Можно показать, что эта пограничная кривая (кривая (*б*) на рис. 380) проходит через начало координат плоскости параметров a, γ и что $a_{кр}$ монотонно возрастает при увеличении γ.

4. Случай малых a и γ. Найдем приближенные выражения для периода и амплитуды автоколебаний в случае достаточно малых a и γ (a, $\gamma \ll 1$). Запишем уравнения (8.29) в виде:

$$\frac{\operatorname{ch}\gamma\tau_1 - \cos\tau_1}{\sin\tau_1} = -\frac{\operatorname{ch}\gamma\tau_2 - \cos\tau_2}{\sin\tau_2}, \quad \frac{\operatorname{sh}\gamma\tau_1}{\sin\tau_1} - a = \frac{\operatorname{sh}\gamma\tau_2}{\sin\tau_2}.$$

Тогда для случая γ, $a \ll 1$ имеем:

$$\frac{1-\cos\tau_1}{\sin\tau_1} = -\frac{1-\cos\tau_2}{\sin\tau_2}, \quad \frac{\gamma\tau_1}{\sin\tau_1} - a = \frac{\gamma\tau_2}{\sin\tau_2},$$

откуда $\bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2 = 2\pi$ (следовательно, период автоколебаний равен приближенно 2π), а $\bar{\tau}_1$ определяется уравнением

$$\sin\bar{\tau}_1 = \frac{2\pi\gamma}{a},$$

которое имеет действительные решения (и притом два: $0 < (\bar{\tau}_1)_1 < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < (\bar{\tau}_1)_2 < \pi$) только при $\frac{2\pi\gamma}{a} < 1$; отсюда

$$a_{кр} = 2\pi\gamma.$$

Радиусы предельных циклов (они близки к окружностям), как нетрудно подсчитать, равны:

$$R = \frac{b}{\cos\frac{\bar{\tau}_1}{2}} = \frac{\sqrt{2}\,b}{\sqrt{1+\cos\bar{\tau}_1}} = \frac{\sqrt{2}\,b}{\sqrt{1 \mp \sqrt{1-\left(\frac{2\pi\gamma}{a}\right)^2}}},$$

причем устойчивому предельному циклу соответствует большее из двух решений для $\bar{\tau}_1$ $\left(\frac{\pi}{2} < \bar{\tau}_1 < \pi\right)$ и знак минус в выражении для радиуса предельного цикла.

§ 5. Ламповый генератор с двухзвенной *RC*-цепочкой

Две схемы генератора с двухзвенной *RC*-цепочкой (с двойным триодом с катодным сопротивлением и с пентодом в транзитронном режиме) изображены на рис. 381 [1]). Исследование автоколебаний в них методом изоклин было проведено в § 12 гл. V. Эти же схемы, если считать емкости C_a и C_g малыми, паразитными емкостями, являются схемами мультивибратора с одной *RC*-цепью (см. § 7 гл. IV).

[1]) Одна из емкостей C_a или C_g может отсутствовать.

Для работы обеих схем в качестве генераторов существенно, что характеристика, выражающая зависимость силы тока i от напряже-

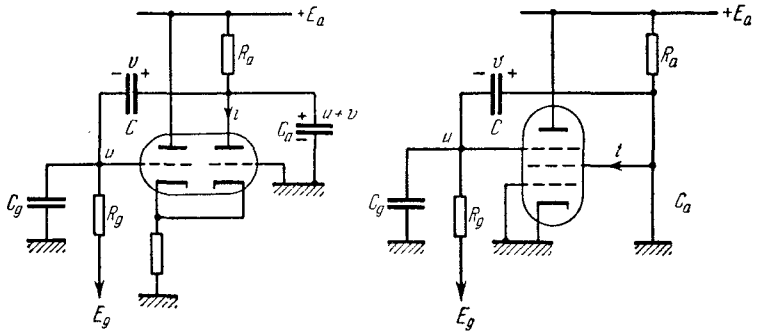

Рис. 381.

ния u на управляющем электроде лампы (или ламповой группы), имеет *падающий* участок. Ниже, как и раньше, мы будем пренебрегать анодной реакцией, т. е. будем считать, что i зависит только от u ($i = i(u)$), но в отличие от § 12 гл. V, чтобы иметь возможность применить метод точечных преобразований для исследования генератора, мы будем аппроксимировать эту зависимость кусочно-линейной функцией, график которой приведен на рис. 382. При этом ради дальнейшего упрощения задачи мы будем полагать сеточное смещение E_g выбранным таким образом, чтобы рабочая точка лампы, соответствующая состоянию равновесия генератора, лежала посередине падающего участка характеристики [59].

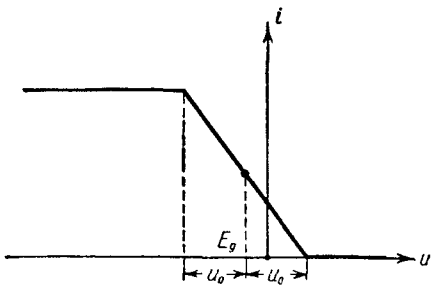

Рис. 382.

Уравнение колебаний рассматриваемого генератора с двухзвенной RC-цепочкой, как мы видели в § 12 гл. V, можно записать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \mu\dot{x} &= -x - y - K\varphi(x), \\ \dot{y} &= x, \end{aligned}\right\} \tag{8.30}$$

где x, y — переменные, связанные с напряжениями u и v соотношениями:

$$u = E_g + u_0 x,$$

$$v = E_a - E_g - R_a i(E_g) + u_0 \frac{C_g}{C} x + u_0 \left[1 + \frac{C_g}{C} + \frac{R_a}{R_g}\left(1 + \frac{C_a}{C}\right)\right] y$$

(за u_0 взята половина «длины» падающего участка характеристики; см. рис. 382);

$$\varphi(x)=\frac{1}{u_0 S}\{i(E_g+u_0 x)-i(E_g)\}=\begin{cases}+1 \text{ при } x<-1,\\ -x \text{ при } |x|\leqslant 1,\\ -1 \text{ при } x>+1\end{cases}$$

— приведенная (безразмерная) характеристика лампы (или ламповой группы) [1]); точкой сверху обозначено дифференцирование по безразмерному времени

$$t=\frac{t_{\text{обыч}}}{R_a(C+C_a)+R_g(C+C_g)}$$

и

$$K=\frac{SR_a}{1+\frac{C_g}{C}+\frac{R_a}{R_g}\left(1+\frac{C_a}{C}\right)},\quad \mu=\frac{R_a}{R_g}\frac{\frac{C_a}{C}+\frac{C_g}{C}+\frac{C_a}{C}\frac{C_g}{C}}{\left[1+\frac{C_g}{C}+\frac{R_a}{R_g}\left(1+\frac{C_a}{C}\right)\right]^2}$$

— безразмерные параметры $\left(K>0, \text{ а } 0<\mu<\frac{1}{4}\right)$ [2]).

Заметим, что система уравнений (8.30) эквивалентна уравнению

$$\mu\ddot{x}+[1+K\varphi'(x)]\dot{x}+x=0,$$

т. е. ламповый генератор с двухзвенной RC-цепочкой при кусочно-линейной аппроксимации характеристики ламповой группы эквивалентен динамической системе, уже рассмотренной в § 3 настоящей главы. Однако, имея в виду подробное рассмотрение колебаний генератора, близких к разрывным (они имеют место при C_a, $C_g \ll C$, т. е. при $0<\mu\ll 1$), мы проведем еще раз краткое исследование этой динамической системы, отправляясь теперь от уравнений (8.30), форма которых более удобна для указанной цели, и ограничиваясь случаем самовозбуждающегося генератора, т. е. полагая, что $K>1$.

1. Фазовая плоскость. Точечное преобразование. Так же как и в § 3 настоящей главы, фазовая плоскость x, y рассматриваемой динамической системы (8.30) разбивается прямыми $x=+1$ и $x=-1$ на три области: (*I*), (*II*) и (*III*), в каждой из которых уравнения (8.30) линейны (рис. 383); при этом траектории являются непрерывными кривыми при переходе через эти границы областей линейности, равно как и на всей фазовой плоскости. Кроме того, разбиение плоскости x, y

---

[1]) Под S мы понимаем абсолютное значение крутизны падающего участка характеристики $i=i(u)$.

[2]) Последнее неравенство связано с тем, что в двухзвенных RC-цепочках (в генераторе с выключенной лампой, т. е. с $K=0$) все процессы являются апериодически затухающими.

на траектории симметрично относительно начала координат — состояния равновесия (0,0) в силу соответствующей симметрии уравнений (8.30).

Качественное исследование системы (8.30) полностью аналогично исследованию системы (5.89), проведенному в § 12 гл. V. Именно,

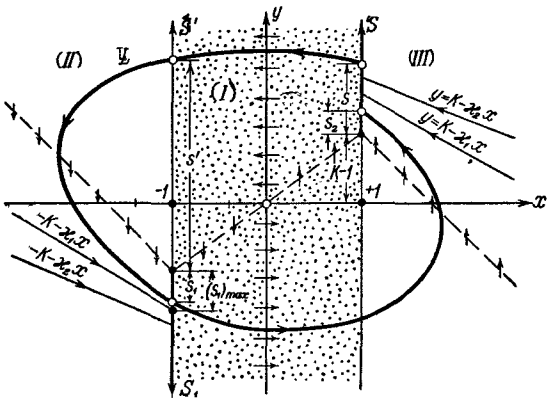

Рис. 383.

ось ординат ($x=0$) является изоклиной горизонтальных касательных (там $\dot{y}=0$), а ломаная

$$y=-x-K\varphi(x)$$

— изоклиной вертикальных касательных (на ней $\dot{x}=0$). В областях (*II*) и (*III*) имеются по две прямолинейных траектории $y=\mp K-\varkappa_{1,2}x$, где $\varkappa_{1,2}$ — величины, обратные (и по знаку, и по модулю) корням уравнения

$$\mu\lambda^2+\lambda+1=0, \tag{8.31}$$

являющегося характеристическим уравнением системы (8.30) в областях (*II*) и (*III*); поэтому $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ положительны.

Единственное состояние равновесия лежит в области (*I*) — в начале координат (0,0). Поскольку в области (*I*) характеристическое уравнение системы (8.30) записывается в виде:

$$\mu\lambda^2-(K-1)\lambda+1=0, \tag{8.32}$$

это состояние равновесия при $K>1$ неустойчиво, являясь при $4\mu>(K-1)^2$ фокусом и при $4\mu<(K-1)^2$ — узлом [1]).

[1]) При $K<1$ состояние равновесия (0, 0) устойчиво и все траектории системы асимптотически (при $t\to+\infty$) приближаются к нему.

Далее, так как бесконечность всегда неустойчива, то на фазовой плоскости при $K>1$ имеется по крайней мере один (и притом устойчивый) предельный цикл, симметричный относительно начала координат. На основании результатов § 3 настоящей главы можно утверждать, что этот предельный цикл — единственный.

Для отыскания этого предельного цикла сведем задачу к точечному преобразованию. Так как предельный цикл является симметричным [1]), должен охватывать состояние равновесия (0, 0) и в то же время не может лежать целиком в области (*I*), то он должен проходить во всех трех областях линейности, пересекая, в частности, прямые $x=+1$ и $x=-1$. Исходя из этого, возьмем в качестве «отрезка без контакта» полупрямую S: $x=+1$, $y=K-1+s$ (где $s>0$), через точки которой происходит переход фазовых траекторий из области (*III*) в область (*I*), и найдем точечное преобразование Π этой полупрямой самой в себя, осуществляемое траекториями системы (8.30). Так же как и в § 3, преобразование

$$\Pi=(\Pi')^2,$$

где Π' — точечное преобразование полупрямой S в симметричную ей полупрямую S_1 ($x=-1$, $y=-(K-1)-s_1$; $s_1>0$), осуществляемое траекториями системы (8.30), выходящими из точек полупрямой S. В свою очередь преобразование Π' представляется в виде произведения двух преобразований Π_1 и Π_2 — преобразований полупрямой S в полупрямую S': $x=-1$, $y=-(K-1)+s'$ ($s'>0$), и полупрямой S' в полупрямую S_1, осуществляемых траекториями соответственно в областях (*I*) и (*II*), т. е.

$$\Pi'=\Pi_1\cdot\Pi_2.$$

Нетрудно получить (тем же способом, что и в предыдущих параграфах) параметрические выражения для функций соответствия этих преобразований.

Для вычисления функции соответствия первого преобразования следует обратиться к дифференциальным уравнениям (8.30) в области (*I*), которые удобно переписать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}&\mu\ddot{y}-(K-1)\dot{y}+y=0,\\&x=\dot{y}.\end{aligned}\right\}\qquad(8.30\text{а})$$

Характеристическое уравнение этой системы (уравнение (8.32)) имеет при $4\mu>(K-1)^2$ комплексные корни $\lambda=h_1\pm j\omega$ и при $4\mu<(K-1)^2$ — действительные (положительные) корни $\lambda=h_1\pm\omega_1$

[1]) Доказательство симметричности предельного цикла полностью совпадает с доказательством, проведенным в § 3 настоящей главы.

$(h_1 > \omega_1)$, где

$$h_1 = \frac{K-1}{2\mu} \quad \text{и} \quad \omega_1 = +\frac{1}{2\mu}\sqrt{|(K-1)^2 - 4\mu|} = +\sqrt{\left|h_1^2 - \frac{1}{\mu}\right|}.$$

Пусть $4\mu > (K-1)^2$. Тогда общее решение уравнений (8.30а) записывается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} y &= e^{h_1 t}\left[\frac{x_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t + y_0\left(\cos\omega_1 t - \frac{h_1}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right)\right], \\ x &= e^{h_1 t}\left[x_0\left(\cos\omega_1 t + \frac{h_1}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) - \frac{y_0}{\mu\omega_1}\sin\omega_1 t\right] \end{aligned}\right\} \tag{8.33}$$

(x_0, y_0 — координаты начальной точки при $t=0$; см. § 4 гл. I). Для траектории L, выходящей (будем считать, при $t=0$) из точки s полупрямой S, в (8.33) следует положить: $x_0 = +1$, $y_0 = K - 1 + s$. Пусть t_1 — время пробега изображающей точки по траектории L в области (I) (от полупрямой S до полупрямой S'). Тогда при $t = t_1 > 0$ $x = -1$ и $y = -(K-1) + s'$, т. е.

$$-(K-1) + s' = e^{\gamma_1\tau_1}\left[\frac{1}{\omega_1}\sin\tau_1 + (K-1+s)(\cos\tau_1 - \gamma_1\sin\tau_1)\right],$$

$$-1 = e^{\gamma_1\tau_1}\left[\cos\tau_1 + \gamma_1\sin\tau_1 - \frac{1}{\mu\omega_1}(K-1+s)\sin\tau_1\right],$$

где

$$\tau_1 = \omega_1 t_1 \quad \text{и} \quad \gamma_1 = \frac{h_1}{\omega_1} = \frac{K-1}{+\sqrt{|(K-1)^2 - 4\mu|}}. \tag{8.34}$$

Разрешая второе из полученных соотношений относительно s, а затем первое — относительно s', получим функцию соответствия преобразования Π_1 (при $4\mu > (K-1)^2$), связывающую s и s', в следующем параметрическом виде:

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{K-1}{2}\,\frac{e^{-\gamma_1\tau_1} + \cos\tau_1 - \gamma_1\sin\tau_1}{\gamma_1\sin\tau_1}, \\ s' &= \frac{K-1}{2}\,\frac{e^{\gamma_1\tau_1} + \cos\tau_1 + \gamma_1\sin\tau_1}{\gamma_1\sin\tau_1}, \end{aligned}\right\} \tag{8.35}$$

так как

$$\mu\omega_1 = \mu h_1\frac{\omega_1}{h_1} = \frac{K-1}{2\gamma_1}\ ^{1}).$$

---

[1]) Выражение для s' можно получить и иначе, путем замены в выражении для s: s на $-s'$ и τ_1 на $-\tau_1$. В самом деле, пусть

$$x = x_0 f_1(t) + y_0 f_2(t), \qquad y = x_0 f_3(t) + y_0 f_4(t)$$

— уравнение траектории в области (I), проходящей через точки s и s' (x_0, y_0 — значения x, y при $t=0$), и пусть t_1 ($t_1 > 0$) — время пробега изображающей точки по этой траектории от точки s до точки s'. Возьмем за начало отсчета

Аналогично при $4\mu < (K-1)^2$, когда корни характеристического уравнения (8.32) действительные и общее решение уравнений (8.30а) получается из (8.33) заменой тригонометрических функций на соответствующие гиперболические, мы получим для функции соответствия преобразования Π_1:

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{K-1}{2}\,\frac{e^{-\gamma_1\tau_1} + \operatorname{ch}\tau_1 - \gamma_1 \operatorname{sh}\tau_1}{\gamma_1 \operatorname{sh}\tau_1}, \\ s' &= \frac{K-1}{2}\,\frac{e^{\gamma_1\tau_1} + \operatorname{ch}\tau_1 + \gamma_1 \operatorname{sh}\tau_1}{\gamma_1 \operatorname{sh}\tau_1} \end{aligned}\right\} \qquad (8.36)$$

(значения τ_1 и γ_1 по-прежнему даются выражением (8.34), но теперь $\gamma_1 > 1$).

В области (II) уравнения (8.30) могут быть записаны в виде:

$$\left.\begin{aligned} \mu\ddot{y} + \dot{y} + y &= -K, \\ x &= \dot{y}. \end{aligned}\right\} \qquad (8.30б)$$

Характеристическое уравнение (8.31) для этой системы всегда $\left(\text{напомним, что } 0 < \mu < \frac{1}{4}\right)$ имеет действительные отрицательные корни $\lambda = -h_2 \pm \omega_2$, где

$$h_2 = \frac{1}{2\mu} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{1-4\mu}}{2\mu}$$

(причем $h_2 > \omega_2$). Следовательно, общее решение уравнений (8.30б) может быть записано в виде:

$$\left.\begin{aligned} y &= -K + e^{-h_2 t}\left[\frac{x_0}{\omega_2}\operatorname{sh}\omega_2 t + (y_0 + K)\left(\operatorname{ch}\omega_2 t + \frac{h_2}{\omega_2}\operatorname{sh}\omega_2 t\right)\right], \\ x &= e^{-h_2 t}\left[x_0\left(\operatorname{ch}\omega_2 t - \frac{h_2}{\omega_2}\operatorname{sh}\omega_2 t\right) - \frac{y_0 + K}{\mu\omega_2}\operatorname{sh}\omega_2 t\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (8.37)$$

времени тот момент, когда изображающая точка находилась в s ($x_0 = +1$, $y_0 = K - 1 + s$). Тогда при $t = t_1$ $x = -1$, т. е.

$$-1 = f_1(t_1) + (K - 1 + s) f_2(t_1),$$

откуда

$$s = -\frac{1 + f_1(t_1)}{f_2(t_1)} - (K-1) = \Phi_1(t_1).$$

Воспользуемся произволом в выборе начала отсчета времени и возьмем теперь за момент $t = 0$ тот момент, когда изображающая точка находилась в s' ($x_0 = -1$, $y_0 = -(K-1) + s'$). Тогда при $t = -t_1$ $x = +1$, что дает:

$$+1 = -f_1(-t_1) - (K - 1 - s') f_2(-t_1),$$

т. е.

$$s' = \frac{1 + f_1(-t_1)}{f_2(-t_1)} + (K-1) = -\Phi_1(-t_1).$$

Таким образом, s' получается из выражения для s заменой t_1 на $-t_1$ (или τ_1 на $-\tau_1$) и дополнительной сменой знака.

Пусть при $t=0$ $x=x_0=-1$, $y=y_0=-(K-1)+s'$, а при $t=t_2=\frac{\tau_2}{\omega_2}>0$ $x=-1$, $y=-(K-1)-s_1$ (t_2 — время пробега изображающей точки по траектории L в области (II) от точки s' до точки s_1). Тогда второе соотношение (8.37) дает:

$$-1=e^{-\gamma_2\tau_2}\left[-(\operatorname{ch}\tau_2-\gamma_2\operatorname{sh}\tau_2)-\frac{1}{\mu\omega_2}(1+s')\operatorname{sh}\tau_2\right],$$

где

$$\tau_2=\omega_2 t_2 \quad \text{и} \quad \gamma_2=\frac{h_2}{\omega_2}=\frac{1}{\sqrt{1-4\mu}}>1. \tag{8.38}$$

Разрешая полученное уравнение относительно s', используя соотношение $\mu\omega_2=\mu h_2\frac{\omega_2}{h_2}=\frac{1}{2\gamma_2}$ и затем заменяя в полученном выражении для s': s' на $-s_1$ и τ_2 на $-\tau_2$, мы получим функцию соответствия для преобразования Π_2[1]):

$$\left.\begin{aligned} s_1&=\frac{e^{-\gamma_2\tau_2}-\operatorname{ch}\tau_2+\gamma_2\operatorname{sh}\tau_2}{2\gamma_2\operatorname{sh}\tau_2},\\ s'&=\frac{e^{\gamma_2\tau_2}-\operatorname{ch}\tau_2-\gamma_2\operatorname{sh}\tau_2}{2\gamma_2\operatorname{sh}\tau_2}. \end{aligned}\right\} \tag{8.39}$$

2. Исследование функций соответствия. Исследование функций соответствия преобразований Π_1 и Π_2 мы начнем с функции соответствия преобразования Π_1 для случая $4\mu>(K-1)^2$ ($K>1$), когда состояние равновесия (0, 0) является неустойчивым фокусом, траектории в области (I) — спиралями, раскручивающимися от фокуса, а сама функция соответствия выражается соотношениями (8.35). Так как изображающая точка, двигаясь от точки s до точки s' по дуге спиральной траектории в области (I), совершает менее половины оборота вокруг фокуса (0, 0), то параметр преобразования τ_1 — приведенное время пробега изображающей точки в области (I) — заведомо удовлетворяет неравенству $0<\tau_1<\pi$, причем меньшим τ_1 соответствуют бо́льшие s и s'[2]). Обозначим значение τ_1, соответствующее $s=0$, через τ_1^0; это пограничное значение параметра τ_1, очевидно, определяется уравнением

$$\psi_1(\tau_1,\ \gamma_1)=0,$$

где

$$\psi_1(\tau,\ \gamma)=1+e^{\gamma\tau}(\cos\tau-\gamma\sin\tau)$$

---

[1]) Доказательство указанного способа получения выражения для s_1 полностью аналогично доказательству, приведенному в примечании на стр. 544.

[2]) Это вполне понятно, так как по траекториям с бо́льшими y изображающая точка двигается быстрее: чем больше y, тем больше $|\dot{x}|$ (в силу первого уравнения (8.30)) и тем меньше $t_1(\tau_1)$; при $y\to+\infty$ $\dot{x}\to-\infty$ и $t_1\to 0$.

(график этой функции и графическое решение уравнения для τ_1^0 приведены на рис. 384; ясно, что $0<\tau_1^0<\pi$). Тогда, изменяя τ_1 от τ_1^0 до 0, мы переберем все множество значений s от 0 до $+\infty$; одновременно s' будет также монотонно возрастать от некоторого положительного значения

$$s_0'=(K-1)\left[\frac{\operatorname{sh}\gamma_1\tau_1^0}{\gamma_1\sin\tau_1^0}+1\right]>$$
$$>2(K-1)$$

также до $+\infty$.

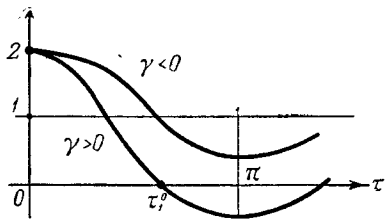

Рис. 384.

Дифференцируя (8.35), получим:

$$\frac{ds}{d\tau_1}=-\frac{K-1}{2\gamma_1}\cdot\frac{1+e^{-\gamma_1\tau_1}(\cos\tau_1+\gamma_1\sin\tau_1)}{\sin^2\tau_1}=-\frac{K-1}{2\gamma_1}\frac{\psi_1(\tau_1,-\gamma_1)}{\sin^2\tau_1},$$

$$\frac{ds'}{d\tau_1}=-\frac{K-1}{2\gamma_1}\cdot\frac{1+e^{\gamma_1\tau_1}(\cos\tau_1-\gamma_1\sin\tau_1)}{\sin^2\tau_1}=-\frac{K-1}{2\gamma_1}\frac{\psi_1(\tau_1,\gamma_1)}{\sin^2\tau_1},$$

$$\frac{ds}{ds'}=\frac{\psi_1(\tau_1,-\gamma_1)}{\psi_1(\tau_1,\gamma_1)}$$

и

$$\frac{d^2s}{ds'^2}=-\frac{4\gamma_1(\gamma_1^2+1)\sin^3\tau_1}{(K-1)[\psi_1(\tau_1,\gamma_1)]^3}\{\operatorname{sh}\gamma_1\tau_1-\gamma_1\sin\tau_1\}.$$

Так как при $0<\tau_1<\tau_1^0$ $\psi_1(\tau_1,\gamma_1)$ и $\psi_1(\tau_1,-\gamma_1)>0$, то в этом интервале изменения τ_1 $\frac{ds}{d\tau_1}<0$, $\frac{ds'}{d\tau_1}<0$, $\frac{ds}{ds'}>0$; более того, $\frac{ds}{ds'}$ изменяется монотонно от $+\infty$ до $+1$ (при уменьшении τ_1 от τ_1^0 до 0 или при увеличении s от 0 до $+\infty$), поскольку $\frac{d^2s}{ds'^2}<0$.

Заметим, что

$$s'-s=(K-1)\left\{\frac{\operatorname{sh}\gamma_1\tau_1}{\gamma_1\sin\tau_1}+1\right\}>2(K-1)$$

и при $\tau_1\to+0$ $s'-s\to2(K-1)$, т. е. кривая (8.35) имеет асимптоту

$$s=s'-2(K-1).$$

Этих сведений достаточно для построения графика функции соответствия (8.35); он приведен на рис. 385.

Аналогично, при $4\mu<(K-1)^2$, когда функция соответствия преобразования Π_1 записывается в виде (8.36), параметр преобразо-

вания τ_1 также заключен в интервале $0<\tau_1<\tau_1^0$, где τ_1^0 — значение параметра τ_1 для точки $s=0$ и определяется теперь уравнением

$$\psi_2(\tau_1, \gamma_1) \equiv \frac{1}{\gamma_1} e^{\tau_1} - \operatorname{ch}\tau_1 - \gamma_1 \operatorname{sh}\tau_1 = 0$$

(график функции $\psi_2(\tau, \gamma)$ для $\gamma=\gamma_1>1$ и $\gamma=-\gamma_1<-1$ приведен на рис. 386). При этом при уменьшении τ_1 от τ_1^0 до 0

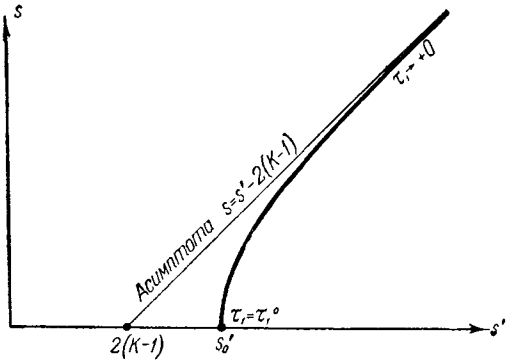

Рис. 385.

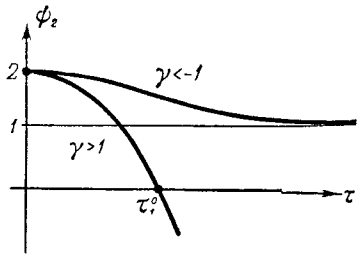

Рис. 386.

(так же как и в предыдущем случае) s монотонно возрастает от 0 до $+\infty$, s' — от некоторого положительного значения

$$s_0' = (K-1)\left\{\frac{\operatorname{sh}\gamma_1\tau_1^0}{\gamma_1 \operatorname{sh}\tau_1^0} + 1\right\} > 2(K-1)$$

также до $+\infty$ [1]); производная $\frac{ds}{ds'} = \frac{\psi_2(\tau_1, -\gamma_1)}{\psi_2(\tau_1, \gamma_1)}$ монотонно убывает от $+\infty$ до $+1$, так как

$$\frac{d^2s}{ds'^2} = -\frac{4\gamma_1(\gamma_1^2-1)\operatorname{sh}^3\tau_1}{(K-1)[\psi_2(\tau_1, \gamma_1)]^3}\{\operatorname{sh}\gamma_1\tau_1 - \gamma_1\operatorname{sh}\tau_1\} < 0$$

при $0<\tau_1<\tau_1^0$. Таким образом, график функции соответствия (8.36) имеет тот же вид, что и график функции соответствия (8.35) (рис. 385).

Перейдем к рассмотрению функции соответствия преобразования Π_2 — функции (8.39). Здесь, для того чтобы перебрать все множество точек полупрямой (s'): $0<s'<+\infty$, мы должны изменять параметр преобразования τ_2 от 0 до $+\infty$, причем (в отличие от только что рассмотренной функции соответствия преобразования Π_1) при изменении τ_2 от 0 до $+\infty$ s' монотонно возрастает от 0 до $+\infty$, а s_1 — от 0 до $(s_1)_{\max} = \frac{\gamma_2^2-1}{2\gamma_2} > 0$ [2]).

---

[1]) Кривая (8.36) имеет при $\tau_1 \to 0$ асимптоту $s = s' - 2(K-1)$.

[2]) Все сказанное можно усмотреть из следующих элементарных рассуждений относительно хода траекторий в области (*II*). Во-первых, так как траектории пересекаться не могут, то при увеличении s' мы будем получать

Для доказательства монотонности возрастания s' и s_1 (при увеличении τ_2 от 0 до $+\infty$) достаточно вычислить производные $\frac{ds}{d\tau_2}$ и $\frac{ds_1}{d\tau_2}$. Нетрудно видеть, что

$$\frac{ds_1}{d\tau_2}=\frac{\psi_3(\tau_2,\ -\gamma_2)}{2\gamma_2\,\mathrm{sh}^2\,\tau_2},\qquad \frac{ds'}{d\tau_2}=\frac{\psi_3(\tau_2,\ \gamma_2)}{2\gamma_2\,\mathrm{sh}^2\,\tau_2},\qquad \frac{ds_1}{ds'}=\frac{\psi_3(\tau_2,\ -\gamma_2)}{\psi_3(\tau_2,\ \gamma_2)}$$

и

$$\frac{d^2s_1}{ds'^2}=-\frac{4\gamma_2(\gamma_2^2-1)\,\mathrm{sh}^3\,\tau_2}{[\psi_3(\tau_2,\ \gamma_2)]^3}\{\mathrm{sh}\,\gamma_2\tau_2-\gamma_2\,\mathrm{sh}\,\tau_2\},$$

где

$$\psi_3(\tau,\ \gamma)=1-e^{\gamma\tau}(\mathrm{ch}\,\tau-\gamma\,\mathrm{sh}\,\tau)=2-\psi_2(\tau,\ \gamma).$$

Так как $\gamma_2>1$ и при $|\gamma|>1$ и $\tau>0$ $\psi_3(\tau,\ \gamma)>0$ [1]), то при любых $0<\tau_2<+\infty$

$$\frac{ds_1}{d\tau_2}>0,\quad \frac{ds'}{d\tau_2}>0,\quad 0<\frac{ds_1}{ds'}<1,\quad \frac{d^2s_1}{ds'^2}<0$$

(при изменении τ_2 от 0 до $+\infty$ или s' от 0 до $+\infty$ $\frac{ds_1}{ds'}$ монотонно

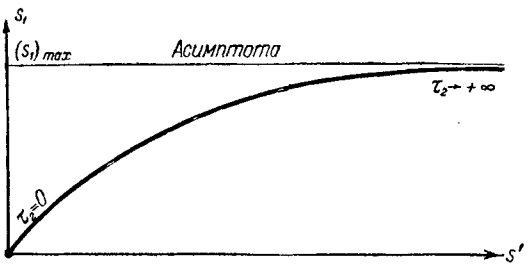

Рис. 387.

убывает от 1 до 0). На рис. 387 изображен график рассмотренной нами функции соответствия преобразования Π_2.

3. Диаграмма Ламерея. На рис. 388 построена диаграмма Ламерея — графики функций соответствия преобразований Π_1 и Π_2,

---

также и увеличение s_1; при этом бо́льшим s' будут соответствовать бо́льшие длины дуг траекторий между точками s' и s_1 и, естественно, бо́льшие времена пробега t_2 (бо́льшие τ_2). Во-вторых, все траектории, выходящие в область (II) с полупрямой (s'), идут над прямолинейной траекторией $y=-K-\varkappa_1 x$; поэтому $s_1<(s_1)_{max}$, где $(s_1)_{max}$ — значение s_1 для точки пересечения этой прямолинейной траектории с полупрямой S_1. Предельные значения s' и s_1 (при $\tau_2\to 0$ и при $\tau_2\to+\infty$) можно найти, применяя правило Лопиталя.

[1]) Для доказательства неравенства достаточно заметить, что $\psi_3(0,\ \gamma)=0$ и при $|\gamma|>1$ и $\tau>0$ $\frac{\partial\psi_3}{\partial\tau_2}=(\gamma^2-1)e^{\gamma\tau}\,\mathrm{sh}\,\tau>0$,

нанесенные на общей плоскости (по оси абсцисс отложено s', по оси ординат — s и s_1). Эти графики имеют единственную точку пересечения — неподвижную точку преобразования Π'. Существование неподвижной точки вытекает из непрерывности функций соответствия и выполнения неравенств: $s_1 - s > 0$ при $s' = s_0'$ и $s_1 - s < 0$ при достаточно больших s', единственность — из неравенств $0 < \frac{ds_1}{ds'} < 1 < \frac{ds}{ds'}$, имеющих место при любых $s' \geqslant s_0'$ и, в частности, в неподвижной точке, которая, следовательно, является устойчивой.

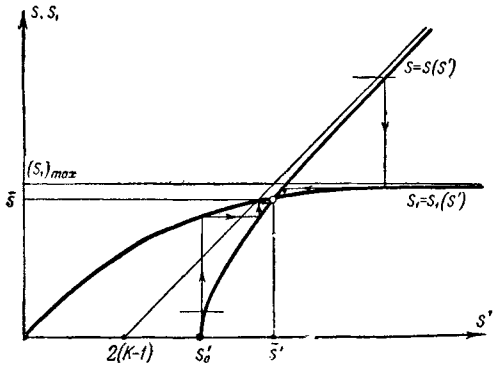

Рис. 388.

Аналитически неподвижная точка преобразования Π' определяется системой трансцендентных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{K-1}{2}\,\frac{e^{-\gamma_1\tau_1}+\cos\tau_1-\gamma_1\sin\tau_1}{\gamma_1\sin\tau_1} &= \frac{e^{-\gamma_2\tau_2}-\operatorname{ch}\tau_2+\gamma_2\operatorname{sh}\tau_2}{2\gamma_2\operatorname{sh}\tau_2},\\ \frac{K-1}{2}\,\frac{e^{\gamma_1\tau_1}+\cos\tau_1+\gamma_1\sin\tau_1}{\gamma_1\sin\tau_1} &= \frac{e^{\gamma_2\tau_2}-\operatorname{ch}\tau_2-\gamma_2\operatorname{sh}\tau_2}{2\gamma_2\operatorname{sh}\tau_2} \end{aligned}\right\} \quad (8.40)$$

при $4\mu > (K-1)^2$ и системой

$$\left.\begin{aligned} \frac{K-1}{2}\,\frac{e^{-\gamma_1\tau_1}+\operatorname{ch}\tau_1-\gamma_1\operatorname{sh}\tau_1}{\gamma_1\operatorname{sh}\tau_1} &= \frac{e^{-\gamma_2\tau_2}-\operatorname{ch}\tau_2+\gamma_2\operatorname{sh}\tau_2}{2\gamma_2\operatorname{sh}\tau_2},\\ \frac{K-1}{2}\,\frac{e^{\gamma_1\tau_1}+\operatorname{ch}\tau_1+\gamma_1\operatorname{sh}\tau_1}{\gamma_1\operatorname{sh}\tau_1} &= \frac{e^{\gamma_2\tau_2}-\operatorname{ch}\tau_2-\gamma_2\operatorname{sh}\tau_2}{2\gamma_2\operatorname{sh}\tau_2} \end{aligned}\right\} \quad (8.40a)$$

при $4\mu < (K-1)^2$.

Итак, точечное преобразование Π' полупрямой S в полупрямую S_1 имеет единственную и притом устойчивую неподвижную точку ($s = s_1 = \bar{s}$, $s' = \bar{s}'$). Соответственно, на фазовой плоскости имеется единственный (симметричный и устойчивый) предельный цикл, к которому стремятся при $t \to +\infty$ все фазовые траектории (рис. 389), — в схеме при $K > 1$ и при любых начальных условиях устанавливаются автоколебания [1]).

---

[1]) На рис. 389 изображено разбиение фазовой плоскости на траектории для случая $K > 1 + 2\sqrt{\mu}$, когда состояние равновесия является неустойчивым узлом.

Период автоколебаний, очевидно, равен

$$\tau = 2\left(\frac{\bar{\tau}_1}{\omega_1} + \frac{\bar{\tau}_2}{\omega_2}\right)$$

(в единицах безразмерного времени) и

$$T = 2\left[R_a(C + C_1) + R_g C\right]\left(\frac{\bar{\tau}_1}{\omega_1} + \frac{\bar{\tau}_2}{\omega_2}\right)$$

(в обычных единицах), где $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2$ $(0 < \bar{\tau}_1 < \tau_1^0,\ 0 < \bar{\tau}_2 < +\infty)$ —значения τ_1 и τ_2, соответствующие неподвижной точке и определяемые

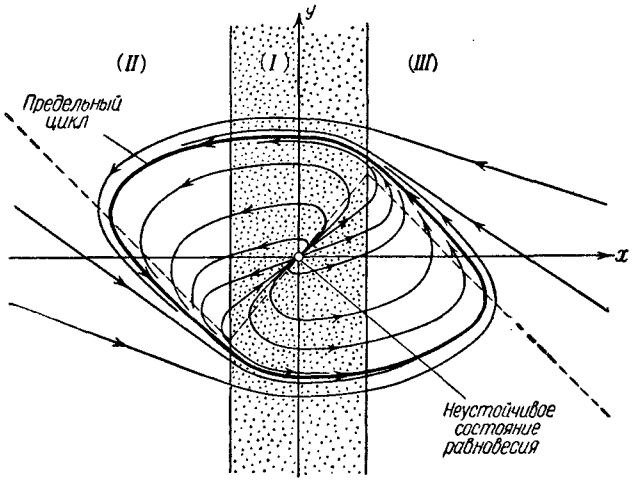

Рис. 389.

однозначно системой уравнений (8.40) при $4\mu > (K-1)^2$ и системой (8.40а) при $4\mu < (K-1)^2$.

Отметим сразу же один предельный случай. Если $K \to 1$ (но $K > 1$), то предельный цикл стремится к окружности $x^2 + y^2 = 1$, так как $\bar{\tau}_1 \to \pi$ и $\bar{\tau}_2 \to 0$, а автоколебания близки к синусоидальным с периодом $2\pi\left[R_a(C + C_1) + R_g(C + C_g)\right]$.

4. Разрывные колебания. Рассмотрим теперь другой, весьма интересный предельный случай

$$\mu \ll 1, \quad \mu \ll \frac{1}{4}(K-1)^2$$

— случай мультивибратора с одной RC-цепью (малые, паразитные емкости C_a, $C_g \ll C$), когда автоколебания в схеме носят разрывный характер. Разрывные колебания, как мы увидим в гл. X, отображаются дифференциальными уравнениями с малыми коэффициентами при

старших производных, и система (8.30) при малом μ является примером (достаточно простым, но типичным) подобных динамических систем.

Для получения разбиения фазовой плоскости x, y на траектории системы (8.30) при *достаточно малых* μ выпишем уравнение интегральных кривых

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\mu x}{x + y + K\varphi(x)} \tag{8.41}$$

и построим на плоскости x, y изоклину вертикальных касательных — кривую F

$$y = -x - K\varphi(x) \tag{8.42}$$

$\left(\text{на ней } \dot{x} = 0 \text{ и } \frac{dy}{dx} = \infty\right)$.

Из уравнений (8.30) и (8.41) следует, что при достаточно малых μ (при $\mu \to +0$) $|\dot{x}|$ быстро возрастает, а $\left|\frac{dy}{dx}\right|$ быстро убывает при удалении от изоклины F: в точках (x, y) на расстояниях порядка μ от нее $\dot{x}$ и $\frac{dy}{dx} = O(1)$, а уже на расстояниях порядка $\sqrt{\mu}$ $\dot{x} = O(\mu^{-1/2})$ и $\frac{dy}{dx} = O(\mu^{1/2})$, т. е. $\dot{x} \to \infty$, а $\frac{dy}{dx} \to 0$ при $\mu \to +0$ [1]). Следовательно, при достаточно малых μ фазовые траектории вне $\sqrt{\mu}$-окрестности кривой F сколь угодно близки к горизонтальным прямым $y = \text{const}$ $\left(\text{там } \frac{dy}{dx} \to 0 \text{ при } \mu \to +0, \text{ по крайней мере, как } \sqrt{\mu}\right)$, и изображающая точка движется по ним *сколь угодно быстро* $\left(\dot{x} \to \infty \text{ как } \frac{1}{\sqrt{\mu}} \text{ или быстрее}\right)$ [2]). При этом изображающая точка движется вправо в точках, лежащих под изоклиной F $\left(\text{там } -x - y - K\varphi(x) > 0 \text{ и } \dot{x} = \frac{-x - y - K\varphi(x)}{\mu} \to +\infty\right)$, и влево — над ней (рис. 390). Эти траектории сколь угодно быстрых, скачкообразных движений системы (в пределе мгновенных скачков) идут из бесконечности и от отрезка CA изоклины F к полупрямым F_1^+ и F_2^+, являющимся частями изоклины F, лежащими в областях (*II*)

---

[1]) Здесь и ниже мы обозначаем через $O[f(\mu)]$ функции, которые ведут себя при малых μ как $f(\mu)$; запись $g(x, y, \mu) = O[f(\mu)]$ означает, что при $\mu \to +0$ отношение $\frac{g(x, y, \mu)}{f(\mu)}$ стремится к конечному пределу (вообще говоря, зависящему от x, y).

[2]) Под ε-окрестностью некоторой кривой, как и раньше, понимается множество всех точек, расстояния от которых до данной кривой не превышают ε. Очевидно, $\sqrt{\mu}$-окрестность кривой F стягивается к F при $\mu \to 0$.

и (*III*). В μ-окрестностях полупрямых F_1^- и F_2^+ $\dot{x}$ остается ограниченной величиной при $\mu \to +0$, т. е. в этих окрестностях лежат траектории «медленных» движений системы (движений с фазовыми скоростями, остающимися ограниченными при $\mu \to +0$)[1]. Медленное

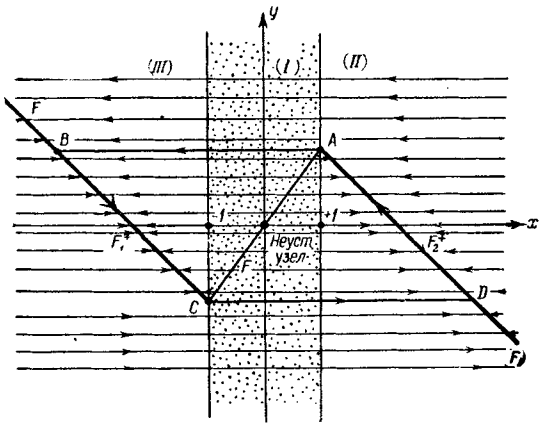

Рис. 390.

движение изображающей точки переходит в сколь угодно быстрое, скачкообразное в $\sqrt{\mu}$-окрестностях точек A и C.

Таким образом, движение изображающей точки системы (8.30) при достаточно малых μ будет слагаться из чередующихся сколь угодно быстрых, скачкообразных движений по траекториям, сколь угодно близким к горизонтальным прямым $y = \text{const}$, и «медленных» движений по траекториям, лежащим в μ-окрестностях полупрямых F_1^- и F_2^+. На рис. 390 изображено *предельное* (при $\mu \to +0$) разбиение фазовой плоскости на траектории: траектории скачкообразных движений (мгновенных скачков) изображены прямыми $y = \text{const}$, траектории «медленных» движений — полупрямыми F_1^+ и F_2^+. Предельным циклом будет замкнутая кривая $ABCDA$[2].

---

[1]) Напомним, что $\dot{y} = x$ и, следовательно, остается ограниченной величиной при $\mu \to +0$ и внутри окрестности кривой F, и вне ее.

[2]) Приближенные (асимптотические) уравнения движения рассматриваемой системы при достаточно малых μ можно записать в виде:

$$\mu \dot{x} = -x - y_0 - K\varphi(x) \qquad \text{(A)}$$

во время скачкообразного движения по траектории $y = y_0 = \text{const}$ (но вне некоторой окрестности кривой F) и

$$\left.\begin{aligned} \dot{y} &= x \\ y &= -x - K\varphi(x) \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \dot{x}\,[1 + K\varphi'(x)] + x = 0 \qquad \text{(B)}$$

Докажем теперь строго, что кривая $ABCDA$ действительно является предельным положением предельного цикла системы (8.30) при $\mu \to +0$. Доказательство проведем путем построения на фазовой плоскости такой области (ε), которая содержала бы

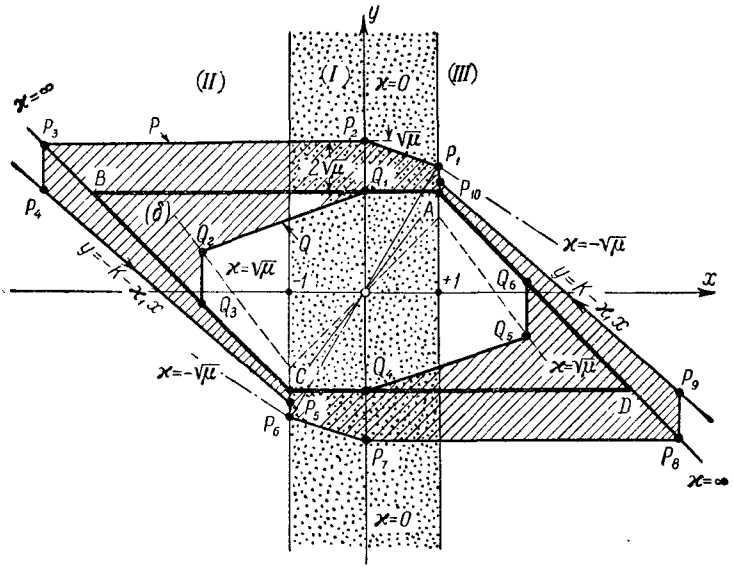

Рис. 391.

внутри себя (или на своей границе) кривую $ABCDA$, стягивалась к последней при $\mu \to +0$ и из которой фазовые траектории *не могли бы выходить* (при возрастании t). С этой целью построим на фазовой плоскости (рис. 391) изоклины $\varkappa = 0$ (ось y), $\varkappa = \infty$ (кривую F, см. рис. 390), изоклины $\varkappa = -\sqrt{\mu}$ и

во время «медленного» движения (вблизи F_1^+ и F_2^+). Уравнением (В) мы пользовались при рассмотрении мультивибратора в § 7 гл. IV, заменяя динамическое рассмотрение быстрых (при C_a, $C_g \ll C$) процессов постулатом скачка. Этот постулат (система из состояний $|x| \leqslant 1$ мгновенно «перепрыгивает» в состояния $|x| > 1$, причем при скачке y, т. е. напряжение на конденсаторе C, остается неизменным) теперь получается *как следствие динамических уравнений* (8.30) при $\mu \to +0$.

Интегрируя на участках BC и DA уравнение «медленного» движения $\dot{x} + x = 0$ (см. § 7 гл. IV), мы получим предельное выражение для периода автоколебаний: $\lim\limits_{\mu \to +0} \tau = 2 \ln (2K - 1)$, так как для периодического движения при $\mu \to +0$ время пробега изображающей точки в области (I) $\bar{t}_1 \to +0$ и в области (II) $\bar{t}_2 \to \ln (2K - 1)$.

$\varkappa = +\sqrt{\mu}$ [1]), а также замкнутые кривые P и Q, симметричные относительно начала координат и составленные из отрезков прямых следующим образом.

Построение первого контура P (контура $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8P_9P_{10}P_1$) начнем с точки P_1 $(1, K-1+\sqrt{\mu})$, являющейся точкой пересечения изоклины $\varkappa = -\sqrt{\mu}$ с прямой $x = +1$. Отрезок P_1P_2 имеет угловой коэффициент, равный $-\sqrt{\mu}$, и соединяет точки P_1 и P_2 $(0, K-1+2\sqrt{\mu})$. Далее проводим горизонтальный отрезок P_2P_3 до пересечения с изоклиной $\varkappa = \infty$, затем вертикальный отрезок P_3P_4 до пересечения с прямолинейной траекторией системы (8.30) в области (II):

$$y = -K - \varkappa_1 x, \quad \text{где} \quad \varkappa_1 = \frac{1+\sqrt{1-4\mu}}{2} = 1 + O(\mu);$$

P_4P_5 представляет собой отрезок этой траектории и, наконец, P_5P_6 — отрезок прямой $x = -1$, причем точка P_6 $(-1, -K+1-\sqrt{\mu})$ симметрична точке P_1 и расположена ниже точки P_5 $(-1, -K-\varkappa_1)$. Вторая половина контура P симметрична только что построенной ломаной.

Половина контура Q состоит из отрезка AQ_1 горизонтальной прямой $y = K-1$ (точка Q_1 лежит на оси ординат), отрезка Q_1Q_2 с угловым коэффициентом, равным $+\sqrt{\mu}$ (точка Q_2 лежит на изоклине $\varkappa = +\sqrt{\mu}$), вертикального отрезка Q_2Q_3, проведенного до пересечения с изоклиной $\varkappa = \infty$, и из отрезка Q_3C изоклины $\varkappa = \infty$; вторая половина контура Q (ломаная $CQ_4Q_5Q_6A$) симметрична первой.

Покажем, что область (ε), заключенная между контурами P и Q (на рис. 391 она заштрихована), удовлетворяет всем поставленным выше требованиям. Эта область, во-первых, содержит внутри себя (или на своей границе) кривую $ABCDA$ и стягивается к ней при $\mu \to +0$, так как наибольшие расстояния кривых P и Q (границ области (ε)) от кривой $ABCDA$ не превышают соответственно $2\sqrt{\mu}$ и $(2K-1)\sqrt{\mu}$ и, следовательно, стремятся к нулю при $\mu \to +0$. Во-вторых, фазовые траектории не могут выйти из области (ε) (при

---

[1]) Согласно (8.41) уравнением изоклины $\frac{dy}{dx} = \varkappa$ будет

$$\varkappa = -\frac{\mu x}{x + y + K\varphi(x)} \quad \text{или} \quad y = -\left(1 + \frac{\mu}{\varkappa}\right)x - K\varphi(x),$$

следовательно, изоклинами $\varkappa = \pm\sqrt{\mu}$ будут ломаные

$$y = -(1 \pm \sqrt{\mu})\,x - K\varphi(x).$$

возрастающем t), ибо на ее границах траектории либо касаются границ, либо пересекают их, входя в область (ε).

Для доказательства последнего утверждения достаточно рассмотреть ход траекторий системы (8.30) на ломаных $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ и $AQ_1Q_2Q_3C$. На отрезке P_1P_2, лежащем между изоклинами $\varkappa = -\sqrt{\mu}$ и $\varkappa = 0$ над изоклиной F, $-\sqrt{\mu} \leqslant \frac{dy}{dx} \leqslant 0$ и $\dot{x} < 0$; там траектории имеют меньший наклон, чем сам отрезок, изображающие точки двигаются влево и, следовательно, входят в область (ε) (исключение составляет точка P_1, в которой траектория касается отрезка P_1P_2). На отрезке P_2P_3 $\dot{y} = x \leqslant 0$ (траектории идут вниз), на P_3P_4 и P_5P_6 $\dot{x} > 0$, ибо они расположены под кривой F (траектории идут вправо). Отрезок P_4P_5 сам является траекторией и поэтому не может пересекаться другими траекториями. Таким образом, траектории системы (8.30) на половине $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ контура P либо касаются этого контура, либо пересекают его, входя в область (ε). То же самое (в силу симметрии траекторий) можно сказать и относительно хода траекторий на второй половине контура P.

Аналогично на AQ_1 $\dot{y} = x \geqslant 0$, на отрезке Q_1Q_2, заключенном между изоклинами $\varkappa = 0$ и $\varkappa = +\sqrt{\mu}$, $0 \leqslant \frac{dy}{dx} \leqslant +\sqrt{\mu}$ и $\dot{x} < 0$, на Q_2Q_3 $\dot{x} \leqslant 0$ и на Q_3C $\dot{x} = 0$, но $\dot{y} < 0$. Отсюда следует, что траектории только входят в область (ε) и через ее внутреннюю границу Q (мы доказали это для одной половины контура $AQ_1Q_2Q_3C$, но в силу симметрии траекторий это утверждение справедливо также и для другой половины $CQ_4Q_5Q_6A$ контура Q).

Итак, фазовые траектории системы (8.39) на границах области (ε) — на контурах P и Q — либо касаются, либо пересекают их, входя в область (ε). Так как эта область не содержит состояний равновесия, то согласно известной теореме качественной теории дифференциальных уравнений второго порядка (см. теорему V § 2 гл. VI) в ней существует устойчивый предельный цикл. Тем самым мы показали, что единственный и устойчивый предельный цикл системы (8.30) находится в построенной нами области (ε) и, следовательно, стремится к $ABCDA$ при $\mu \to +0$ [1]).

5. Период автоколебаний при малых μ. Асимптотическая формула для периода разрывных автоколебаний

$$\tau = 2\ln(2K - 1), \tag{8.43}$$

найденная ранее (см., например, § 7 гл. IV), оказывается, дает довольно значительные погрешности для периода автоколебаний мульти-

[1]) Это же можно сформулировать несколько иначе: предельный цикл системы (8.30) находится в δ-окрестности кривой $ABCDA$, где $\delta = O(\sqrt{\mu})$. Например, δ-окрестность кривой $ABCDA$, где δ — наибольшее из $2\sqrt{\mu}$ и $(2K-1)\sqrt{\mu}$, содержит внутри себя область (ε) и, следовательно, предельный цикл.

вибратора, если параметр μ не очень мал. Например, при $\mu = 0{,}05$ и $K = 2$, когда автоколебания весьма близки к разрывным[1]), погрешность формулы (8.43) составляет около 20%. В связи с этим представляется целесообразным провести вычисление асимптотического выражения для периода автоколебаний мультивибратора при малых μ (при C_a, $C_g \ll C$), исходя не из предельной (при $\mu \to +0$) структуры разбиения фазовой плоскости на траектории (рис. 390), а из функций соответствия (8.36), (8.39) для преобразований Π_1 и Π_2 и уравнений (8.40а), точно определяющих неподвижную точку преобразования Π' и предельный цикл при малых μ [2]).

Форма записи функций соответствия (8.36) и (8.39), а также уравнений (8.40а) несколько неудобна для этой цели. Перейдём поэтому в (8.36) и (8.39) от $\tau_1 = \omega_1 t_1$, $\tau_2 = \omega_2 t_2$ непосредственно к t_1 и t_2 — временам пробега изображающей точки в областях (I) и (II). Обозначим корни характеристического уравнения (8.32) (для области (*I*)) через λ_1 и λ_1':

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 = h_1 - \omega_1 &= \frac{K-1-\sqrt{(K-1)^2-4\mu}}{2\mu} = \\ &= \frac{1}{K-1} + \frac{\mu}{(K-1)^3} + 2\frac{\mu^2}{(K-1)^5} + \dots, \\ \lambda_1' = h_1 + \omega_1 &= \frac{K-1+\sqrt{(K-1)^2-4\mu}}{2\mu} = \\ &= \frac{K-1}{\mu} - \frac{1}{K-1} - \frac{\mu}{(K-1)^3} - 2\frac{\mu^2}{(K-1)^5} - \dots, \end{aligned}\right\} \quad (8.44)$$

а абсолютные значения корней характеристического уравнения (8.31) (для области (*II*)) — через λ_2 и λ_2':

$$\left.\begin{aligned} \lambda_2 = h_2 - \omega_2 &= \frac{1-\sqrt{1-4\mu}}{2\mu} = 1 + \mu + 2\mu^2 + \dots, \\ \lambda_2' = h_2 + \omega_2 &= \frac{1+\sqrt{1-4\mu}}{2\mu} = \frac{1}{\mu} - 1 - \mu - 2\mu^2 - \dots \end{aligned}\right\} \quad (8.44а)$$

Подставим $\tau_1 = \omega_1 t_1$ в выражение (8.36) для s и умножим числитель и знаменатель этого выражения на $e^{h_1 t_1}$:

$$s = \frac{K-1}{2}\frac{\omega_1}{h_1}\frac{1 + \frac{1}{2}\left[e^{\lambda_1' t_1} + e^{\lambda_1 t_1}\right] - \frac{1}{2}\frac{h_1}{\omega_1}\left[e^{\lambda_1' t_1} - e^{\lambda_1 t_1}\right]}{\frac{1}{2}\left[e^{\lambda_1' t_1} - e^{\lambda_1 t_1}\right]}.$$

---

[1]) При $\mu = 0{,}05$ и $K = 2$ автоколебания мультивибратора состоят из чередующихся «медленных» (со скоростью $\dot{x}$ порядка единицы) и «быстрых», скачкообразных изменений x (со скоростью порядка $\frac{1}{\mu} = 20$).

[2]) См. также [114, 52, 93, 158, 159], где проводятся вычисления асимптотических разложений для периода периодических решений некоторых дифференциальных уравнений второго порядка. В [114], например, рассмотрено уравнение, эквивалентное системе (8.30) при $K = 2$.

Заметив, что $\frac{K-1}{2h_1}=\mu$, $h_1=\frac{1}{2}(\lambda_1'+\lambda_1)$, $\omega_1=\frac{1}{2}(\lambda_1'-\lambda_1)$, мы получим следующие параметрические выражения для функции соответствия преобразования Π_1:

$$\left.\begin{aligned} s&=\mu\,\frac{\lambda_1'\left[1+e^{\lambda_1 t_1}\right]-\lambda_1\left[1+e^{\lambda_1' t_1}\right]}{e^{\lambda_1 t_1}-e^{\lambda_1' t_1}},\\ s'&=\mu\,\frac{\lambda_1'\left[1+e^{-\lambda_1 t_1}\right]-\lambda_1\left[1+e^{-\lambda_1' t_1}\right]}{e^{-\lambda_1 t_1}-e^{-\lambda_1' t_1}}\end{aligned}\right\} \tag{8.45}$$

(s' получается из выражения для s сменой знака́ и заменой t_1 на $-t_1$; см. примечание на стр. 544). Тем же путем, заменяя в (8.38) τ_2 на $\omega_2 t_2$ и пользуясь соотношениями:

$$\gamma_2\omega_2=h_2,\quad \frac{1}{2h_2}=\mu,\quad h_2+\omega_2=\lambda_2',\quad h_2-\omega_2=\lambda_2,$$
$$h_2=\frac{1}{2}(\lambda_2'+\lambda_2)\quad\text{и}\quad \omega_2=\frac{1}{2}(\lambda_2'-\lambda_2),$$

получим для преобразования Π_2:

$$\left.\begin{aligned} s_1&=\mu\,\frac{\lambda_2\left[e^{\lambda_2' t_2}-1\right]-\lambda_2'\left[e^{\lambda_2 t_2}-1\right]}{e^{\lambda_2' t_2}-e^{\lambda_2 t_2}},\\ s'&=\mu\,\frac{\lambda_2'\left[1-e^{-\lambda_2 t_2}\right]-\lambda_2\left[1-e^{-\lambda_2' t_2}\right]}{e^{-\lambda_2 t_2}-e^{-\lambda_2' t_2}}.\end{aligned}\right\} \tag{8.46}$$

Из этих выражений для функций соответствия преобразований Π_1 и Π_2 уже нетрудно получить асимптотические разложения функций соответствия, а также периода автоколебаний для малых μ, пользуясь различием в порядке величины корней λ_1, λ_2 и λ_1', λ_2', т. е. тем, что $\lambda_1, \lambda_2=O(1)$, а $\lambda_1', \lambda_2'=O\left(\frac{1}{\mu}\right)$.

Ясно, что при движении изображающей точки по какой-либо траектории, пересекающей полупрямую S (например, по предельному циклу), время ее пробега в области (I) $t_1\to+0$ при $\mu\to+0$, а в области (II) t_2 стремится к конечному пределу ($t_2=O(1)$[1]). Но тогда $e^{-\lambda_2 t_2}=O(1)$, а $e^{-\lambda_2' t_2}=O\left(e^{-\frac{1}{\mu}}\right)$, т. е. стремится к нулю

[1]) В области (I) абсцисса x изображающей точки изменяется от $+1$ до -1 со скоростью $\dot{x}\to-\infty$ при $\mu\to+0$; поэтому при $\mu\to+0$ $t_1\to+0$; можно показать, что для ограниченных $0<s<M$ $O(\mu)<t_1<O\left(\mu\ln\frac{1}{\mu}\right)$. В области ($II$) ордината y изображающей точки изменяется на конечную величину; от $y'=-(K-1)+s'>K-1$, ибо $s'>2(K-1)$, до $y_1=-(K-1)-s_1<-(K-1)$ с конечной скоростью $\dot{y}=x$; отсюда следует, что $t_2=O(1)$.

(при $\mu \to +0$) *быстрее любой степени* μ. Поэтому (с точностью до членов порядка $e^{-\frac{1}{\mu}}$) функция соответствия преобразования Π_2 может быть записана в виде [1]):

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= \mu\lambda_2 + O\left(e^{-\frac{1}{\mu}}\right), \\ s' &= \mu\left[(\lambda_2' - \lambda_2)\, e^{\lambda_2 t_2} - \lambda_2'\right] + O\left(e^{-\frac{1}{\mu}}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (8.46а)$$

С той же степенью точности для предельного цикла

$$\bar{s} = \bar{s}_1 = \mu\lambda_2 + O\left(e^{-\frac{1}{\mu}}\right). \qquad (8.46б)$$

Подставив (8.46б) в первое соотношение (8.45), мы получим уравнение, определяющее $\bar{t}_1$ — время пробега изображающей точки по предельному циклу в области (I):

$$\left[\lambda_2 + \lambda_1 + O\left(e^{-\frac{1}{\mu}}\right)\right] e^{\lambda_1' \bar{t}_1} = (\lambda_1' + \lambda_2)\, e^{\lambda_1 \bar{t}_1} + \lambda_1' - \lambda_1. \qquad (8.47)$$

Это уравнение можно решить методом последовательных приближений, используя различие в порядках величины корней λ_1 и λ_1'. Оценим сначала порядок величины $\bar{t}_1$; так как $e^{\lambda_1 \bar{t}_1} \to 1$ при $\mu \to 0$, то для выполнения уравнения (8.47) $e^{\lambda_1' \bar{t}_1}$ должно быть величиной порядка λ_1', т. е. $e^{\lambda_1' \bar{t}_1} = O\left(\frac{1}{\mu}\right)$, $\lambda_1' \bar{t}_1 = O\left(\ln \frac{1}{\mu}\right)$ и $\bar{t}_1 = O\left(\mu \ln \frac{1}{\mu}\right)$ [2]). Подставим $e^{\lambda_1 \bar{t}_1} = 1 + O(\lambda_1 \bar{t}_1) = 1 + O\left(\mu \ln \frac{1}{\mu}\right)$ в (8.47):

$$e^{\lambda_1' \bar{t}_1} = \frac{2\lambda_1' + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_1' O\left(\mu \ln \frac{1}{\mu}\right)}{\lambda_2 + \lambda_1} = \frac{2(K-1)^2}{\mu K}\left[1 + O\left(\mu \ln \frac{1}{\mu}\right)\right],$$

---

[1]) Асимптотическое выражение (8.46а) справедливо для любых s', бо́льших сколь угодно малой, но фиксированной величины ($s' > a$). Первое соотношение (8.46а) показывает, что все траектории, пересекающие полупрямую (s') вне некоторой фиксированной окрестности точки $s' = 0$, и в частности все траектории, идущие из области (III), включая предельный цикл, входят в области (II) в очень малую (порядка $e^{-\frac{1}{\mu}}$) окрестность прямолинейной траектории $y = -Kx - \lambda_1 x$.

[2]) Таким образом, при $\mu \to +0$ $\bar{t}_1 \to +0$, но медленнее μ и быстрее μ^β ($0 < \beta < 1$), так как при любом $0 < \beta < 1$ и достаточно малых μ $O(\mu) < O\left(\mu \ln \frac{1}{\mu}\right) < O(\mu^\beta)$. Такой порядок малости $\bar{t}_1$ определяется тем, что предельный цикл в области (I) идет сначала в окрестности (порядка μ) точки $A(1, K-1)$ изоклины F, где $|\dot{x}| < O(1)$. Для траекторий, пересекающих полупрямую S на конечном расстоянии от точки A, $t_1 = O(\mu)$.

откуда

$$\lambda_1'\bar{t}_1 = \ln\frac{1}{\mu} + \ln\frac{2(K-1)^2}{K} + \ln\left[1 + O\left(\mu\ln\frac{1}{\mu}\right)\right],$$

т. е., так как

$$\ln\left[1 + O\left(\mu\ln\frac{1}{\mu}\right)\right] = O\left(\mu\ln\frac{1}{\mu}\right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{\lambda_1'} = \mu\lambda_1 = \frac{\mu}{K-1} + O(\mu^2),$$

$$\bar{t}_1 = \frac{\mu}{K-1}\ln\frac{1}{\mu} + \frac{\mu}{K-1}\ln\frac{2(K-1)^2}{K} + O\left(\mu^2\ln\frac{1}{\mu}\right)^{1}). \qquad (8.48)$$

Найдем теперь, пользуясь вторым соотношением (8.45), асимптотическое выражение для $\bar{s}'$ (для координаты точки пересечения предельного цикла с полупрямой S'), с тем чтобы затем на основании (8.46а) найти $\bar{t}_2$ и период автоколебаний. Согласно (8.48) имеем:

$$e^{-\lambda_1'\bar{t}_1} = \frac{\mu K}{(K-1)^2} + O\left(\mu^2\ln\frac{1}{\mu}\right),$$

$$\lambda_1\bar{t}_1 = \frac{\mu}{(K-1)^2}\ln\frac{1}{\mu} + \frac{\mu}{(K-1)^2}\ln\frac{2(K-1)^2}{K} + O\left(\mu^2\ln\frac{1}{\mu}\right)$$

и

$$e^{\lambda_1\bar{t}_1} = 1 + \lambda_1\bar{t}_1 + O(\lambda_1^2\bar{t}_1^2) = 1 + \frac{\mu}{(K-1)^2}\ln\frac{1}{\mu} +$$

$$+ \frac{\mu}{(K-1)^2}\ln\frac{2(K-1)^2}{K} + O\left(\mu^2\ln^2\frac{1}{\mu}\right).$$

Поэтому в силу второго уравнения (8.45), которое мы перепишем в виде:

$$s' = \frac{(\mu\lambda_1' - \mu\lambda_1)\,e^{\lambda_1 t_1} + \mu\lambda_1' - \mu\lambda_1\,e^{\lambda_1 t_1}\,e^{-\lambda_1' t_1}}{1 - e^{\lambda_1 t_1}\cdot e^{-\lambda_1' t_1}},$$

---

[1]) Подставив полученное асимптотическое выражение (8.48) в правую часть уравнения (8.47), мы получим следующее приближение для $\bar{t}_1$ с точностью до членов порядка $\mu^3\ln\frac{1}{\mu}$. Таким путем, методом последовательных приближений, можно получить асимптотическое разложение для $\bar{t}_1$ с точностью до $O\left(\mu^n\ln\frac{1}{\mu}\right)$, где n — любое целое положительное число. Однако это разложение не будет сходящимся.

получим:

$$\bar{s}'=\left[1+\frac{\mu K}{2(K-1)^2}\right]\left\{\left(K-1-\frac{2\mu}{K-1}\right)e^{\lambda_1\bar{t}_1}+K-1-\frac{\mu}{K-1}\right\}+$$

$$+O(\mu^2)=2(K-1)+\frac{\mu}{K-1}\ln\frac{1}{\mu}+\frac{\mu}{K-1}\left[K-3+\ln\frac{2(K-1)^2}{K}\right]+$$

$$+O\left(\mu^2\ln^2\frac{1}{\mu}\right)^{1}).$$

Тогда, используя второе уравнение (8.46а), получим:

$$e^{\lambda_2\bar{t}_2}=\frac{\bar{s}'+\mu\lambda_2'}{\mu\lambda_2'-\mu\lambda_2}=(1+2\mu)(\bar{s}'+1-\mu)+O(\mu^2)=(2K-1)\times$$

$$\times\left\{1+\frac{\mu\ln\frac{1}{\mu}}{(K-1)(2K-1)}+\mu\left[\frac{2K(2K-3)}{(K-1)(2K-1)}+\frac{\ln\frac{2(K-1)^2}{K}}{(K-1)(2K-1)}\right]+\right.$$

$$\left.+O\left(\mu^2\ln^2\frac{1}{\mu}\right)\right\}^{2}),$$

$$\lambda_2\bar{t}_2=\ln(2K-1)+\frac{\mu\ln\frac{1}{\mu}}{(K-1)(2K-1)}+\mu\frac{2K(2K-3)+\ln\frac{2(K-1)^2}{K}}{(K-1)(2K-1)}+$$

$$+O\left(\mu^2\ln^2\frac{1}{\mu}\right)^{3}).$$

---

[1]) Погрешность числителя равна $O\left(\mu^2\ln\frac{1}{\mu}\right)$; поэтому выражения для $\mu\lambda_1'$ и $\mu\lambda_1$ мы берем с точностью до $O(\mu^2)$, $\frac{1}{1-e^{\lambda_1\bar{t}_1}\cdot e^{-\lambda_1'\bar{t}_1}}=$ $=1+\frac{\mu K}{2(K-1)^2}+O\left(\mu^2\ln\frac{1}{\mu}\right)$, а член $\mu\lambda_1 e^{\lambda_1\bar{t}_1}e^{-\lambda_1'\bar{t}_1}=O\left(\mu^2\ln\frac{1}{\mu}\right)$ вносим в остаточный член.

Из полученного асимптотического выражения для $\bar{s}'$ следует, что точка предельного цикла с абсциссой $x=-1$ лежит на расстоянии порядка $\mu\ln\frac{1}{\mu}$ от кривой $ABCDA$.

[2]) Все члены выписываем с точностью до $O\left(\mu^2\ln\frac{1}{\mu}\right)$. В частности,

$$\mu\lambda_2'=1-\mu+O(\mu^2) \quad \text{и} \quad \frac{1}{\mu\lambda_2'-\mu\lambda_2}=1+2\mu+O(\mu^2).$$

[3]) Здесь удобно воспользоваться разложением

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+O(x^3).$$

и, наконец,

$$\bar{t}_2 = \frac{1}{\lambda_2}(\lambda_2 \bar{t}_2) = (1-\mu)\lambda_2 \bar{t}_2 + O(\mu^2) \quad \text{или}$$

$$\bar{t}_2 = \ln(2K-1) + \frac{\mu \ln \frac{1}{\mu}}{(K-1)(2K-1)} + \\ + \mu\left[\frac{2K(2K-3)}{(K-1)(2K-1)} + \frac{\ln \frac{2(K-1)^2}{K}}{(K-1)(2K-1)} - \ln(2K-1)\right] + O\left(\mu^2 \ln^2 \frac{1}{\mu}\right). \tag{8.49}$$

Суммируя с (8.48), мы получим следующее асимптотическое выражение для периода автоколебаний мультивибратора (для периода периодического решения системы (8.39) при малых μ):

$$\tau = 2(\bar{t}_1 + \bar{t}_2) = 2\ln(2K-1) + \frac{4K}{(K-1)(2K-1)}\mu \ln \frac{1}{\mu} + \\ + \left[\frac{4K(2K-3)}{(K-1)(2K-1)} + \frac{4K \ln \frac{2(K-1)^2}{K}}{(K-1)(2K-1)} - 2\ln(2K-1)\right]\mu + O\left(\mu^2 \ln \frac{1}{\mu}\right). \tag{8.50}$$

Старший член в этом асимптотическом разложении, как и следовало ожидать, совпадает с предельным (при $\mu \to +0$) выражением (8.43) для периода мультивибратора.

§ 6. Двухпозиционный авторулевой

В этом параграфе мы рассмотрим динамику судна, снабженного простейшей, так называемой двухпозиционной системой стабилизации курса — двухпозиционным авторулевым.

1. Постановка задачи. Пусть φ — отклонение судна от заданного курса (рис. 392). Составим упрощенное уравнение вращения судна вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр тяжести, пренебрегая боковым сносом судна при разворотах и учитывая как момент сил $M = M(\psi)$, создаваемый рулем, так и момент сил сопротивления $-H\frac{d\varphi}{dt}$ (H — коэффициент вязкого трения). Если I — момент инерции судна относительно его вертикальной главной оси, то уравнение вращения судна имеет вид:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} + H\frac{d\varphi}{dt} = M. \tag{8.51}$$

Само по себе судно не обладает устойчивостью на курсе. В самом деле, при $M = 0$ (руль находится в диаметральной плоскости, т. е. в плос-