

менем пробега  $\tau$  изображающей точки по траектории от точки  $s$  полупрямой  $S$  до точки  $s'$  полупрямой  $S'$  будет являться большее из двух значений параметра  $\tau$ , соответствующих в силу (8.69) заданному значению  $s$ , т. е. в выражениях (8.69) мы должны полагать, что  $\tau > \tau'_1$ . Обозначим через  $\tau_0$  то значение  $\tau$ , которое соответствует начальной точке  $s_0$  полупрямой  $S^1)$ . Тогда, так как при  $\tau > \tau'_1$   $\frac{d\Psi_1}{d\tau} > 0$  и  $\frac{ds}{d\tau} > 0$ , точкам полупрямой  $S$ :  $s > s_0$  соответствуют значения параметра  $\tau > \tau_0 > \tau'_1$ , причем при изменении  $\tau$  от  $\tau_0$  до  $+\infty$   $s$  монотонно возрастает от  $s_0 = \frac{-\beta^*}{1 - \beta^*}$  до  $+\infty$ .

Диаграмма Ламерея для рассматриваемого случая  $\beta < 1 - \frac{\theta}{e^\theta - 1}$  изображена на рис. 423. Нетрудно показать, что точечное преобразо-

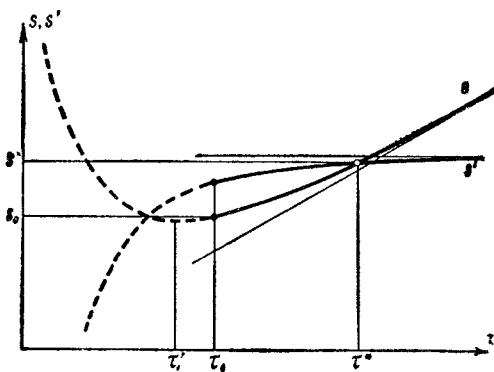


Рис. 423.

вание полупрямой  $S$  в полупрямую  $S'$  и в этом случае имеет единственную и устойчивую неподвижную точку<sup>2)</sup>. Этой неподвижной точке на фазовой поверхности соответствует единственный и устойчивый предельный цикл, к которому (при  $t \rightarrow +\infty$ ) стремятся все фазовые траектории (рис. 421).

### § 8. Релейная система автоматического регулирования (с мертвой зоной и пространственным запаздыванием)

В предыдущих двух параграфах мы рассмотрели на примере архитектурного систему автоматического регулирования двухпозиционного типа, в которой при любых начальных условиях устанавливаются архитектурные колебания, обусловленные запаздыванием регулятора. В настоящем

<sup>1)</sup>  $\tau_0$ , как и раньше, определяется уравнением  $\Psi_1(\tau_0) = 1 - 2\theta^*$ , но теперь под  $\tau_0$  следует понимать больший корень этого уравнения  $\tau_0 > \tau'_1$ .

<sup>2)</sup> Доказательство существования, единственности и устойчивости неподвижной точки точечного преобразования полупрямой  $S$  в полупрямую  $S'$  полностью аналогично доказательству, проведенному в первом разделе настоящего параграфа.

параграфе мы займемся изучением динамики несколько более сложной релейной системы автоматического регулирования второго порядка, в состав которой входит безинерционное звено релейного типа с симметричной характеристикой, изображенной на рис. 424 [122, 102]<sup>1</sup>). Выходная координата релейного звена  $U$  может принимать одно из

трех возможных значений:  $+U_0$ , 0 или  $-U_0$ , в зависимости от значения входной координаты  $\sigma$  и от состояния звена в предшествующие моменты времени. Если звено в предшествующий момент времени было «выключено» ( $U=0$ , что возможно только при  $|\sigma| < \sigma_0$ ), то оно останется «выключенным» до тех пор, пока входная координата звена  $\sigma$  не выйдет в процессе своего изменения за пределы «мертвой зоны»:  $|\sigma| < \sigma_0$ . При достижении границы мертвых зон это звено «включится» в ту или иную сторону, т. е.  $U$  изменится мгновенно (скакком)

от 0 до  $+U_0$  при  $\sigma = +\sigma_0$  и до  $-U_0$  при  $\sigma = -\sigma_0$ . Звено, будучи «включенным», останется в этом состоянии не только вне мертвых зон, но и внутри некоторой части последней: состояние звена  $U=+U_0$  сохранится при  $\sigma > \sigma_1$  и  $U=-U_0$  при  $\sigma < -\sigma_1$  ( $|\sigma_1| \leq \sigma_0$ ). Только при  $\sigma = \pm \sigma_1$  «включенное» ранее звено «выключится». В частности, при  $-\sigma_0 < \sigma < -\sigma_1$  и при  $\sigma_1 < \sigma < \sigma_0$  состояние звена (его выходная координата  $U$ ) определяется исключительно его предшествующим состоянием — тем, было ли звено «включенным» или «выключенным» в предшествующий момент времени. Такое звено (с характеристикой, приведенной на рис. 424) обычно характеризуется тремя параметрами: абсолютным значением выходной координаты  $U_0$  «включенного» звена, шириной мертвых зон  $\sigma_0$  и так называемым коэффициентом возврата релейного звена  $\lambda = \sigma_1/\sigma_0$  ( $-1 \leq \lambda \leq 1$ )<sup>2</sup>.

Таким образом, рассматриваемое релейное звено системы автоматического регулирования имеет как пространственное запаздывание (т. е. «гистерезисную» характеристику с двумя зонами неоднозначности), так и мертвую зону (зону нечувствительности). Именно, в виде таких релейных звеньев могут быть идеализированы обычные

<sup>1)</sup> Обычно релейным называют безинерционное звено, выходная координата которого может принимать только некоторые дискретные значения. Систему называют релейной, если она состоит из релейных и линейных звеньев.

<sup>2)</sup> Для характеристики авторулевого с пространственным запаздыванием, рассмотренной в предыдущем параграфе,  $\sigma_1 = -\sigma_0$ , т. е.  $\lambda = -1$ .

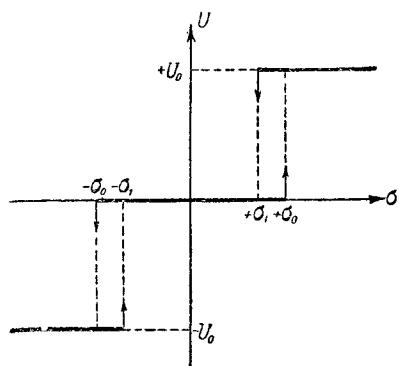


Рис. 424.

электромагнитные реле (или группы реле), различные электрические контактные устройства, а также сервомоторы «постоянной скорости» при учете мертвых зон и люфта в золотнике<sup>1)</sup>.

Ниже мы увидим, что, как и в случае только что рассмотренной системы: «судно — авторулевой», пространственное запаздывание релейного звена является причиной возможных в системе автоколебаний. Однако теперь, в отличие от системы с регулятором без мертвых зон, автоколебания могут быть подавлены введением достаточно сильной жесткой обратной связи или коррекции по скорости.

**1. Уравнения движения некоторых релейных систем.** Рассмотрим релейную следящую систему, блок-схема которой приведена на рис. 425. Сервомотор этой системы (электромотор с постоянным,

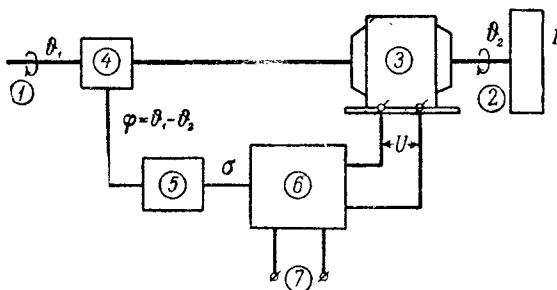


Рис. 425. Блок-схема релейной следящей системы.

1 — «ось заводки»; 2 — «ось отработки»; 3 — электрический сервомотор; 4 — дифференциал (датчик ошибки); 5 — преобразующее (дифференцирующее) звено; 6 — релейное звено (группа реле, управляющая сервомотором); 7 — сеть питания сервомотора.

независимым возбуждением) управляетяется релейным звеном (группой реле) с ранее рассмотренной характеристикой (рис. 424). Напряжение  $U$  на якоре мотора является выходной координатой этого релейного звена, управляемого в свою очередь ошибкой системы  $\varphi = \theta_1 - \theta_2$  и ее производной. Пусть входная координата релейного звена  $\sigma = \varphi + B \frac{d\varphi}{dt}$ ,  $I$  — момент инерции оси отработки следящей системы (совместно с сервомотором),  $k \frac{d\theta_2}{dt}$  — противоэлектродвижущая сила якоря мотора,  $i$  — сила тока в якоре,  $Ai$  — момент сил, развиваемый мотором, и  $R$  — сопротивление цепи якоря<sup>2)</sup>. Тогда уравнения движения

<sup>1)</sup> В обычных электромагнитных реле сила притяжения якоря к сердечнику увеличивается при уменьшении зазора между ними. Поэтому подтягивание якоря реле к сердечнику происходит при больших токах, чем обратный переход. Электрические контактные устройства также обладают «гистерезисными» характеристиками из-за образования дуги при размыкании контактов.

<sup>2)</sup> Мы полагаем, что когда релейная группа находится в нейтральном положении (напряжение на якоре мотора  $U = 0$ ), якорь мотора замыкается на сопротивление «динамического торможения», подобранныго так, чтобы полное сопротивление цепи якоря было одинаковым при всех трех положениях релейной группы.

оси отработки следящей системы и колебаний тока в цепи якоря мотора, очевидно, впишутся в следующем виде:

$$I \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} = Al, \quad Rl = U - k \frac{d\theta_2}{dt}$$

или

$$I \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} + \frac{Ak}{R} \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{A}{R} U^1.$$

Рассмотрим частный случай движения следящей системы — движение при неподвижной оси заводки (при  $\theta_1 = \text{const}$ ). Для этого случая уравнения движения принимают вид:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{Ak}{R} \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = - \frac{A}{R} U,$$

$$\sigma = \varphi + B \frac{d\varphi}{dt},$$

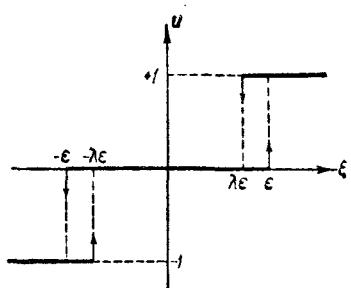
или в безразмерной форме

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} = -u(\xi), \\ \xi = x + \beta \dot{x}. \end{cases} \quad (8.70)$$

В уравнениях (8.70)

$$x = \frac{Ak^2}{IRU_0} \varphi, \quad \xi = \frac{Ak^2}{IRU_0} \sigma, \quad u = \frac{U}{U_0}$$

— новые безразмерные переменные, точкой сверху обозначено дифференцирование по безразмерному времени



$$t_{\text{нов}} = \frac{Ak}{IR} t_{\text{ст}},$$

$u = u(\xi)$  — приведенная характеристика реле, изображенная на рис. 426, с приведенной мертввой зоной

$$\varepsilon = \frac{Ak^2 \sigma_0}{IRU_0}$$

Рис. 426.

и  $\beta = \frac{Ak}{IR} B$  — приведенный (безразмерный) коэффициент управления по скорости ошибки.

1) Мы не учитываем сил трения, действующих на ось отработки следящей системы. Заметим, что учет сил вязкого трения не изменит вида уравнений движений системы, а лишь увеличит коэффициент при  $\frac{d\theta_2}{dt}$ .

К уравнениям (8.70) приводятся при соответствующих предположениях и уравнения системы непрямого регулирования с сервомотором «постоянной скорости» и с жесткой обратной связью (рис. 427; см. также рис. 407). Если учесть люфт и мертвую зону в золотнике

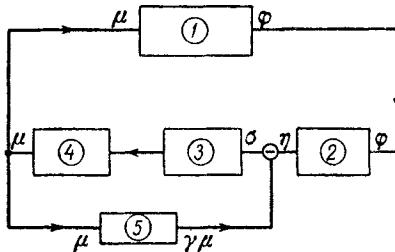


Рис. 427. Блок-схема релейной системы непрямого регулирования.

1 — объект регулирования; 2 — чувствительный элемент; 3 — релейное звено (золотник сервомотора); 4 — сервомотор «постоянной скорости»; 5 — жесткая обратная связь.

сервомотора «постоянной скорости», то уравнение последнего запишется следующим образом:

$$\frac{d\mu}{dt} = \begin{cases} +\frac{1}{T_s} & \text{при } \sigma > \lambda\sigma_0, \\ 0 & \text{при } |\sigma| < \sigma_0, \\ -\frac{1}{T_s} & \text{при } \sigma < -\lambda\sigma_0, \end{cases}$$

где  $\sigma_0$  и  $\lambda$  — ширина мертвых зон и коэффициент возврата релейного звена — золотника сервомотора (характеристика такого сервомотора совпадает с приведенной на рис. 424, если заменить там  $U$  на  $\frac{d\mu}{dt}$  и  $U_0$  на  $\frac{1}{T_s}$ )<sup>1)</sup>. Уравнения остальных линейных звеньев (объекта регулирования с положительным саморегулированием, идеального чувствительного элемента и жесткой обратной связи) запишутся так же, как и в п. 5 § 6 настоящей главы:

$$\begin{aligned} T_a \frac{d\varphi}{dt} + k\varphi &= \mu, \\ \delta\eta + \varphi &= 0, \\ \sigma &= \eta - \gamma\mu. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Если обозначить через  $l$  и  $\Delta$  зазор между контактами электрозолотника (рис. 407) и люфт в золотниковом устройстве, измеренные в тех же относительных единицах, что и  $\sigma$ , то

$$\sigma_0 = \frac{l + \Delta}{2} \quad \text{и} \quad \lambda = \frac{l - \Delta}{l + \Delta}.$$

Эти уравнения системы непрямого регулирования заменой переменных

$$\varphi = \frac{T_a}{k^2 T_s} x, \quad \sigma = -\frac{T_a \left( \frac{1}{\delta} + \gamma k \right)}{k^2 T_s} \xi, \quad T_s \frac{d\mu}{dt} = -u \quad \text{и} \quad t_{ct} = \frac{T_a}{k} t_{нов}$$

приводятся к уравнениям (8.70), причем безразмерные ширина мертвых зон и коэффициент обратной связи равны соответственно

$$\varepsilon = \frac{k^2 T_s \sigma_0}{T_a \left( \frac{1}{\delta} + \gamma k \right)} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{\gamma k}{\frac{1}{\delta} + \gamma k} \quad (0 < \beta < 1).$$

**2. Фазовая поверхность.** Итак, обе рассмотренные релейные системы автоматического регулирования приводятся к одной и той же динамической системе, описываемой уравнениями (8.70). Для упрощения изучения движений этой динамической системы мы будем пользоваться ниже переменными  $y = \dot{x}$  и  $\xi$ . В этих переменных уравнения

движения системы могут быть записаны в виде следующих дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{y} = -y - u(\xi), \\ \dot{\xi} = (1 - \beta)y - \beta u(\xi). \end{cases} \quad (8.71)$$

Из-за наличия двух зон неоднозначности характеристики релейного звена  $u = u(\xi)$  фазовой поверхностью системы будет *трехлистная* поверхность, изображенная на рис. 428 и состоящая из полосы (I):  $|\xi| < \varepsilon$ , в точках которой  $u = 0$  (релейное звено — в нейтральном положении), и частично наложенных на нее полуплоскостей (II):  $\xi > \lambda\varepsilon$  и (III):  $\xi < -\lambda\varepsilon$ , соответствующих включенным состояниям релейного

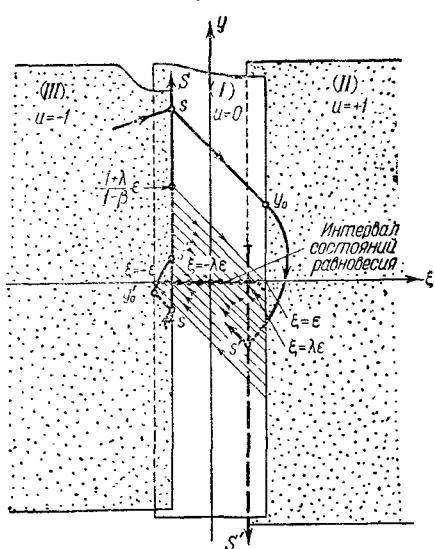


Рис. 428.

звена (на полуплоскости (II)  $u = +1$  и на полуплоскости (III)  $u = -1$ ). Переход изображающей точки с полосы (I) на полуплоскости (II) и (III) происходит только на ее границах, т. е. при  $\xi = \pm \varepsilon$ , а обратный переход — только на границах полуплоскостей (соответственно при  $\xi = \pm \lambda\varepsilon$  и при  $\xi = -\lambda\varepsilon$ ), причем при переходах изображающей точки с одного листа фазовой поверхности на другой ее координаты  $\xi, y$  изменяются непрерывно.

Сразу же отметим симметрию фазовых траекторий друг другу относительно начала координат, что является следствием симметрии характеристики релейного звена  $u = u(\xi)$ .

На полосе (I)  $u = 0$  (релейное звено — в нейтральном положении) и уравнения движения (8.71) имеют вид:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{y} = -y, \\ \dot{\xi} = (1 - \beta)y \\ \frac{dy}{d\xi} = -\frac{1}{1 - \beta}. \end{array} \right\} \quad (8.71a)$$

или

Поэтому все точки оси абсцисс в пределах этой полосы ( $|\xi| < \varepsilon$ ,  $y = 0$ ,  $u = 0$ ) являются *состояниями равновесия* и притом *устойчивыми*,

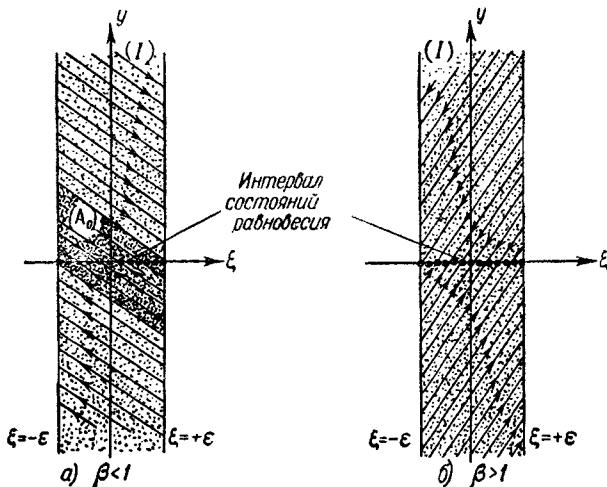


Рис. 429.

так как изображающие точки двигаются на полосе (I) по фазовым траекториям — прямым

$$\xi + (1 - \beta)y = \text{const}$$

по направлению к оси абсцисс (рис. 429). К этим состояниям равновесия, очевидно, асимптотически (при  $t \rightarrow +\infty$ ) приближаются все траектории, точки которых удовлетворяют неравенству

$$|\xi + (1 - \beta)y| < \varepsilon.$$

На полуплоскости (II), соответствующей включенному состоянию релейного звена  $u = +1$ , уравнения движения системы записываются

в форме:

$$\begin{cases} \dot{y} + y = -1, \\ \dot{\xi} = (1 - \beta)y - \beta. \end{cases} \quad (8.716)$$

Там нет состояний равновесия и все фазовые траектории (или, точнее, их продолжения за границей листа (II)) асимптотически приближаются к фазовой прямой  $y = -1$ ,  $\xi = -t + \text{const}$ . Изображающая точка, попав на лист (II), обязательно выйдет по соответствующей траектории на его границу  $\xi = +\lambda\varepsilon$  и перейдет на полосу (I). На рис. 430 изображено разбиение листа (II) фазовой поверхности на фазовые траектории (для случая  $\beta < 1$ ). Фазовые траектории на листе (III) (там  $u = -1$ ), очевидно, в силу симметрии уравнений (8.71) симметричны с только что рассмотренными траекториями на листе (II).

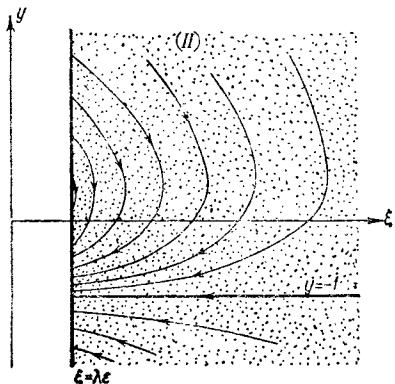


Рис. 430.

образом зависит от знака разности  $\beta - 1$ , мы рассмотрим отдельно два случая:  $\beta < 1$  и  $\beta > 1$ <sup>1)</sup>.

**3. Точечное преобразование при  $\beta < 1$ .** Начнем изучение динамики релейной системы, изучение разбиения ее фазовой поверхности на траектории, с наиболее интересного случая  $\beta < 1$ . Разбиения на траектории полосы (I) и листа (II) в отдельности были приведены на рис. 429, а и 430. Очевидно, имеются два типа фазовых траекторий, два типа движений системы. Траектории, начинающиеся в точках полосы (I), удовлетворяющих неравенству  $|\xi + (1 - \beta)y| < \varepsilon$ , асимптотически приближаются к состояниям равновесия системы, не выходя за пределы полосы (I). Им соответствуют движения системы с всегда выключенным релейным звеном, приводящие к установлению того или иного равновесного состояния. Все остальные траектории переходят с листа на лист (но обязательно проходят по полосе (I)) и соответствуют движениям системы с переключениями релейного звена.

<sup>1)</sup> В пограничном случае  $\beta = 1$  фазовые траектории в полосе (I) — вертикальные прямые, по которым изображающие точки асимптотически приближаются к состояниям равновесия:  $|\xi| < \varepsilon$ ,  $y = 0$ ,  $u = 0$ . Траектории, начинающиеся на листах (II) и (III), обязательно приходят на границы этих листов и затем приближаются (при  $t \rightarrow +\infty$ ) к состояниям равновесия:  $\xi = \pm \lambda\varepsilon$ ,  $y = 0$ ,  $u = 0$ . Таким образом, при  $\beta = 1$  все движения системы являются затухающими, приводящими к установлению равновесных состояний.

Изучение траекторий второго типа (траекторий, проходящих по различным листам фазовой поверхности), в частности определение предельных траекторий, к которым они стремятся при возрастающем  $t$ , мы сведем, как и в ранее рассмотренных задачах, к исследованию некоторого точечного преобразования прямой в прямую. С этой целью построим на фазовой поверхности (рис. 428) две полупрямые без контакта  $S$ :  $\xi = -\lambda\varepsilon$ ,  $y > \frac{\beta}{1-\beta}$  и  $S'$ :  $\xi = +\lambda\varepsilon$ ,  $y < \frac{\beta}{1-\beta}$ , через точки которых траектории переходят соответственно с листов ( $III$ ) и ( $II$ ) на полосу ( $I$ )<sup>1)</sup>. На этих полупрямых введем координату  $s = y$  (на полупрямой  $S$ ) и  $s = -y$  (на  $S'$ ) с таким расчетом, чтобы симметричным точкам полупрямых соответствовали одинаковые значения координаты  $s$  (очевидно,  $s > -\frac{\beta}{1-\beta}$ ). С построенными полупрямыми  $S$  и  $S'$  будут пересекаться все траектории системы, кроме тех, которые стремятся к состояниям равновесия, оставаясь в пределах полосы ( $I$ ). Поэтому изучение поведения каждой такой траектории можно свести к изучению последовательности ее точек пересечения с этими полупрямыми, в которой каждая последующая точка  $s'$ , если она существует, однозначно определяется предыдущей точкой  $s$ :

$$s' = \Pi(s).$$

Так как фазовый портрет системы, т. е. фазовая поверхность в целом, и разбиение ее на траектории симметричны относительно начала координат, то траектории, проходящие через симметричные точки  $s$  полупрямых  $S$  и  $S'$ , также симметричны, и следовательно, их последующие точки пересечения с этими полупрямыми будут иметь одинаковые координаты  $s'$ . Сказанное, очевидно, позволяет нам не различать между собой полупрямые  $S$  и  $S'$  (позволяет отождествить симметричные точки этих полупрямых) и пользоваться *единым точечным преобразованием*  $s' = \Pi(s)$  независимо от того, с какой из полупрямых (с  $S$  или с  $S'$ ) пересекалась рассматриваемая траектория.

Для вычисления функции последования этого точечного преобразования рассмотрим произвольную фазовую траекторию, которая проходит на полосу ( $I$ ) с листа ( $III$ ) — для определенности в точке  $s$  полупрямой  $S$  (рис. 428). В пределах полосы ( $I$ ) этой траекторией будет прямая

$$\xi + (1 - \beta)y = -\lambda\varepsilon + (1 - \beta)s. \quad (8.72)$$

<sup>1)</sup> В силу второго уравнения (8.71) на полупрямой  $S$ :

$$\dot{\xi} = (1 - \beta)y + \beta > 0$$

и на полупрямой  $S'$ :

$$\dot{\xi} = (1 - \beta)y - \beta < 0.$$

Поэтому при  $|- \lambda \epsilon + (1 - \beta) s| < \epsilon$ , т. е. при

$$-\frac{1 - \lambda}{1 - \beta} \epsilon < s < \frac{1 + \lambda}{1 - \beta} \epsilon, \quad (8.72a)$$

изображающая точка, не выходя за пределы полосы (I), будет асимптотически приближаться к соответствующему состоянию равновесия, а рассматриваемая нами траектория не имеет последующих точек пересечения с полуправыми  $S'$  и  $S$ .

При

$$s \geq \frac{1 + \lambda}{1 - \beta} \epsilon \quad (8.72b)$$

изображающая точка выйдет на правую границу полосы (I) в точке

$$\xi = +\epsilon, \quad y = y_0 = s - \frac{1 + \lambda}{1 - \beta} \epsilon \geq 0,$$

затем будет двигаться в пределах листа (II) по траектории, определяемой дифференциальными уравнениями (8.71б) и начальными условиями: при  $t = 0$   $\xi = +\epsilon$ ,  $y = y_0$ , — по траектории

$$\begin{aligned} y &= -1 + (1 + y_0) e^{-t}, \\ \xi &= \epsilon - t + (1 - \beta)(1 + y_0)(1 - e^{-t}), \end{aligned}$$

и обязательно выйдет на границу этого листа — на полуправую  $S'$ <sup>1</sup>. Обозначим через  $\tau$  время пробега изображающей точки по листу (II). Тогда при  $t = \tau > 0$   $\xi = +\lambda \epsilon$ ,  $y = -s'$ , что дает после использования соотношения  $s = y_0 + \frac{1 + \lambda}{1 - \beta} \epsilon$  следующее параметрическое выражение для функции последовательности:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } s \geq \frac{1 + \lambda}{1 - \beta} \epsilon \quad s &= -1 + \frac{1 + \lambda}{1 - \beta} \epsilon + \frac{\tau - (1 - \lambda) \epsilon}{(1 - \beta)(1 - e^{-\tau})}, \\ s' &= +1 - \frac{\tau - (1 - \lambda) \epsilon}{(1 - \beta)(e^{\tau} - 1)}. \end{aligned} \right\} \quad (8.73a)$$

Наконец, при

$$s \leq -\frac{1 - \lambda}{1 - \beta} \epsilon, \quad (8.72b)$$

что возможно только при  $\beta > (1 - \lambda) \epsilon$ , изображающая точка, двигаясь по траектории (8.72), выйдет на левую границу полосы (I) в точке с ординатой

$$y'_0 = s + \frac{1 - \lambda}{1 - \beta} \epsilon \leq 0$$

<sup>1</sup>) Мы выбираем за начало отсчета тот момент времени, когда изображающая точка находилась на правой границе полосы (I), т. е. на прямой  $\xi = +\epsilon$ . Здесь и ниже под  $t$  понимается безразмерное, новое время  $t_{\text{нов}}$ .

и затем после движения на полуплоскости (*III*) вернется через некоторый промежуток времени  $\tau$  обратно на полупрямую  $S$  (в точке  $s'$ ). Нетрудно видеть, что в этом случае функция последований выражается следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } s \leq -\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon \quad s = +1 - \frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon - \frac{\tau - (1-\lambda)\varepsilon}{(1-\beta)(1-e^{-\tau})}, \\ s' = +1 - \frac{\tau - (1-\lambda)\varepsilon}{(1-\beta)(e^{\tau}-1)}. \end{array} \right\} \quad (8.73\text{б})$$

Соотношения (8.73а) и (8.73б) полностью определяют интересующее нас точечное преобразование  $s' = \Pi(s)$  полупрямых  $S$  и  $S'$  друг в друга или самих в себя, осуществляемое фазовыми траекториями системы: по координате предыдущей точки  $s$  вне интервала (8.72а) однозначно определяется параметр преобразования  $\tau$ , который в свою очередь также однозначно определяет координату последующей точки  $s'$  (зависимости  $\tau$  от  $s$  и  $s'$  от  $\tau$  выражаются функциями не только однозначными, но и непрерывными; будем обозначать их в дальнейшем через  $\tau = f(s)$  и  $s' = g(\tau)$ ).

**4. Диаграмма Ламерая.** Переайдем к исследованию полученных параметрических выражений (8.73а) и (8.73б) для функций последований  $s' = \Pi(s)$ , используя введенные в предыдущем параграфе вспомогательные функции  $\Psi_1(\tau)$  и  $\Psi_2(\tau)$  (см. (8.65) и рис. 412). Если положить в (8.65)  $\alpha = (1-\lambda)\varepsilon \geq 0$  (напомним, что коэффициент возврата релейного звена  $-1 \leq \lambda \leq +1$ ), то функцию последований  $s' = \Pi(s)$  можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{array}{l} s = \left\{ \begin{array}{l} -1 + \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon + \frac{\Psi_1(\tau)}{1-\beta} \quad \text{при } s \geq \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon, \\ +1 - \frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon - \frac{\Psi_1(\tau)}{1-\beta} \quad \text{при } s \leq -\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon, \end{array} \right. \\ s' = 1 - \frac{\Psi_2(\tau)}{1-\beta}. \end{array} \right\} \quad (8.73)$$

Обозначим через  $\tau_0$  то значение  $\tau$ , которое соответствует значениям  $s = \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$  и  $s = -\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon$ ; оно, очевидно, однозначно определяется уравнением

$$\Psi_1(\tau_0) = 1 - \beta \quad (8.74)$$

или

$$(1 - \beta)(1 - e^{-\tau_0}) = \tau_0 - (1 - \lambda)\varepsilon$$

и в свою очередь однозначно определяет начальное (при  $\tau = \tau_0$ ) значение координаты последующей точки

$$(s')_{\tau=\tau_0} = s'_0 = 1 - e^{-\tau_0} = \frac{\tau_0 - (1 - \lambda)\varepsilon}{1 - \beta}. \quad (8.74\text{a})$$

При этом  $(1 - \lambda)\varepsilon < \tau_0 < \tau_1$ , где  $\tau_1$  — значение параметра  $\tau$ , при

котором функция  $\Psi_2$  достигает максимума<sup>1)</sup>. Тогда, поскольку  $\Psi_1$  является монотонно возрастающей функцией  $\tau$ , для получения значений

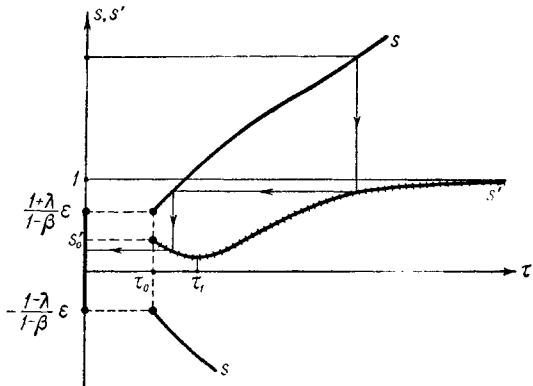


Рис. 431.

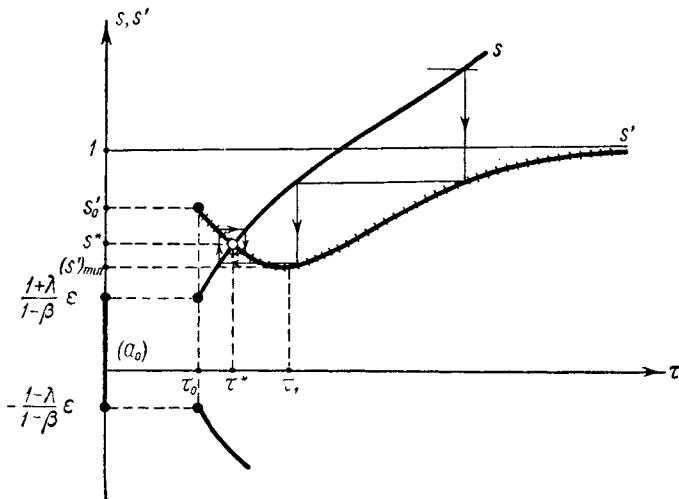


Рис. 432.

$s \geq \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$  и  $s \leq -\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon$  параметр преобразования  $\tau$  следует, очевидно, изменять в пределах  $\tau_0 \leq \tau < +\infty$ .

<sup>1)</sup> Как и в предыдущем параграфе,  $\tau_1$  однозначно определяется уравнением  $\Psi_1(\tau_1)=1$  и является монотонно возрастающей функцией величины  $x=(1-\lambda)\varepsilon$  (при малых  $\alpha$   $\tau_1=\sqrt{2\alpha}$ ). Соответствующее минимальное значение

$$(s')_{\min} = 1 - \frac{e^{-\tau_1}}{1-\beta} > -\frac{\beta}{1-\beta}.$$

Построим диаграмму Ламерея (рис. 431—433), откладывая по оси абсцисс параметр преобразования  $\tau$ , а по оси ординат — координаты  $s$  и  $s'$  предыдущих и последующих точек пересечения траекторий

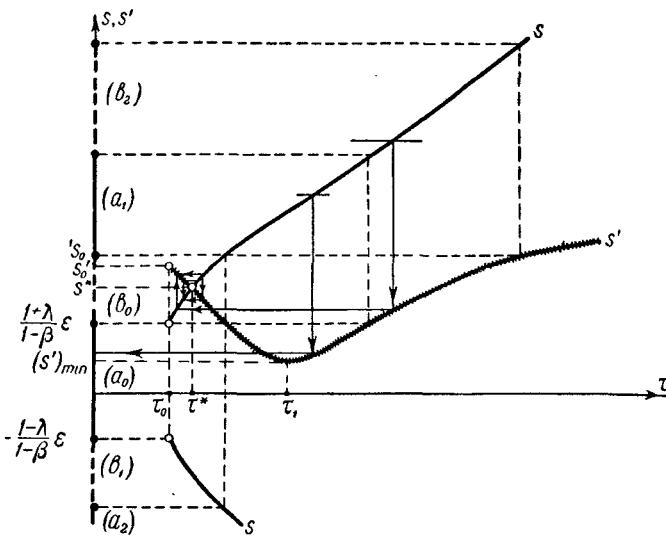


Рис. 433.

с полупрямыми  $S$  и  $S'$ . Прежде всего заметим, что в силу неравенств  $\frac{d\Psi_1}{d\tau} > \left| \frac{d\Psi_2}{d\tau} \right|^{\frac{1}{2}}$  и  $\beta < 1$

$$\left| \frac{ds'}{d\tau} \right| < \left| \frac{ds}{d\tau} \right| \quad (8.75)$$

при любых  $\tau \geq \tau_0$ . Далее, из соотношений (8.73) следует, что

$$\left. \begin{array}{ll} \text{при } s \leq -\frac{1-\lambda}{1-\beta} \epsilon & s' - s = \frac{\tau}{1-\beta} \geq \frac{\tau_0}{1-\beta} > 0; \\ \text{при } s \geq \frac{1+\lambda}{1-\beta} \epsilon & s' - s = 2 - \frac{1+\lambda}{1-\beta} \epsilon - \frac{1}{1-\beta} [\Psi_1 + \Psi_2] \end{array} \right\}$$

и монотонно убывает от  $s'_0 - \frac{1+\lambda}{1-\beta} \epsilon$  до  $-\infty$  при изменении  $\tau$  от  $\tau_0$  до  $+\infty$ , так как  $\frac{d}{d\tau} [\Psi_1 + \Psi_2] > 0$  и при  $\tau \rightarrow +\infty$   $s' \rightarrow +1$ , а  $s \rightarrow +\infty$ . Поэтому точечное преобразование  $s' = \Pi(s)$  не может иметь неподвижных точек на той части полупрямой  $S$ , которая удовлетворяет условию  $s \leq -\frac{1-\lambda}{1-\beta} \epsilon$ . Неподвижная точка существует

<sup>1)</sup> Это следует из неравенств:  $\frac{d\Psi_1}{d\tau} > 0$ ,  $\frac{d}{d\tau} [\Psi_1 + \Psi_2] > 0$  и  $\frac{d}{d\tau} [\Psi_1 - \Psi_2] > 0$ , доказанных в предыдущем параграфе для любых  $\tau > 0$ .

(и притом единственная) только на полуправой  $s \geq \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$  и при условии, что  $s'_0 \geq \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$ . Таким образом, в зависимости от знака выражения  $s'_0 - \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$  возможны два типа диаграмм Ламеря.

При  $s'_0 < \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$  кривые  $\tau = f(s)$  и  $s' = g(\tau)$ , определяемые соотношениями (8.73), нигде (при  $\tau \geq \tau_0$ ) не пересекаются (рис. 431), и точечное преобразование  $s' = \Pi(s)$  не имеет неподвижных точек. Нетрудно видеть, что в этом случае каждая последующая точка  $s'$  лежит ближе к интервалу (8.72a), чем предыдущая  $s^1$ ). Поэтому любая траектория после конечного числа пересечений с полуправыми  $S$  и  $S'$  будет иметь точку пересечения с координатой

$$-\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon < s < \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon \quad (8.72a)$$

и затем, не выходя за пределы полосы (I), будет асимптотически приближаться к тому или иному состоянию равновесия. Иначе говоря, в рассматриваемом случае имеет место *абсолютная устойчивость* системы, т. е. установление при любых начальных условиях какого-либо равновесного состояния.

Иная диаграмма Ламеря получается при  $s'_0 > \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$  (рис. 432 и 433). Теперь кривые  $\tau = f(s)$  и  $s' = g(\tau)$  имеют единственную точку

<sup>1)</sup> Если ввести расстояние точки  $s$  до интервала (8.72a)

$$R = \begin{cases} -s - \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon & \text{при } s \geq \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon, \\ 0 & \text{при } -\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon < s < \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon, \\ -\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon - s & \text{при } s \leq -\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon, \end{cases}$$

то расстояние до этого интервала последующей точки  $R' < R$  и притом на конечную величину.

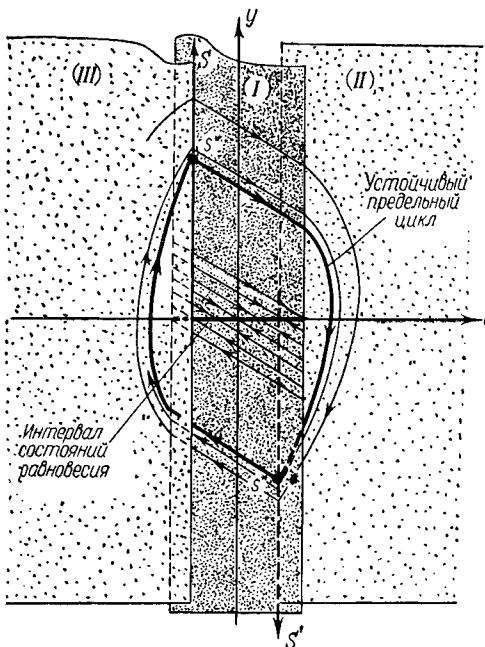


Рис. 434.

пересечения, а точечное преобразование  $s' = \Pi(s)$  имеет единственную неподвижную и притом устойчивую точку  $s^* > \frac{1+\lambda}{1-\beta} \epsilon$ , которая соответствует симметричному предельному циклу на фазовой поверхности (рис. 434)<sup>1)</sup>. Значение параметра преобразования  $\tau^*$ , соответствующее неподвижной точке  $s^*$ , определяется уравнением  $s' = s$  или

$$[\tau^* - (1 - \lambda) \epsilon] \operatorname{cth} \frac{\tau^*}{2} = 2(1 - \beta) - (1 + \lambda) \epsilon^2. \quad (8.76)$$

Определим теперь, в какой области пространства параметров системы  $\beta, \epsilon, \lambda$  ( $0 < \beta < 1, \epsilon > 0, -1 \leq \lambda \leq +1$ ) условие существования предельного цикла

$$s'_0 = \frac{\tau_0 - (1 - \lambda) \epsilon}{1 - \beta} > \frac{1 + \lambda}{1 - \beta} \epsilon$$

или

$$\tau_0 > 2\epsilon \quad (8.77)$$

выполнено. Очевидно, в пограничном случае (т.е. на поверхности в пространстве параметров  $\beta, \epsilon, \lambda$ , отделяющей область существования симметричного предельного цикла от области «абсолютной устойчивости»)

$$\tau_0 = 2\epsilon,$$

следовательно, согласно (8.74) уравнением этой пограничной поверхности в пространстве параметров будет:

$$(1 - \beta)(1 - e^{-2\epsilon}) = 2\epsilon - (1 - \lambda)\epsilon = (1 + \lambda)\epsilon$$

или

$$\frac{1 + \lambda}{1 - \beta} = \frac{1 - e^{-2\epsilon}}{\epsilon}. \quad (8.77a)$$

На рис. 435 изображена плоскость параметров  $\epsilon, \frac{1 + \lambda}{1 - \beta}$  и на ней построена кривая (8.77a). Так как согласно того же уравнения (8.74)  $\tau_0$  возрастает при уменьшении  $\beta$  (и при фиксированных значениях

<sup>1)</sup> Существование неподвижной точки  $s^* > \frac{1 + \lambda}{1 - \beta} \epsilon$  вытекает из непрерывности кривых  $\tau = f(s)$  и  $s' = g(\tau)$  и различных знаков разности  $s' - s$  при  $\tau = \tau_0$  и при  $\tau \rightarrow +\infty$ , единственность — из монотонности зависимости  $s' - s$  от  $\tau$ , устойчивость — из неравенства (8.75). Заметим, что симметричный предельный цикл имеет по одной точке пересечения с каждой из полупрямых  $S$  и  $S'$ .

<sup>2)</sup> Так как  $\tau^* > \tau_0 > (1 - \lambda)\epsilon$ , то неподвижной точки  $s^*$  заведомо не существует, если  $(1 + \lambda)\epsilon > 2(1 - \beta)$ .

параметров  $\varepsilon$  и  $\lambda$ )<sup>1)</sup>, то мы можем, очевидно, утверждать, что под кривой (8.77а) на рис. 435 условие (8.77) выполнено, т. е. там лежит область существования предельного цикла, а над ней — область «абсолютной устойчивости».

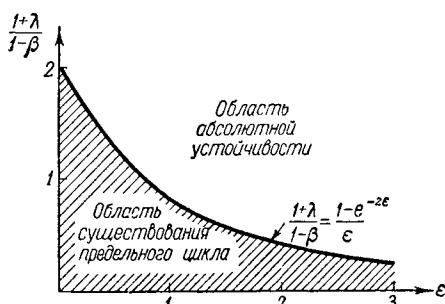


Рис. 435.

### 5. Структура разбиения фазовой поверхности на траектории. Рассмотрим более подробно случай

$$\frac{1+\lambda}{1-\beta} < \frac{1-e^{-2\varepsilon}}{\varepsilon}, \quad (8.77б)$$

когда на фазовой поверхности кроме интервала устойчивых состояний равновесия на полосе ( $I$ ) ( $|\xi| < \varepsilon$ ,  $y = 0$ ,  $u = 0$ ) существует еще и симметричный устойчивый предельный цикл (рис. 434).

И интервал состояний равновесия, и предельный цикл имеют на фазовой поверхности свои *области притяжения* — области, состоящие из точек траекторий, асимптотически (при  $t \rightarrow +\infty$ ) приближающихся соответственно к состояниям равновесия или к предельному циклу.

В связи с этим встает вопрос, исчерпывается ли фазовая поверхность этими двумя областями притяжения, т. е. не имеется ли, кроме двух указанных устойчивых режимов, других, также устойчивых режимов, к которым система могла бы приходить при соответствующих начальных условиях? Отрицать существование каких-либо других устойчивых режимов, отличных от состояний равновесия и симметричных автоколебаний, без более детального исследования точечного преобразования мы в данном случае не можем. В рассматриваемой динамической системе двузначность функции  $s = s(\tau)$  и наличие нисходящего участка кривой  $s' = g(\tau)$  (при  $\tau_0 \leq \tau < \tau_1$ ) содержит в себе, например, возможность существования сложного и, вообще говоря, несимметричного периодического режима, определяемого неподвижной точкой не преобразования  $s' = \Pi(s)$ , а кратного ему преобразования

$$s' = \Pi \{ \Pi \{ \dots \{ \Pi(s) \} \dots \} \} = \Pi^n(s).$$

На диаграмме Ламеря такому сложному периодическому режиму соответствовала бы не точка пересечения кривых  $\tau = f(s)$  и  $s' = g(\tau)$ , а некоторый замкнутый контур, составленный из чередующихся верти-

<sup>1)</sup> Дифференцируя (8.74) по  $\beta$  при фиксированных  $\varepsilon$  и  $\lambda$ , имеем:

$$\frac{\partial \tau_0}{\partial \beta} = - \frac{1 - e^{-\tau_0}}{1 - (1 - \beta) e^{-\tau_0}} < 0.$$

кальных и горизонтальных отрезков с вершинами на этих кривых. Поэтому для выяснения всех типов движений рассматриваемой релейной системы нельзя ограничиться нахождением состояний равновесия и неподвижных точек преобразования  $s' = \Pi(s)$  и исследованием их устойчивости, а необходимо провести более детальное изучение структуры разбиения фазовой поверхности на траектории и, в частности, более детальное изучение структуры областей притяжения интервала состояний равновесия и симметричного предельного цикла.

К области притяжения интервала состояний равновесия при любых условиях принадлежит область  $A_0$ :  $|\xi + (1 - \beta)y| < \epsilon$  на полосе (I) (рис. 429, a), которой на полуправых  $S$  и  $S'$  соответствует интервал  $-\frac{1 - \lambda}{1 - \beta} \epsilon < s < \frac{1 + \lambda}{1 - \beta} \epsilon$  (будем обозначать его ниже через  $(a_0)$ ). Используя обратное преобразование (преобразование  $s'$  в  $s$ )<sup>1)</sup>, мы сможем по этому интервалу найти другие интервалы  $(a_1), (a_2), \dots$ , точки которых преобразуются фазовыми траекториями (или, иначе говоря, преобразованием  $s' = \Pi(s)$ ) в точки интервала  $(a_0)$ , и тем самым разобраться в структуре области притяжения интервала состояний равновесия. Здесь в зависимости от соотношения между  $(s')_{\min} = (s')_{\tau=\tau_1}$  и  $\frac{1 + \lambda}{1 - \beta} \epsilon$  возможны два случая.

Пусть  $(s')_{\min} \geq \frac{1 + \lambda}{1 - \beta} \epsilon$ . Диаграмма Ламерая для этого случая изображена на рис. 432 (для определенности взят случай  $\tau^* < \tau_1$ ). Как видно, все траектории, пересекающие полуправые  $S$  и  $S'$  вне интервала  $(a_0)$ , имеют последующие точки пересечения с этими полуправыми  $s' \geq (s')_{\min} \geq \frac{1 + \lambda}{1 - \beta} \epsilon$ , т. е. также вне интервала  $(a_0)$ , и будут асимптотически приближаться к симметричному предельному циклу. Для доказательства последнего утверждения рассмотрим последовательность точек пересечения какой-либо траектории с полуправыми  $S$  и  $S'$

$$s_0, s_1, s_2, \dots, s_k, s_{k+1}, \dots,$$

где  $s_{k+1} = \Pi(s_k)$ , с начальной точкой  $s_0$  вне интервала  $(a_0)$ . Очевидно, эта последовательность будет бесконечной, все  $s_k \geq \frac{1 + \lambda}{1 - \beta} \epsilon$  (при  $k \geq 1$ )<sup>2)</sup> и для них в силу (8.75) справедливо неравенство:

$$|s_{k+1} - s^*| < |s_k - s^*|. \quad (8.78)$$

<sup>1)</sup> Заметим, что это обратное преобразование является многозначным, так как каждому значению  $s' \geq (s')_{\min}$  соответствует одно или два значения  $\tau$ , а каждому значению  $\tau$  — два значения  $s$ , одно из которых больше  $\frac{1 + \lambda}{1 - \beta} \epsilon$ , а другое меньше  $-\frac{1 - \lambda}{1 - \beta} \epsilon$ .

<sup>2)</sup>  $s_0$  может быть меньше  $-\frac{1 - \lambda}{1 - \beta} \epsilon$ .

Следовательно, любые такие последовательности  $s_0, s_1, s_2, \dots$  имеют своей предельной точкой неподвижную точку  $s^*$ , а соответствующие фазовые траектории асимптотически (при  $t \rightarrow +\infty$ ) приближаются к симметричному предельному циклу. Таким образом, в рассматриваемом случае область притяжения интервала состояний равновесия состоит из области  $A_0$  и небольших сегментных областей на листах (II) и (III), а вся остальная часть фазовой поверхности представляет собой область притяжения простого симметричного цикла (рис. 436).

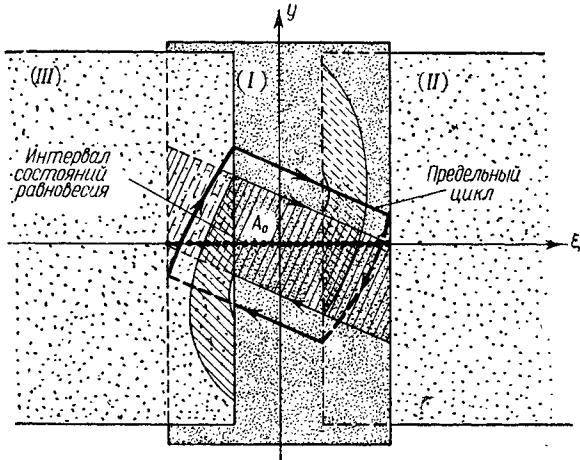


Рис. 436.

Иная, более сложная структура областей притяжения интервала состояний равновесия и предельного цикла получается при

$$(s')_{\min} < \frac{1+\lambda}{1-\beta} \epsilon^1.$$

Ради краткости мы рассмотрим подробно только случай  $-\frac{1-\lambda}{1-\beta} \epsilon < (s')_{\min} < \frac{1+\lambda}{1-\beta} \epsilon$ , когда диаграмма Ламерая имеет вид, изображенный на рис. 433 (такое же рассмотрение и с теми же выводами может быть проведено и при  $(s')_{\min} \leq -\frac{1-\lambda}{1-\beta} \epsilon$ ). Теперь всегда  $\tau^* < \tau_1$ , а последующие точки пересечения фазовых траекторий с полупрямыми  $S$  и  $S'$  могут попадать не только вне интервала  $(a_0)$ , но и на него.

<sup>1)</sup> Нетрудно убедиться, что это неравенство имеет место при

$$\frac{1+\lambda}{1-\beta} < \frac{1 - \frac{e^{-\beta}}{1-\beta} e^{-2\epsilon}}{\epsilon}.$$

Обозначим через  $'s_0$  координату точки на полупрямой  $s \geq \frac{1+\lambda}{1-\beta}\epsilon$ , преобразующуюся преобразованием  $s' = \Pi(s)$  с меньшим значением параметра  $\tau$  в точку  $\frac{1+\lambda}{1-\beta}\epsilon$ , и через  $(b_0)$  — отрезок  $\frac{1+\lambda}{1-\beta}\epsilon \leq s \leq 's_0$ <sup>1)</sup>. Очевидно, последовательность точек пересечения любой траектории с полупрямыми  $S$  и  $S'$ :

$$s_0, s_1, s_2, \dots, s_k, \dots$$

с начальной точкой  $s_0$  на отрезке  $(b_0)$  будет бесконечной (причем все точки  $s_k$  будут принадлежать этому отрезку) и будет иметь своей предельной точкой неподвижную точку  $s^*$ , так как для этой последовательности справедливо неравенство (8.78). Таким образом, отрезок  $(b_0)$  является «отрезком притяжения» неподвижной точки  $s^*$ , а все траектории, пересекающие полупрямые  $S$  и  $S'$  в точках

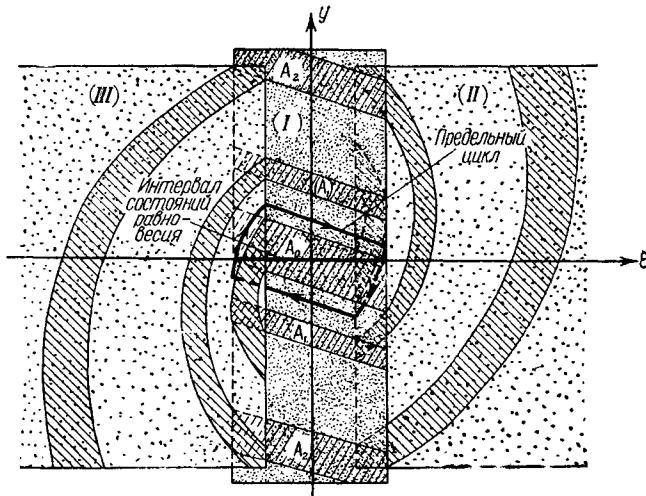


Рис. 437.

отрезка  $(b_0)$ , стремятся при  $t \rightarrow +\infty$  к симметричному предельному циклу. Точки этих траекторий образуют область притяжения предельного цикла — незаштрихованную область на рис. 437.

Далее, совершая преобразование, обратное преобразованию  $s' = \Pi(s)$ , т. е. определяя по заданным точкам  $s'$  те точки  $s$ , которые

1) На полупрямой  $s \geq \frac{1+\lambda}{1-\beta}\epsilon$  имеются две точки, последней которых является точка  $\frac{1+\lambda}{1-\beta}\epsilon$ . Под точкой  $'s_0$  понимается та точка из этих двух, которой соответствует меньшее значение параметра  $\tau$ . Очевидно,  $'s_0 > s'_0$  в силу неравенства (8.75), а отрезок  $(b_0)$  содержит неподвижную точку  $s^*$ .

имеют своими последующими эти точки  $s'$ , мы, отправляясь от интервала  $(a_0)$  и  $(b_0)$ , разобьем полуправую  $s \geq -\frac{\beta}{1-\beta}$  на конечное число интервалов  $(a_1), (a_2), \dots, (a_m)$  и отрезков  $(b_0), (b_1), \dots, (b_{m'})$ , точки которых преобразуются фазовыми траекториями соответственно в точки интервала  $(a_0)$  и отрезка  $(b_0)$  (рис. 433)<sup>1)</sup>. При этом, поскольку интервал  $(a_0)$  и отрезок  $(b_0)$  имеют общую граничную точку (точку  $s = \frac{1+\lambda}{1-\beta} \varepsilon$ ), указанные выше интервалы и отрезки будут чередоваться, примыкая друг к другу<sup>2)</sup>. Поэтому мы можем утверждать, что всякая точка  $s$  полуправой  $(s) \left( s \geq -\frac{1+\lambda}{1-\beta} \varepsilon \right)$  преобразуется после конечного числа преобразований  $s' = \Pi(s)$  в точку, принадлежащую либо интервалу  $(a_0)$ , либо отрезку  $(b_0)$ , а соответствующая фазовая траектория будет асимптотически приближаться или к одному из состояний равновесия или к симметричному предельному циклу в зависимости от того, где (на интервале  $(a_i)$  или на отрезке  $(b_j)$ ) находилась первая точка пересечения этой траектории с полуправой  $S$  (или  $S'$ ).

Такое же построение интервалов  $(a_i)$  и отрезков  $(b_j)$  и с теми же результатами может быть выполнено и при

$$(s')_{\min} \leq -\frac{1-\lambda}{1-\beta} \varepsilon.$$

Следовательно, мы можем считать доказанным, что при выполнении условия существования простого симметричного предельного цикла (т. е. условия (8.77б)) фазовая поверхность рассматриваемой релейной системы состоит только из областей притяжения интервала состояний равновесия и указанного предельного цикла. Иначе говоря, мы доказали, что в системе не существует никаких других устойчивых стационарных режимов, кроме состояний равновесия и автоколебательного режима, соответствующего простому симметричному предельному циклу. Таким образом, система будет приходить к тому или иному состоянию равновесия или в ней будет устанавливаться автоколебательный процесс в зависимости от начальных условий — в зависимости от того, в какой области притяжения находилась изображающая точка в начальный момент времени. Поэтому при выполнении условия (8.77б)

<sup>1)</sup> Построение интервалов  $(a_i)$  и отрезков  $(b_j)$  нужно проводить только на полуправой  $s \geq -\frac{\beta}{1-\beta}$ , так как только точки этой полуправой преобразуются преобразованием  $s' = \Pi(s)$  в точки полуправой  $S'$ . Далее, так как  $(s')_{\min} \leq s < 1$ , то число интервалов  $(a_i)$  и отрезков  $(b_j)$  будет конечным, причем последний из них будет включать в себя точки со сколь угодно большими  $s$ .

<sup>2)</sup> Именно, граничные точки каждого интервала  $(a_i)$  являются концевыми точками соседних отрезков  $(b_j)$ , а концевые точки каждого отрезка  $(b_j)$  являются в свою очередь граничными точками соседних интервалов  $(a_i)$ .

изучаемая нами релейная система имеет *жесткий режим* возбуждения автоколебаний.

Интересно отметить, что граница, разделяющая области притяжения предельного цикла и интервала постояний равновесия, не является неустойчивым предельным циклом, как это было в ранее рассмотренных динамических системах с плоской фазовой поверхностью. Этой границей являются фазовые траектории, проходящие через полограничные точки интервала постояний равновесия. Такая сравнительно необычная структура разбиения на траектории фазовой поверхности рассматриваемой сейчас системы обусловлена, конечно, многогранностью этой поверхности.

**6. Динамика системы при сильной коррекции по скорости.** Нам остается рассмотреть движение системы при  $\beta > 1^1)$ . Разбиение на траектории полосы (I) (реле выключено) для этого случая было изображено на рис. 429. По-прежнему на этой полосе изображающие точки двигаются по прямолинейным фазовым траекториям

$$\xi + (1 - \beta)y = \text{const}$$

по направлению к оси абсцисс, но теперь, в отличие от уже рассмотренного случая  $\beta < 1$ ,

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{1}{\beta - 1} > 0.$$

Обозначим, как и раньше, через  $S$  и  $S'$  те части границ листов (III) и (II), через точки которых изображающая точка переходит на полосу (I), и через  $s$  — координаты точек этих полупрямых ( $y = +s$  на полуправой  $S$ :  $\xi = -\lambda s$ ,  $y < \frac{\beta}{\beta - 1}$  и  $y = -s$  на полуправой  $S'$ :  $\xi = +\lambda s$ ,  $y > -\frac{\beta}{\beta - 1}$ ). Тем же способом, что и при  $\beta < 1$ , несложно получить следующие уравнения точечного преобразования полупрямых  $S$  и  $S'$  самих в себя, осуществляемого фазовыми траекториями системы:

$$\left. \begin{aligned} s &= \begin{cases} -1 - \frac{1+\lambda}{\beta-1}\varepsilon - \frac{\tau - (1-\lambda)\varepsilon}{(\beta-1)(1-e^{-\tau})} & \text{при } s \leq -\frac{1+\lambda}{\beta-1}\varepsilon, \\ 1 + \frac{1-\lambda}{\beta-1}\varepsilon + \frac{\tau - (1-\lambda)\varepsilon}{(\beta-1)(1-e^{-\tau})} & \text{при } s \geq \frac{1-\lambda}{\beta-1}\varepsilon, \end{cases} \\ s' &= 1 + \frac{\tau - (1-\lambda)\varepsilon}{(\beta-1)(e^\tau-1)} \end{aligned} \right\} \quad (8.79)$$

(здесь  $s$  — координата исходной точки полуправой  $S$  или  $S'$ ,  $s'$  — координата последующей точки на тех же полуправых). Точки полу-

<sup>1)</sup> Напомним, что этот случай может быть реализован только в следящей системе (рис. 425), так как в релейной системе автоматического регулирования (в системе непрямого регулирования с сервомотором «постоянной скорости» и с жесткой обратной связью; рис. 427) коэффициент  $\beta < 1$ .

прямых  $S$  и  $S'$  с координатами  $-\frac{1+\lambda}{\beta-1}\varepsilon < s < \frac{1-\lambda}{\beta-1}\varepsilon$ , очевидно, преобразуются фазовыми траекториями, не выходящими за пределы полосы (I), в точки интервала состояний равновесия на этой полосе. Заметим также, что параметр преобразования  $\tau$  в параметрических выражениях (8.79) — время пробега изображающей точки на листе (II) или на листе (III) — может принимать значения  $\tau_0 < \tau < +\infty$ , где  $\tau_0$ , как и раньше, — корень уравнения (8.74).

Диаграмма Ламерей для рассматриваемого случая  $\beta > 1$  приведена на рис. 438. Кривая для  $s$  нигде не пересекается с кривой для  $s'$ ,

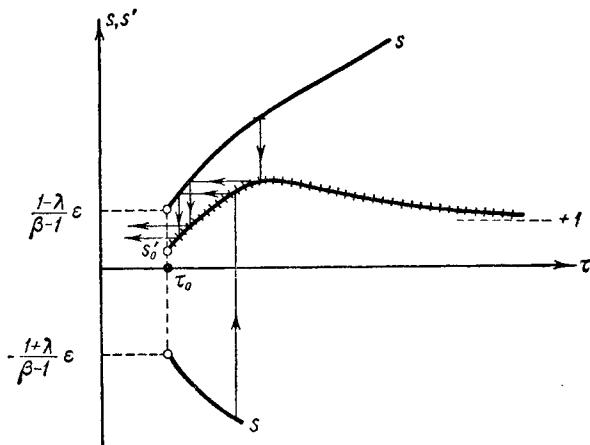


Рис. 438.

преобразование (8.79) не имеет неподвижных точек, и следовательно, на фазовой поверхности нет предельных циклов<sup>1)</sup>. Так как

$$\frac{ds'}{d\tau} < \frac{ds}{d\tau} \text{ при } s \geq \frac{1-\lambda}{\beta-1}\varepsilon,$$

то при любых начальных условиях релейная система придет к одному

1) В самом деле, при  $s \geq \frac{1-\lambda}{\beta-1}\varepsilon$   $s - s' = \frac{\tau}{\beta-1} \geq \frac{\tau_0}{\beta-1}$  (отсюда также следует, что  $\frac{ds}{d\tau} - \frac{ds'}{d\tau} = \frac{1}{\beta-1} > 0$ );

$$\text{при } s \leq -\frac{1+\lambda}{\beta-1}\varepsilon \quad s - s' = -\frac{1+\lambda}{\beta-1}\varepsilon - 2 - \frac{1}{\beta-1} \{ \Psi_1 + \Psi_2 \},$$

т. е. согласно (8.65а) является монотонно убывающей функцией, и поскольку  $(s)_\tau=\tau_0 - (s')_{\tau=\tau_0} = -\frac{1}{1-\lambda} \left\{ 2(1-e^{-\tau_0}) + \frac{1+\lambda}{\beta-1} \tau_0 \right\} < 0$ , кривая для  $s$  нигде не пересекается с кривой для  $s'$  также и при  $s \leq -\frac{1+\lambda}{\beta-1}\varepsilon$ .

из состояний равновесия, так как все «лестницы Ламерея» (см. рис. 438) приводят после конечного числа ступеней на интервал

$$-\frac{1+\lambda}{\beta-1}\varepsilon < s < \frac{1-\lambda}{\beta-1}\varepsilon,$$

точки которого, как было указано, преобразуются в точки интервала состояний равновесия. Разбиение фазовой поверхности системы на траектории при  $\beta > 1$  изображено на рис. 439.

Подводя итог проведенному рассмотрению, мы можем утверждать, что в изученной релейной системе гистерезисные особенности характеристики реле являются причиной автоколебаний. Однако последние

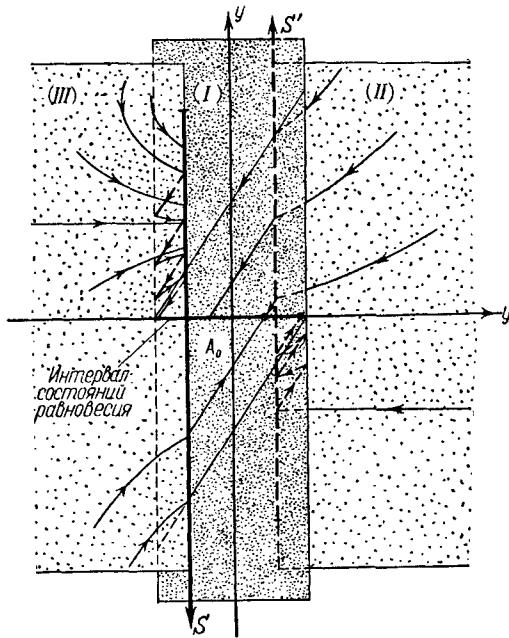


Рис. 439.

могут быть подавлены введением достаточно сильной обратной связи (или достаточно сильной скоростной коррекции), причем величина обратной связи (или скоростной коррекции), необходимая для подавления автоколебаний, тем меньше, чем больше мертвая зона реле.

### § 9. Осциллятор с квадратичным трением

Рассмотрим еще раз осциллятор с квадратичным трением, колебания которого описываются уравнением

$$2\ddot{x} + \dot{x}^2 \operatorname{sgn} \dot{x} + x = 0$$