

из состояний равновесия, так как все «лестницы Ламерея» (см. рис. 438) приводят после конечного числа ступеней на интервал

$$-\frac{1+\lambda}{\beta-1}\varepsilon < s < \frac{1-\lambda}{\beta-1}\varepsilon,$$

точки которого, как было указано, преобразуются в точки интервала состояний равновесия. Разбиение фазовой поверхности системы на траектории при $\beta > 1$ изображено на рис. 439.

Подводя итог проведенному рассмотрению, мы можем утверждать, что в изученной релейной системе гистерезисные особенности характеристики реле являются причиной автоколебаний. Однако последние

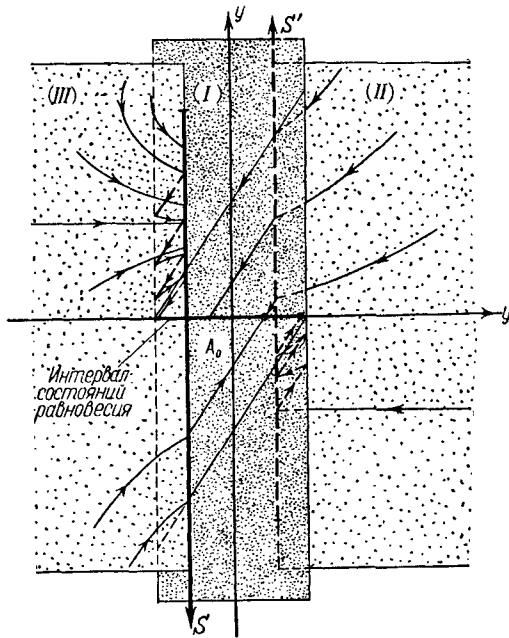


Рис. 439.

могут быть подавлены введением достаточно сильной обратной связи (или достаточно сильной скоростной коррекции), причем величина обратной связи (или скоростной коррекции), необходимая для подавления автоколебаний, тем меньше, чем больше мертвая зона реле.

§ 9. Осциллятор с квадратичным трением

Рассмотрим еще раз осциллятор с квадратичным трением, колебания которого описываются уравнением

$$2\ddot{x} + \dot{x}^2 \operatorname{sgn} \dot{x} + x = 0$$

или системой уравнений

$$\dot{x} = y, \quad 2\dot{y} = -x - y^2 \operatorname{sgn} y \quad (8.80)$$

(см. § 1 гл. III), и покажем путем построения соответствующего точечного преобразования прямой в прямую, что все его фазовые траектории (на фазовой плоскости x, y), скручиваясь, асимптотически при $t \rightarrow +\infty$ приближаются к началу координат $(0, 0)$, которое является, таким образом, состоянием равновесия типа устойчивого фокуса¹⁾. Рассматриваемая система является системой *кусочно-консервативной* (а не кусочно-линейной) и интересна с точки зрения теории точечных преобразований своеобразной формой получаемой функции соответствия, а также тем, что устойчивость неподвижной точки, соответствующей состоянию равновесия, не может быть выяснена с помощью теоремы Кенигса.

Напомним основные результаты рассмотрения такого осциллятора, проведенного в § 1 гл. III. На верхней части фазовой плоскости x, y , где $y > 0$ и уравнения колебаний имеют вид:

$$\dot{x} = y, \quad 2\dot{y} = -x - y^2,$$

фазовыми траекториями являются кривые:

$$(y^2 + x - 1)e^x = C \quad (8.81)$$

(C — постоянная интегрирования, причем $C \geq -1$); парабола $y^2 = 1 - x$, соответствующая значению $C = 0$, является сепаратрисой, разделяющей траектории, идущие из бесконечности (для них $C > 0$), и траектории, начинающиеся в точках оси абсцисс слева от начала координат (для последних $-1 < C < 0$); значению $C = -1$ соответствует изолированная особая точка $(0, 0)$ — состояние равновесия системы. При этом все траектории на верхней полуплоскости выходят на ось абсцисс справа от начала координат (рис. 440).

Так как уравнения (8.80) не меняют своего вида при замене переменных x, y на $-x, -y$, то траектории в нижней части фазовой плоскости ($y < 0$) симметричны относительно начала координат с траекториями на верхней полуплоскости. В частности, все траектории на нижней полуплоскости выходят на ось абсцисс слева от начала координат.

¹⁾ Из уравнений (8.80) следует, что единственным состоянием равновесия системы является точка $(0, 0)$. Заметим, что вопрос о характере (об устойчивости) этого состояния равновесия не может быть решен путем линеаризации уравнений (8.80) в окрестности точки $(0, 0)$. Действительно, отбрасывая в уравнениях (8.80) для их линеаризации член $y^2 \operatorname{sgn} y$ — единственный член второго порядка малости (по сравнению с x и y), мы получим уравнение гармонического осциллятора с особой точкой $(0, 0)$ типа *центра*, т. е. как раз тот случай, когда вопрос о характере состояния равновесия исходной нелинейной системы не может быть решен путем исследования соответствующих линеаризованных уравнений.

Эти свойства фазовых траекторий уравнений (8.80), очевидно, позволяют свести задачу рассмотрения хода траекторий к исследованию последовательности точек пересечения некоторой, произвольной

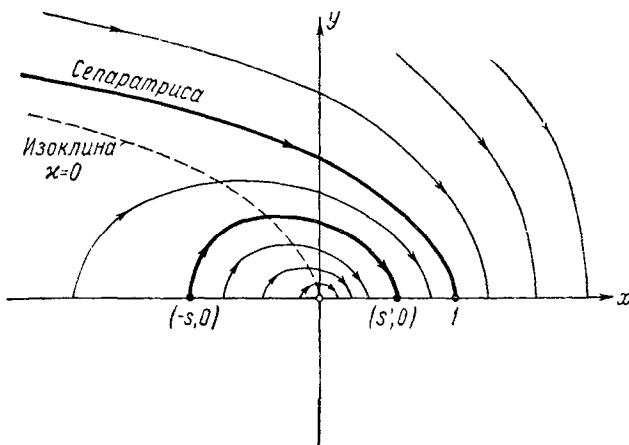


Рис. 440.

фазовой траектории с осью абсцисс (рис. 441), — к исследованию точечного преобразования положительной и отрицательной частей оси

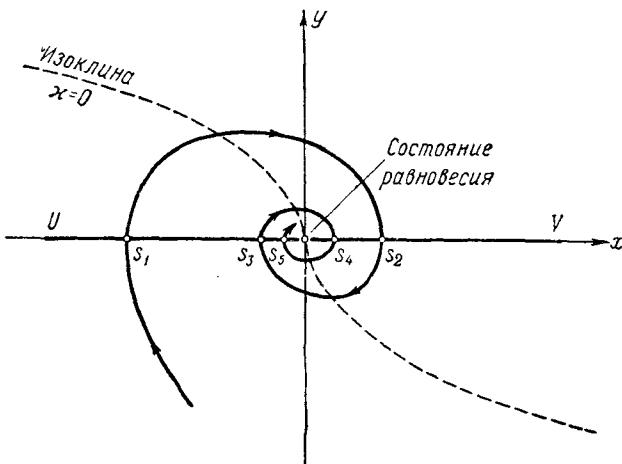


Рис. 441.

абсцисс (полупрямых U и V на рис. 441) друг в друга, осуществляющего траекториями уравнений (8.80). Введем в качестве координаты на положительной и отрицательной полуосях x (на полупря-

мых U и V) расстояние s до начала координат ($s > 0$). Тогда симметричным точкам на оси абсцисс будут соответствовать одинаковые s и точечное преобразование отрицательной полуоси x (полупрямой U) в положительную полуось x (в полупрямую V) будет тождественным (будет иметь ту же функцию соответствия) с точечным преобразованием полупрямой V в полупрямую U . Поэтому в последовательности точек пересечения некоторой, произвольной фазовой траектории с осью абсцисс:

$$s_1, s_2, \dots, s_k, s_{k+1}, \dots$$

каждая последующая точка определяется по предыдущей *единым* точечным преобразованием, *единой* функцией соответствия

$$s_{k+1} = f(s_k),$$

независимо от того, на какой из полупрямых (на U или на V) лежит предыдущая точка.

Для вычисления функции соответствия этого точечного преобразования рассмотрим фазовую траекторию в верхней полуплоскости x, y , начинающуюся в точке $(-s, 0)$ полупрямой U и вновь выходящую на ось абсцисс (на полупрямую V) в точке $(s', 0)$ (рис. 441); здесь s — координата точки на полупрямой U , s' — координата ее последующей на полупрямой V (при этом $s > 0$, а $0 < s' < 1$). Согласно (8.81) координаты этих точек будут связаны уравнением

$$-(s + 1)e^{-s} = (s' - 1)e^{s'} \quad (= C), \quad (8.82)$$

причем $-1 < C < 0$. Так как $\frac{d}{ds'} [(s' - 1)e^{s'}] = s'e^{s'} > 0$, то это уравнение определяет *однозначную* и *непрерывную* функцию соответствия $s' = f(s)$. Для того чтобы найти неподвижные точки рассматриваемого точечного преобразования, введем параметр $\xi = -C$ ($0 < \xi < 1$). Тогда уравнение (8.82) можно записать в параметрической форме — в виде двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (1 + s)e^{-s} &= \xi, \\ (1 - s')e^{s'} &= \xi, \end{aligned} \right\} . \quad (8.82a)$$

выражающих (правда, по-прежнему в неявной форме) s и s' — координаты исходной точки и ее последующей — через параметр ξ :

$$s = \varphi(\xi), \quad s' = \psi(\xi),$$

где φ и ψ , как нетрудно видеть, однозначные и непрерывно дифференцируемые функции. Построим на общей диаграмме (на диаграмме Ламерея) графики этих двух функций (рис. 442). Очевидно,

эти кривые пересекаются в точке $s = s' = 0$, $\xi = 1$, т. е. точка $\bar{s} = 0$ является неподвижной точкой точечного преобразования; этой неподвижной точке соответствует состояние равновесия системы. Так как

$$\frac{d\dot{s}}{ds} = -se^{-s} < 0,$$

$$\frac{d\xi}{ds'} = -s'e^{s'} < 0$$

и, следовательно, при одинаковых s и s'

$$\frac{d\dot{s}}{ds} > \frac{d\dot{s}}{ds'},$$

то кривая $s = \varphi(\xi)$ идет правее кривой $s' = \psi(\xi)$, т. е. при каждом $0 < \xi < 1$ $s' = \psi(\xi) < s = \varphi(\xi)$.

Таким образом, неподвижная точка $\bar{s} = 0$ рассматриваемого точечного преобразования является единственной; кроме того, точка $\bar{s} = 0$ устойчива, поскольку любая последовательность точек:

$$s_1, s_2, \dots, s_k, s_{k+1}, \dots,$$

где $s_{k+1} = f(s_k)$, сходится к ней (см. «лестницу» Ламерея, построенную на рис. 442)¹). Соответственно любая фазовая траектория

¹⁾ Так как $f'(0) = \lim_{s \rightarrow 0} f'(s) = 1$, то для аналитического доказательства устойчивости неподвижной точки $s = 0$ мы не можем воспользоваться теоремой Кенигса. Можно дать следующее простое доказательство устойчивости этой неподвижной точки, опираясь на ее единственность. Рассмотрим какуюлибо последовательность чисел:

$$s_1, s_2, \dots, s_k, s_{k+1}, \dots,$$

где $s_{k+1} = f(s_k)$ — последовательность координат точек пересечения некоторой фазовой траектории с осью абсцисс. Любая такая последовательность является монотонно убывающей последовательностью положительных чисел; поэтому рассматриваемая последовательность имеет предел. Допустим, что он равен $a > 0$. Тогда $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = a$ и $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_{k+1} = a$, но $s_{k+1} = f(s_k)$, где $f(s)$ — непрерывная функция (при всех $s > 0$), поэтому согласно теореме о пределе непрерывной функции

$$a = \lim_{k \rightarrow +\infty} s_{k+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(s_k) = f(a),$$

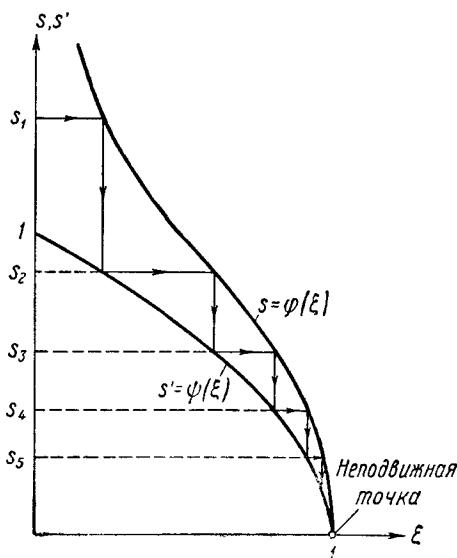


Рис. 442.

асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближается к состоянию равновесия $(0, 0)$, при этом число ее пересечений с осью абсцисс неограниченно возрастает. Следовательно, все траектории системы уравнений (8.80) имеют вид спиралей, скручивающихся к состоянию равновесия $(0, 0)$, в силу чего последнее является *устойчивым фокусом*.

§ 10. Паровая машина

В заключение главы рассмотрим пример *автоворащательной* системы — простейшую динамическую модель (с одной степенью свободы и с *цилиндрической* фазовой поверхностью) парового двигателя, схема которого приведена на рис. 443.

Как известно, паровая машина является системой с «обратной связью»: золотник машины, связанный с ее главным валом через экс-

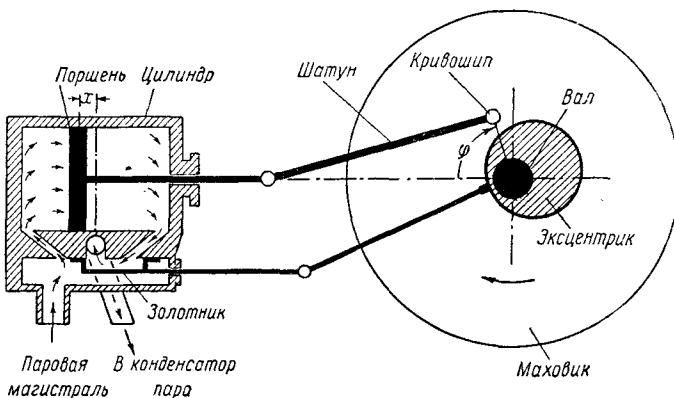


Рис. 443.

центртик, управляет поступлением пара в цилиндр (в его левую или правую полость в зависимости от положения вала) и позволяет тем самым получать от *постоянного* источника энергии (от паровой магистрали с *постоянным* давлением пара P_0) такое *переменное*

т. е. точка $s = a$ также является неподвижной точкой преобразования, что невозможно в силу единственности неподвижной точки $\bar{s} = 0$. Таким образом, любая последовательность

$$s_1, s_2, \dots, s_k, \dots \rightarrow 0,$$

т. е. единственная неподвижная точка $\bar{s} = 0$ является *устойчивой*.