin \tau_2)}{[1 + e^{-\gamma_2 \tau_2} (\cos \tau_2 + \gamma_2 \sin \tau_2)]^3} > 0$$

при любых $0 < \tau_2 < \tau'_2$, то при увеличении s' от 0 до $+\infty$ (при

¹⁾ Если $h_2 > 1$, то функция соответствия для преобразования Π_2 получается из (8.24) заменой тригонометрических функций на соответствующие гиперболические и γ_2 на $\tilde{\gamma}_2 = \frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 - 1}}$, а $\sqrt{1 + \gamma_2^2}$ — на $\sqrt{\tilde{\gamma}_2^2 - 1}$.

уменьшении τ_2 от τ_2' до 0) $\frac{ds_1}{ds}$ монотонно возрастает от 0 (при $s' = 0$) до $+1$ (при $s' \rightarrow +\infty$). Кривая (8.24) имеет асимптоту $s_1 = s' + \frac{4\gamma_2}{\sqrt{1+\gamma_2^2}}$, причем в силу $\frac{ds_1}{ds'^2} > 0$ эта кривая расположена над

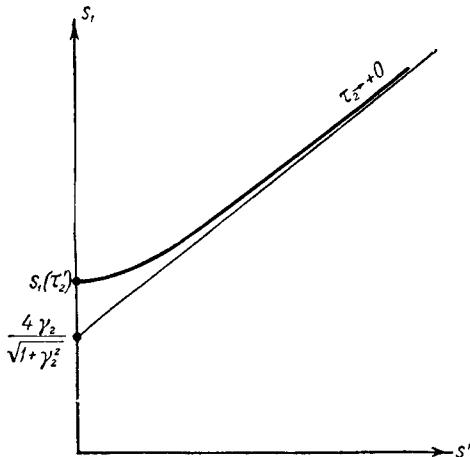


Рис. 366.

асимптотой. Указанных свойств достаточно для построения графика функции соответствия (8.24); он приведен на рис. 366¹⁾.

3. Неподвижная точка и предельный цикл. Построим кривые (8.22) и (8.24) на одной плоскости — на диаграмме Ламеря (рис. 367). Их точки пересечения, очевидно, и являются неподвижными точками преобразования $\Pi' = \Pi_1 \cdot \Pi_2$ преобразования полупрямой S в полу-прямую S_1 при $0 < h_1 < 1$ и $0 < h_2 < 1$. Аналитически неподвижные точки определяются следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} - \cos \tau_1 - \gamma_1 \sin \tau_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2} \sin \tau_1} &= \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} + \cos \tau_2 + \gamma_2 \sin \tau_2}{\sqrt{1 + \gamma_2^2} \sin \tau_2}, \\ \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} - \cos \tau_1 + \gamma_1 \sin \tau_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2} \sin \tau_1} &= \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} + \cos \tau_2 - \gamma_2 \sin \tau_2}{\sqrt{1 + \gamma_2^2} \sin \tau_2}, \end{aligned} \right\} \quad (8.25)$$

которая получается из выражений (8.22) и (8.24), если приравнять в них s' и положить $s_1 = s$.

¹⁾ При $h_2 > 1$ график функции соответствия преобразования Π_2 имеет качественно тот же вид: при изменении s' от 0 до $+\infty$ s_1 монотонно возрастает от некоторого положительного значения до $+\infty$, а производная $\frac{ds_1}{ds'} -$ от 0 до $+1$.

Покажем, что существует *единственная* точка пересечения кривых (8.22) и (8.24). В самом деле, существование хотя бы одной точки пересечения следует из непрерывности этих кривых и из неравенств

$$s_1 - s > 0 \text{ при } s' = 0,$$

$$s_1 - s < 0 \text{ при достаточно больших } s'^1).$$

Далее, если бы существовало несколько точек пересечения, то для первой из них (с наименьшим s') было бы $\frac{ds_1}{ds'} < \frac{ds}{ds'}$, а для следующей $\frac{ds_1}{ds'} > \frac{ds}{ds'}$. Последнее невозможно, так как $0 < \frac{ds_1}{ds'} < 1$ и $\frac{ds}{ds'} > 1$ (при любых s'). Таким образом, существует единственная точка пересечения кривых (8.22) и (8.24) — единственная неподвижная точка преобразования Π при $0 < h_1 < 1$ и $0 < h_2 < 1$ и притом устойчивая, поскольку в ней $0 < \frac{ds_1}{ds} < 1$.

То же самое имеет место и при $0 < h_1 < 1$, но $h_2 > 1$, так как график функции $s_1 = s_1(s')$ при $h_2 > 1$ имеет тот же вид, что и при $0 < h_2 < 1$.

Диаграмма Ламеря для случая $h_1 > 1$ и любых $h_2 > 0$ изображена на рис. 368, т. е. и при этих значениях параметров h_1 , h_2 имеется единственная и устойчивая неподвижная точка точечного преобразования Π' .

Следовательно, при любых значениях параметров системы $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ на фазовой плоскости существует единственный устойчивый предельный цикл, к которому стремятся (при $t \rightarrow +\infty$) все фазовые траектории. Иначе говоря, генератор при сделанных нами в этом

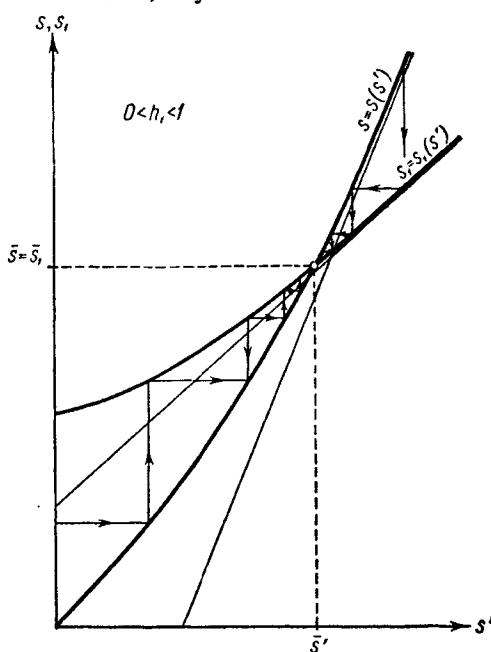


Рис. 367.

¹⁾ Последнее неравенство вытекает из того обстоятельства, что угловые коэффициенты асимптот кривых (8.22) и (8.24) равны соответственно $e^{T_1 t}$ и 1, т. е. асимптота кривой (8.22) идет круче асимптоты кривой (8.24) (относительно свойств функции соответствия преобразования Π_1 см. предыдущий параграф).

параграфе предположениях относительно характеристики и выбора рабочей точки лампы имеет *мягкий* режим возбуждения: единственный автоколебательный режим устанавливается при любых начальных условиях.

Период автоколебаний, очевидно, равен

$$\tau = 2 \left[\frac{\bar{\tau}_1}{\omega_1} + \frac{\bar{\tau}_2}{\omega_2} \right]$$

(в единицах безразмерного времени), где $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_2$ — значения параметров преобразований Π_1 и Π_2 , соответствующие неподвижной точке¹⁾.

Не проводя численного решения системы трансцендентных уравнений, определяющих неподвижную точку (системы уравнений (8.25) для $0 < h_1 < 1$, $0 < h_2 < 1$), что выходит за рамки книги, мы рассмотрим три предельных случая:

1) $h_1 \rightarrow 0$, тогда $\bar{\tau}_1 \rightarrow \pi$, $\bar{\tau}_2 \rightarrow 0$ (при этом неподвижная точка, а вместе с ней и предельный цикл уходят в бесконечность).

2) $h_2 \rightarrow 0$, тогда $\bar{\tau}_1 \rightarrow 0$, $\bar{\tau}_2 \rightarrow \pi$; координата неподвижной точки $\bar{s} \rightarrow 0$, предельный цикл вырождается в окружность $x^2 + y^2 = 1$.

3) $h_1, h_2 \ll 1$ ($h_1, h_2 \rightarrow 0$). В этом случае (вычисления мы опускаем, поскольку они полностью аналогичны проведенным в предыдущем параграфе) $\bar{\tau}_1$ определяется уравнением

$$\bar{\tau}_1 - \sin \bar{\tau}_1 = \frac{\pi h_2}{h_1 + h_2} = \pi \frac{MS - RC}{MS},$$

$\bar{\tau}_2 = \pi - \bar{\tau}_1$, предельный цикл близок к окружности радиуса

$$A = \frac{1}{\cos \frac{\bar{\tau}_1}{2}},$$

а автоколебания близки к синусоидальным с периодом 2π (в единицах безразмерного времени).

1) При $0 < h_1 < 1$, $0 < h_2 < 1$ $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_2$ определяются единственным образом системой уравнений (8.25), в остальных случаях — системой, получаемой из (8.25) соответствующей заменой тригонометрических функций на гиперболические.

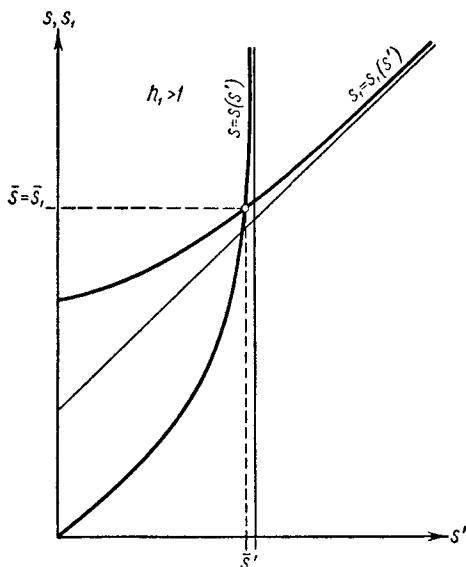


Рис. 368.