

асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближается к состоянию равновесия $(0, 0)$, при этом число ее пересечений с осью абсцисс неограниченно возрастает. Следовательно, все траектории системы уравнений (8.80) имеют вид спиралей, скручивающихся к состоянию равновесия $(0, 0)$, в силу чего последнее является *устойчивым фокусом*.

§ 10. Паровая машина

В заключение главы рассмотрим пример *автоворащательной* системы — простейшую динамическую модель (с одной степенью свободы и с *цилиндрической* фазовой поверхностью) парового двигателя, схема которого приведена на рис. 443.

Как известно, паровая машина является системой с «обратной связью»: золотник машины, связанный с ее главным валом через экс-

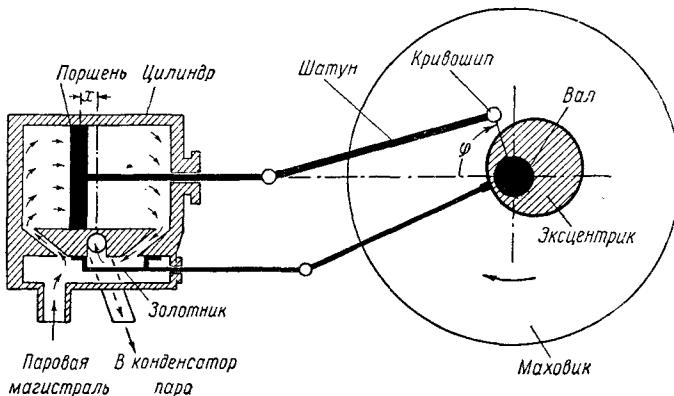


Рис. 443.

центрик, управляет поступлением пара в цилиндр (в его левую или правую полость в зависимости от положения вала) и позволяет тем самым получать от *постоянного* источника энергии (от паровой магистрали с *постоянным* давлением пара P_0) такое *переменное*

т. е. точка $s = a$ также является неподвижной точкой преобразования, что невозможно в силу единственности неподвижной точки $\bar{s} = 0$. Таким образом, любая последовательность

$$s_1, s_2, \dots, s_k, \dots \rightarrow 0,$$

т. е. единственная неподвижная точка $\bar{s} = 0$ является устойчивой.

воздействие на поршень, которое поддерживает колебательное движение поршня и вращательное движение вала (маховика) машины, несмотря на наличие сил сопротивления (в частности, сил, действующих на машину со стороны ее нагрузки)¹⁾. Сила f давления пара на поршень (при заданном давлении пара в паровой магистрали) зависит от положения золотника, который (в зависимости от своего положения) соединяет одну или другую полость цилиндра с паровой магистралью или с конденсатором пара или же перекрывает паропроводящий канал полости, и от положения поршня, поскольку давление пара в полости цилиндра зависит от объема этой полости, если ее канал перекрыт золотником. Ради упрощения задачи будем пренебрегать зависимостью силы f от других величин, например от скорости движения поршня машины²⁾). Так как положения поршня, вала и золотника машины однозначно определяются углом поворота вала φ (но не определяются однозначно, например, координатой поршня x), то, во-первых, сила f будет некоторой однозначной и периодической (с периодом, равным 2π) функцией угла φ (график этой функции качественно изображен на рис. 444) и, во-вторых, состояние полученной динамической модели паровой машины (с одной, механической степенью свободы) будет однозначно определяться заданием угла

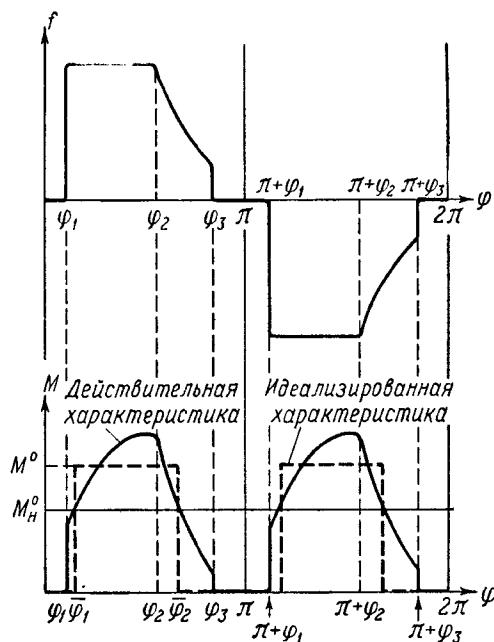


Рис. 444.

¹⁾ Для получения переменной силы давления пара на поршень, поддерживающей вращение вала машины, эксцентрик золотника должен быть повернут на угол около 90° относительно кривошипа шатуна по направлению вращения вала.

²⁾ Строго говоря, сила f давления пара на поршень зависит и от скорости движения поршня, так как при больших скоростях движения поршня будут иметь место большие объемные расходы пара и меньшие давления пара в полости цилиндра из-за увеличенного перепада давления на окнах и каналах парораспределительного устройства (золотника), которые обладают некоторым, отличным от нуля гидравлическим сопротивлением. Однако эта зависимость обычно невелика, и ею мы будем пренебрегать.

поворота φ и угловой скорости $\frac{d\varphi}{dt}$ вала. Соответственно фазовая поверхность этой модели будет цилиндрической¹⁾.

Уравнение вращения вала машины (при сделанных предположениях) запишется в следующем виде:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M - M_n, \quad (8.83)$$

где I — момент инерции машины (главным образом маховика) и ее нагрузки, приведенный к оси вала (ниже будем считать, что I не зависит от φ , т. е. является постоянным), M — момент сил, действующих на вал со стороны поршня машины («движущий момент») и M_n — момент сил сопротивления, преодолеваемых машиной, включая момент сил, действующих на вал со стороны нагрузки машины. Момент сил M связан с силой давления пара на поршень f соотношением

$$M = f(\varphi) A \sin \varphi$$

(для простоты взят случай, когда расстояние A между осями вала и кривошипа шатуна мало по сравнению с длиной шатуна); поэтому движущий момент M также является однозначной и периодической функцией угла φ , но уже с периодом, равным π (рис. 444). Для дальнейшего существенно, что движущий момент $M \geq 0$ (при всех φ) достигает максимума M_{\max} при углах φ , близких к $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$, и обращается в нуль вблизи «мертвых точек» $\varphi = 0, \pi, 2\pi$. Момент сил сопротивления M_n при заданной нагрузке можно считать в большинстве случаев зависящим только от угловой скорости вращения вала $\frac{d\varphi}{dt}$.

¹⁾ Поясним график зависимости силы f от угла φ (рис. 444). При $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, когда с паровой магистралью соединена левая полость цилиндра, давление пара в полости постоянно ($= P_0$), т. е. постоянна и сила давления пара на поршень f . Доступ пара в левую полость прекращается при некотором $\varphi = \varphi_2$, поэтому при дальнейшем увеличении φ давление пара и сила f уменьшаются, поскольку объем левой полости цилиндра увеличивается, а масса пара в ней остается постоянной. Наконец, при $\varphi = \varphi_3$ левая полость соединяется с конденсатором пара и сила f обращается в нуль (правая полость цилиндра соединена с конденсатором пара при всех $0 < \varphi < \pi$). При $\pi < \varphi < 2\pi$ протекают такие же процессы с той лишь разницей, что теперь левая полость цилиндра соединена с конденсатором пара, а пар из паровой магистрали поступает (при $\pi + \varphi_1 < \varphi < \pi + \varphi_2$) в правую полость. Ясно, что в силу симметричности парораспределительного устройства машины функция $f = f(\varphi)$ удовлетворяет условию $f(\pi + \varphi) = -f(\varphi)$.

Мы принимаем функцию $f(\varphi)$ как эмпирически данную. Ее вывод и исследование составляют задачу не теории колебаний, а термодинамики.

Заметим также, что, поскольку угол φ , положение золотника и, следовательно, сила f являются однозначными функциями координаты поршня x плоскость $x, \frac{dx}{dt}$ не может быть взята в качестве фазовой поверхности рассматриваемой динамической системы.

1. Машина, работающая на «постоянную» нагрузку. Предположим, что нагрузка машины создается силами «постоянного» трения, подчиняющихся закону Кулона (см. § 2, гл. III), т. е. что

$$\begin{aligned} \text{при } \frac{d\varphi}{dt} \neq 0 \quad M_h &= M_h^0 \operatorname{sgn} \frac{d\varphi}{dt}, \\ \text{при } \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} M_h = M, \text{ если } M \leq M_h^0, \\ M_h = M_h^0, \text{ если } M \geq M_h^0, \end{array} \right. \end{aligned} \quad (8.84)$$

где M_h^0 — максимальный момент сил трения покоя, причем $M_h^0 < M_{\max}$ ¹⁾. При такой нагрузке машина будет иметь устойчивые состояния равновесия, расположенные вблизи «мертвых точек». Действительно, обозначив через $\bar{\varphi}_1$ и $\bar{\varphi}_2$ те углы поворота вала, при которых движущий момент $M = M_h^0$ (см. рис. 444), мы получим, что при $0 < \varphi < \bar{\varphi}_1$, при $\bar{\varphi}_2 < \varphi < \pi + \bar{\varphi}_1$ и при $\pi + \bar{\varphi}_2 < \varphi < 2\pi$ $M(\varphi) < M_h^0$, поэтому все состояния $(\varphi^*, 0)$, где φ^* — любой угол в одном из трех указанных интервалов, являются состояниями равновесия, поскольку в них согласно (8.84) $M_h = M(\varphi^*)$, так как $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, и следовательно, $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$ (в устойчивости этих состояний равновесия мы убедимся ниже).

Это обстоятельство подсказывает следующую простейшую идеализацию характеристики движущего момента машины $M = M(\varphi)$, значительно упрощающую рассмотрение динамики паровой машины и в то же время сохраняющую указанные выше состояния равновесия. Эта идеализация состоит в замене действительной характеристики движущего момента паровой машины следующей разрывной кусочно-постоянной функцией:

$$M = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \varphi < \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2 \leq \varphi < \pi + \bar{\varphi}_1, \\ & \pi + \bar{\varphi}_2 \leq \varphi < 2\pi, \\ M_0 & \text{при } \bar{\varphi}_1 \leq \varphi < \bar{\varphi}_2, \pi + \bar{\varphi}_1 \leq \varphi < \pi + \bar{\varphi}_2; \end{cases} \quad (8.85)$$

график этой разрывной функции изображен на нижней половине рис. 444 пунктирной линией. «Амплитуду» идеализированного движущего момента M_0 ($M_0 = \text{const}$) мы выберем так, чтобы за каждые пол-оборота вала работа момента (8.85) равнялась работе паровой машины, т. е.

$$M_0 = \frac{1}{\Theta} \int_0^\pi M(\varphi) d\varphi > M_h^0,$$

где $\Theta = \bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1$ — так называемый «угол отсечки» пара и $M(\varphi)$ — характеристика движущего момента паровой машины. Такой выбор M_0

¹⁾ Нетрудно видеть, что при $M_h^0 > M_{\max}$ вал машины или не вращается или остановится через конечный интервал времени, зависящий от начальных условий. Ниже этот мало интересный случай не рассматривается.

обеспечит наилучшее энергетическое соответствие паровой машины и ее динамической модели.

Легко видеть сразу, что движение будет происходить с увеличивающейся угловой скоростью (машина пойдет «в разнос»), если $M_0 > \frac{\pi}{\Theta} M_h^0$, так как в этом случае за каждые пол-оборота работа движущего момента ($= M_0 \Theta$) будет больше работы сил «постоянного» трения нагрузки ($= M_h^0 \cdot \pi$). Если $M_0 = \frac{\pi}{\Theta} M_h^0$, то рассматриваемая модель будет «квазиконсервативной»: она будет иметь континуум периодических движений с $\frac{d\varphi}{dt} > 0$ (этим движениям будут соответствовать замкнутые фазовые траектории, охватывающие фазовый цилиндр в области $\frac{d\varphi}{dt} > 0$). Наконец, при $M_0 < \frac{\pi}{\Theta} M_h^0$ все движения будут затухающими, т. е. машина будет останавливаться при любых начальных условиях. Очевидна негрубость квазиконсервативного случая: машина пойдет «в разнос» или будет останавливаться при любом, сколь угодно малом нарушении равенства $M_0 = \frac{\pi}{\Theta} M_h^0$ из-за изменения «амплитуды» движущего момента M_0 или максимального момента нагрузки M_h^0 .

Полученные результаты отображают, в известной мере, свойства реальных паровых машин, которые, как известно, обладают весьма небольшим саморегулированием, т. е. значительно изменяют скорость вращения вала при сравнительно небольших изменениях нагрузки или давления пара в паровой магистрали (именно поэтому паровые машины обычно снабжаются регуляторами скорости вращения вала!).

Таким образом, паровая машина, работающая на «постоянную» нагрузку, не является (при сделанных выше предположениях) автоворачательной системой. Тем не менее, имея в виду изучение других, автоворачательных динамических моделей паровой машины, мы все же проведем краткий анализ разбиения на траектории фазового цилиндра рассматриваемой сейчас динамической системы.

Введем новые переменные:

$$\vartheta = \varphi - \bar{\varphi}_1 \quad \text{и} \quad t_{\text{нов}} = \sqrt{\frac{M_h^0}{\lambda}} t;$$

тогда уравнение (8.83) для рассматриваемого случая постоянной нагрузки запишется в следующем безразмерном виде¹⁾:

$$\dot{\vartheta} = z, \quad \dot{z} = \lambda \Phi(\vartheta) - \Psi(z, \vartheta), \quad (8.83a)$$

где

$$\lambda = \frac{M_0}{M_h^0} > 1 \quad (\text{так как } M_0 > M_h^0)$$

¹⁾ Здесь и ниже точкой сверху обозначено дифференцирование по новому, безразмерному времени $t_{\text{нов}}$.

и

$$\Phi(\vartheta) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \vartheta < \Theta \text{ и при } \pi \leq \vartheta < \pi + \Theta, \\ 0 & \text{при } \Theta \leq \vartheta < \pi \text{ и при } \pi + \Theta \leq \vartheta < 2\pi \end{cases} \quad (8.85a)$$

(здесь $\Theta = \bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1$ — введенный ранее «угол отсечки» пара);

$$\Psi(z, \vartheta) = \begin{cases} \operatorname{sgn} z \text{ при } z \neq 0 \text{ и любых } \vartheta, \\ 1 & \text{при } z=0 \text{ и } 0 \leq \vartheta < \Theta \text{ или } \pi \leq \vartheta < \pi + \Theta, \\ 0 & \text{при } z=0 \text{ и } \Theta \leq \vartheta < \pi \text{ или } \pi + \Theta \leq \vartheta < 2\pi \end{cases} \quad (8.84a)$$

— приведенные идеализированные характеристики движущего момента машины и момента «постоянной» нагрузки (рис. 445).

Отметим некоторые особенности разбиения фазового цилиндра ϑ, z на траектории уравнений (8.83а): 1) на окружности $z=0$ имеются два «отрезка покоя» $0 \leq \vartheta < \pi$ и $\pi + \Theta \leq \vartheta < 2\pi$, состоящих из *устойчивых состояний равновесия* (в точках «отрезков покоя» $\dot{\vartheta} = 0$, $\dot{z} = 0$, а траектории как на верхней, так и на нижней половине фазового цилиндра подходят при возрастании t к этим точкам, поскольку при указанных значениях $\vartheta \dot{z} = -1$ при $z > 0$ и $\dot{z} = +1$ при $z < 0$); 2) на нижней половине фазового цилиндра (при $z < 0$ и любых ϑ) $\dot{z} > 0$, поэтому там все траектории идут к окружности $z=0$, т. е. или идут к состояниям равновесия на «отрезках покоя» или же переходят на верхнюю половину цилиндра (на окружности $z=0 \dot{z}=0$ при $\Theta \leq \vartheta < \pi, \pi + \Theta \leq \vartheta < 2\pi$, т. е. на «отрезках покоя», и $\dot{z} = \lambda - 1 > 0$ при $0 \leq \vartheta < \Theta, \pi \leq \vartheta < \pi + \Theta$, т. е. вне «отрезков покоя»); 3) нет фазовых траекторий, переходящих (при возрастании t) с верхней половины фазового цилиндра на нижнюю.

Траектории на верхней половине фазового цилиндра ($z > 0$) определяют два точечных преобразования: точечное преобразование Π , преобразующее точки полупрямой U ($\vartheta = 0, z = u > 0$) в точки полупрямой U' ($\vartheta = \pi, z = u' > 0$), и точечное преобразование Π' полупрямой U' в полупрямую $\vartheta = 2\pi, z > 0$, т. е. в полупрямую U .

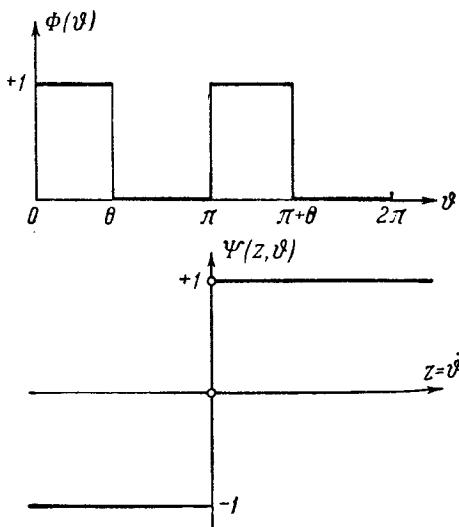


Рис. 445.

Так как движущий момент и, следовательно, правые части уравнений (8.83) являются периодическими функциями угла ϑ с *периодом, равным π* (а не 2π), то разбиения на траектории половин фазового цилиндра $0 \leq \vartheta < \pi$ и $\pi \leq \vartheta < 2\pi$ будут *тождественными* друг другу, в силу чего будут *совпадать* и точечные преобразования

Π и Π' ($\Pi \equiv \Pi'$). Поэтому в последовательности точек пересечения какой-либо, произвольно выбранной траектории с полупрямыми U и U' :

$$u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots$$

каждая последующая точка определяется по предыдущей *одним и тем же* точечным преобразованием (например, преобразованием Π), независимо от того, на какой из полуправых лежит эта точка:

$$u_{k+1} = \Pi(u_k)^1.$$

Для вычисления функции соответствия точечного преобразования Π построим на части фазового цилиндра: $0 \leq \vartheta < \pi, z > 0$ фазовые траектории уравнений (8.83a), определяющие это преобразование

(рис. 446). В области (I): $0 \leq \vartheta < \Theta, z > 0$ уравнения движения (8.83a) имеют вид:

$$\dot{\vartheta} = z, \quad \dot{z} = \lambda - 1,$$

откуда

$$\frac{dz}{d\vartheta} = \frac{\lambda - 1}{z}.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим, что траекториями в области (I) являются дуги парабол:

$$z^2 - 2(\lambda - 1)\vartheta = \text{const}. \quad (8.86a)$$

Аналогично в области (II): $\Theta \leq \vartheta < \pi, z > 0$, где

$$\dot{\vartheta} = z, \quad \dot{z} = -1 \quad \text{и} \quad \frac{dz}{d\vartheta} = -\frac{1}{z},$$

¹⁾ Последовательность точек u_1, u_2, \dots может быть, вообще говоря, *конечной*, так как возможен такой случай, когда на полуправой U имеется отрезок, точки которого преобразуются фазовыми траекториями не в точки полуправой U' , а в точки «отрезка покоя» (точки этого отрезка на полуправой U не будут иметь последующих на полуправой U').

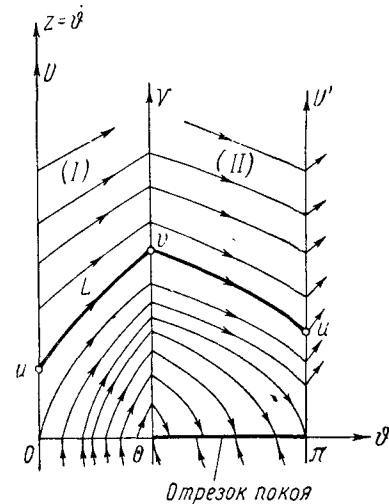


Рис. 446.

траекториями являются дуги других парабол:

$$z^2 + 2\vartheta = \text{const.} \quad (8.866)$$

Пусть L — траектория уравнений (8.83а), начинающаяся в некоторой точке u полупрямой U (т. е. в точке $\vartheta=0$, $z=u>0$). Ее уравнением при $0 \leq \vartheta < \Theta$ будет:

$$z^2 = u^2 + 2(\lambda - 1)\vartheta,$$

поэтому она выйдет на границу области (I) — на полупрямую V ($\vartheta=\Theta$, $z=v>0$) в точке с ординатой v , определяемой соотношением

$$v^2 = u^2 + 2(\lambda - 1)\Theta.$$

В области (II) уравнением траектории L будет:

$$z^2 = v^2 - 2(\vartheta - \Theta),$$

и следовательно, для точки пересечения траектории L с полупрямой U' :

$$u'^2 = v^2 - 2(\vartheta - \Theta)^1)$$

или

$$u'^2 = u^2 + 2(\lambda\Theta - \pi).$$

Это соотношение и определяет (в явном виде) функцию соответствия для точечного преобразования Π точек полупрямой U (с ординатами u) в точки полупрямой U' (с ординатами u')¹⁾.

Диаграммы Ламеря в трех возможных случаях: а) $\lambda\Theta > \pi$, б) $\lambda\Theta = \pi$ и в) $\lambda\Theta < \pi$, изображены на рис. 447—449 (по осям отложены u^2 и u'^2 , тогда графики функции соответствия будут прямыми линиями). При $\lambda\Theta > \pi$ $u'^2 > u^2$ (рис. 447), поэтому последовательность ординат точек пересечения любой траектории с полупрямыми U и U' является неограниченно возрастающей и фазовые траектории, охватывая цилиндр, уходят в бесконечность (т. е. машина идет «в разнос»). При $\lambda\Theta = \pi$ $u'^2 \equiv u^2$ (рис. 448) и все точки полупрямой U (или U') являются неподвижными точками преобразования Π . Следовательно, в этом случае система является «квазиконсервативной»: через каждую точку полупрямой U проходит замкнутая

¹⁾ Траектория, выходящая из точки (Θ, v) , приходит на полупрямую U' только при $v \geq V^2(\pi - \Theta)$. В этом случае точка v полупрямой V имеет последующую на полупрямой U' . Если же $v < V^2(\pi - \Theta)$, то траектория, выходящая из точки (Θ, v) , придет на «отрезок покоя» $\Theta \leq \vartheta < \pi$, $z=0$ и точка v полупрямой V не будет иметь последующей на полупрямой U' .

²⁾ При $\lambda\Theta \geq \pi$ все точки полупрямой U имеют последующие на полупрямой U' ; если же $\lambda\Theta < \pi$, то последующие на U' имеют только те точки полупрямой U , для которых

$$u^2 \geq 2(\pi - \lambda\Theta).$$

траектория, охватывающая цилиндр (машина может работать с любой средней скоростью вращения вала; значение последней определяется

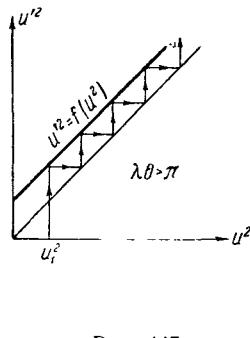


Рис. 447.

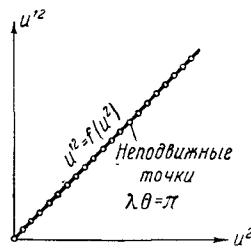


Рис. 448.

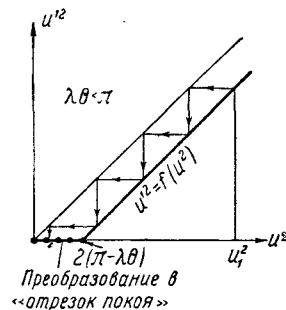


Рис. 449.

начальными условиями). Заметим, что как при $\lambda\theta > \pi$, так и при $\lambda\theta = \pi$ на фазовом цилиндре существуют «отрезки покоя» с некоторой

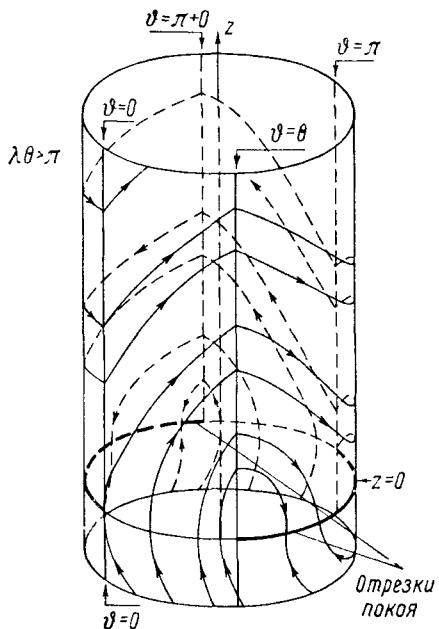


Рис. 450.

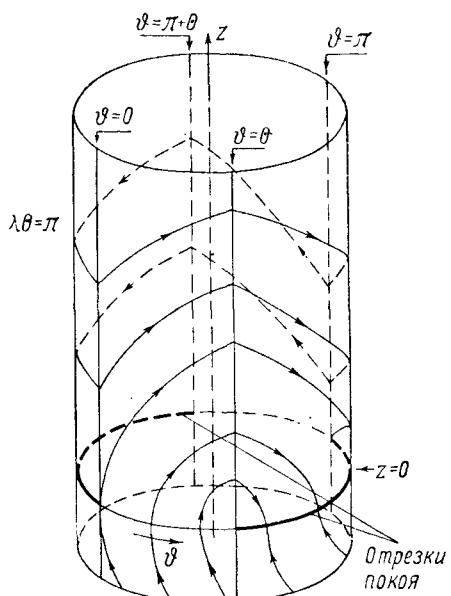


Рис. 451.

областью притяжения, т. е. и в этих случаях можно задать такие начальные условия, при которых машина остановится. Наконец, при $\lambda\theta < \pi$ (рис. 449), когда $u'^2 < u^2$, все последовательности точек

пересечения траекторий с полуупрямыми U и U' являются монотонно убывающими и *конечными*. Действительно, если обозначить через u_1 ординату первой точки пересечения некоторой траектории с полуупрямыми U и U' , то для n -й точки пересечения, где $n = E\left[\frac{u_1^2}{2(\pi - \lambda\Theta)}\right] + 1$ ¹⁾, ордината $u_n < \sqrt{2(\pi - \lambda\Theta)}$, т. е. эта точка не будет иметь последующей в точечном преобразовании Π , а соответствующая траектория, не пересекая более полупрямых U и U' , придет к одной из точек «отрезка покоя». Таким образом, в случае $\lambda\Theta < \pi$ все траектории входят в «отрезки покоя», т. е. машина останавливается при любых начальных условиях. Разбиения на траектории фазового цилиндра ϑ, z для этих трех случаев изображены на рис. 450—452. Так как $\lambda = \frac{M_0}{M_h}$, то полученные результаты, очевидно, совпадают с результатами приведенного выше энергетического рассмотрения.

Таким образом, паровая машина не может работать устойчиво на «постоянную» нагрузку: она или останавливается или идет «в разнос». Для получения устойчивого режима работы машины на «постоянную» нагрузку, при котором вал машины вращается с некоторой заданной средней угловой скоростью, не зависящей от начальных условий, т. е. для получения устойчивого автоворачательного режима паровая машина должна быть снабжена регулятором скорости вращения вала.

2. Паровая машина, работающая на «постоянную» нагрузку и снабженная регулятором. Рассмотрим динамику паровой машины, работающей на «постоянную» нагрузку и снабженной регулятором скорости вращения вала. Одна из наиболее распространенных схем регулирования паровой машины состоит в следующем: с валом машины связывают датчик угловой скорости вращения вала (тахометр),

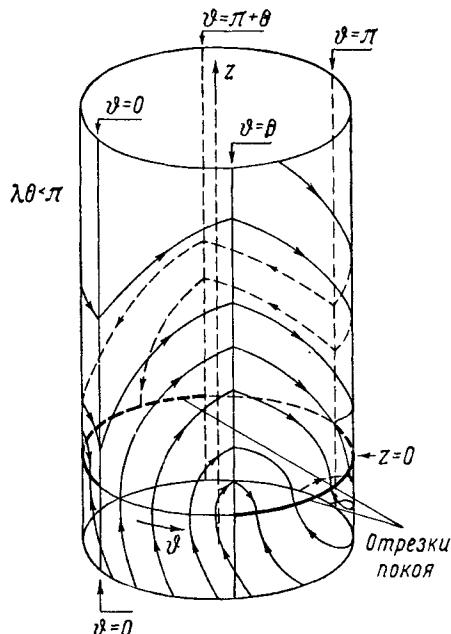


Рис. 452.

¹⁾ Чрез $E(x)$ обозначена целая часть x , т. е. $E(x) = l$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) при $l \leqslant x < l + 1$.

который управляет (или непосредственно или через соответствующую сервосистему) золотником машины, уменьшая «угол отсечки» пара, а следовательно, и работу движущего момента при увеличении скорости вращения вала машины. Считая этот регулятор «безинерционным», т. е. срабатывающим мгновенно, мы будем полагать теперь, что «угол отсечки» Θ не является постоянной величиной, а является некоторой (для простоты — линейной) функцией скорости вращения вала $\dot{\theta} = z$:

$$\Theta = \Theta_0 - kz,$$

где $k > 0$ — коэффициент передачи регулятора, а Θ_0 — «угол отсечки» при $\dot{\theta} = 0$. Остальные предположения относительно движущего момента и момента нагрузки оставим прежними.

Разбиение на траектории фазового цилиндра ϑ, z такой динамической модели паровой машины с регулятором во многом сходно

с только что рассмотренным разбиением: на окружности $z = 0$ имеется два «отрезка покоя» $0 \leq \vartheta < \pi$ и $\pi + \Theta_0 \leq \vartheta < 2\pi$, которые состоят из устойчивых состояний равновесия, все траектории на нижней половине цилиндра идут к «отрезкам покоя» или же переходят на верхнюю половину цилиндра, а изучение хода траекторий на верхней половине фазового цилиндра (при $z > 0$) по-прежнему сводится к построению и исследованию точечного преобразования полуправой $U(\vartheta = 0, z = u > 0)$ в полуправую $U'(\vartheta = \pi, z = u' > 0)$, осуществляемого этими траекториями. Как и в предыдущем случае, траекториями на верхней половине фазового цилиндра являются параболы (8.86а) в области (I), где движущий момент $M = M_0$, т. е.

$\Phi(\vartheta) = 1$, и параболы (8.86б) в области (II), где движущий момент $M = 0$. Но теперь границей областей (I) и (II) является не образующая $\vartheta = \Theta = \text{const}$, а наклонный отрезок V ($\vartheta = \Theta_0 - kz, 0 < z \leq \frac{\Theta_0}{k}$) (рис. 453), и это обстоятельство существенным образом изменяет функцию соответствия интересующего нас точечного преобразования.

Для вычисления функции соответствия рассмотрим траекторию L , выходящую из некоторой произвольной точки u полуправой U . Если $u < \frac{\Theta_0}{k}$, то траектория L сначала пойдет в области (I) ($0 < \vartheta < \Theta_0 - kz$,

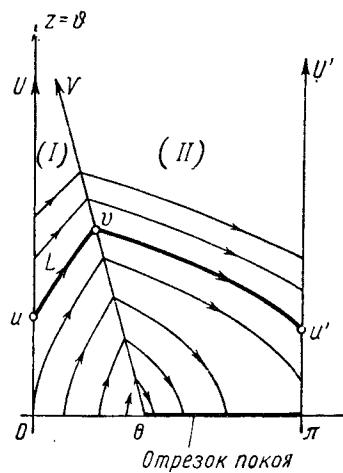


Рис. 453.

$0 < z < \frac{\Theta_0}{k}$, ее уравнением будет:

$$z^2 = u^2 + 2(\lambda - 1)\vartheta,$$

поэтому она выйдет на границу области (I) на отрезок V в точке, ордината которой v определяется уравнением

$$v^2 = u^2 + 2(\lambda - 1)(\Theta_0 - kv). \quad (8.87a)$$

Далее траектория L идет в области (II), ее уравнением будет:

$$z^2 = v^2 - 2(\vartheta - \Theta_0 + kv),$$

и следовательно, она придет на полупрямую U' в точке с ординатой u' , даваемой соотношением

$$u'^2 = v^2 - 2(\pi - \Theta_0 + kv). \quad (8.87b)$$

Полученные соотношения (8.87a) и (8.87b) и определяют (в параметрической форме — через параметр v) функцию соответствия точечного преобразования полупрямой U в полупрямую U' для $u < \frac{\Theta_0}{k}$:

$$\left. \begin{array}{l} u^2 = v^2 - 2(\lambda - 1)(\Theta_0 - kv), \\ u'^2 = v^2 - 2(\pi - \Theta_0 + kv). \end{array} \right\} \quad (8.87)$$

Конечно, в точки полупрямой U' преобразуются только те точки полупрямой U , для которых $u'^2 = v^2 - 2(\pi - \Theta_0 + kv) \geq 0$, т. е.

$$v \geq v_0 = k + \sqrt{k^2 + 2(\pi - \Theta_0)} > k;$$

точки полупрямой U , которым соответствуют $v < v_0$, преобразуются в точки «отрезка покоя».

Если же $u \geq \frac{\Theta_0}{k}$, то траектория L сразу выходит в область (II), ее уравнением будет:

$$z^2 = u^2 - 2\vartheta,$$

и следовательно, ордината u' точки пересечения этой траектории с полупрямой U' (или, иначе говоря, функция соответствия для $u \geq \frac{\Theta_0}{k}$) определяется уравнением

$$u'^2 = u^2 - 2\pi.$$

Ясно, что при $u \geq \frac{\Theta_0}{k}$ неподвижных точек рассматриваемого точечного преобразования не существует, и каждая точка полупрямых U и U' с координатой $u \geq \frac{\Theta_0}{k}$ после конечного числа преобразований

преобразуется в точку с координатой $u < \frac{\Theta_0}{k}$. Поэтому ниже при построении диаграммы Ламерей можно ограничиться интервалом изменения u от 0 до $\frac{\Theta_0}{k}$.

Кривые (8.87) являются гиперболами и в интересующем нас квадранте диаграммы Ламерей ($u, u' > 0, v > 0$) эти гиперболы или не имеют точек пересечения (рис. 454) или же пересекаются в одной

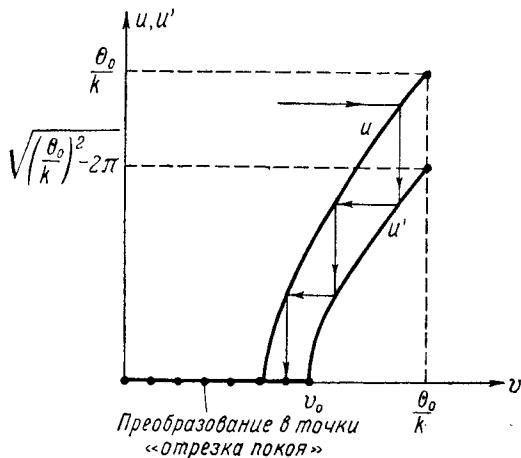


Рис. 454.

точке, соответствующей неподвижной точке \bar{u} точечного преобразования (рис. 455). Для неподвижной точки ($u = u' = \bar{u}, v = \bar{v}$) имеем:

$$\bar{v}^2 - 2(\lambda - 1)(\Theta_0 - k\bar{v}) = \bar{v}^2 - 2(\pi - \Theta_0 + k\bar{v}),$$

т. е.

$$\Theta_0 - k\bar{v} = \frac{\pi}{\lambda} \quad \text{или} \quad \bar{v} = \frac{1}{k} \left(\Theta_0 - \frac{\pi}{\lambda} \right);$$

этому значению \bar{v} соответствует:

$$\bar{u}^2 = \bar{v}^2 - 2(\lambda - 1)(\Theta_0 - k\bar{v}) = \frac{1}{k^2} \left(\Theta_0 - \frac{\pi}{\lambda} \right)^2 - 2(\lambda - 1) \frac{\pi}{\lambda}.$$

Так как для неподвижной точки, если она существует, $\bar{v} > 0$ и $\bar{u}^2 > 0$, то условием ее существования будет выполнение неравенств:

$$\lambda\Theta_0 > \pi \quad \text{и} \quad k^2 < \frac{(\lambda\Theta_0 - \pi)^2}{2\pi\lambda(\lambda - 1)}. \quad (8.88)$$

Эта неподвижная точка устойчива, поскольку в ней (в силу очевид-

ных неравенств: $\bar{v} > v_0 > k > 0$)

$$\frac{du'}{dv} = 2\bar{v} - 2k > 0, \quad \frac{du}{dv} = 2\bar{v} + 2k(\lambda - 1) > \frac{du'}{dv}$$

и, следовательно,

$$0 < \frac{du'}{du} < 1^1).$$

Таким образом, если условия (8.88) не выполнены, то диаграмма Ламерей имеет вид, изображенный на рис. 454, и все траектории на

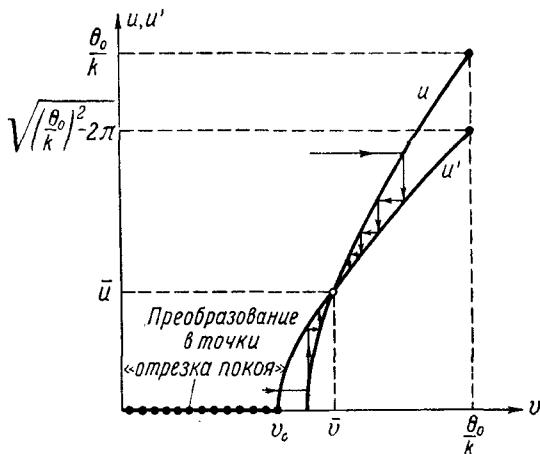


Рис. 455.

фазовом цилиндре ϑ, z машины идут в точки «отрезков покоя» (рис. 456), т. е. машина останавливается при любых начальных условиях.

Если же условия (8.88) выполнены, то все последовательности точек пересечения траекторий с полупрямыми U и U' сходятся к единственной и устойчивой неподвижной точке \bar{u} (рис. 455). Это, очевидно, означает, что на фазовом цилиндре существует единственный и устойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр и соответствующий поэтому *автоворачательному режиму* работы машины, и к этому предельному циклу асимптотически приближаются все траектории, пересекающие полупрямую U или U' хотя бы один раз

¹⁾ В случае $k < 0$, т. е. в случае неправильного включения регулятора, неподвижная точка также будет существовать, если выполнены условия (8.88), но будет обязательно неустойчивой, так как при $k < 0$.

$$0 < \frac{du}{dv} < \frac{du'}{dv} \quad \text{или} \quad \frac{du'}{du} > 1.$$

(рис. 457)¹). Кроме того, на фазовом цилиндре имеются и траектории, входящие в «отрезки покоя» (эти траектории не пересекают полупрямых U и U'). Поэтому при выполнении условий (8.88) мы

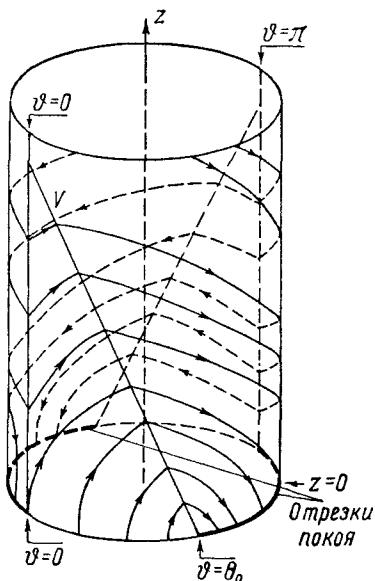


Рис. 456.

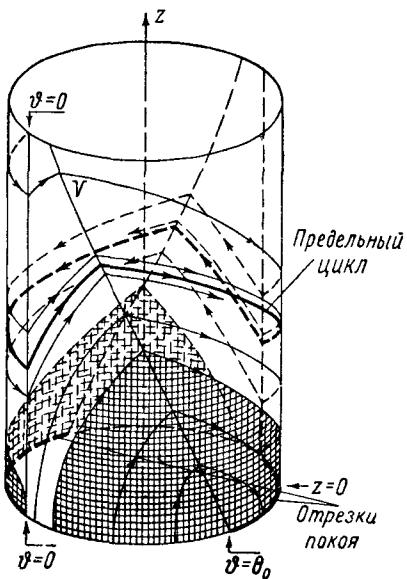


Рис. 457.

имеем дело с *жестким режимом* возбуждения автоворачательного режима работы машины: в машине будет устанавливаться автоворачательный режим (с определенным, не зависящим от начальных условий периодом вращения главного вала машины), если начальные условия выбраны так, что изображающая точка при $t = 0$ находится вне областей притяжения «отрезков покоя» (области притяжения «отрезков покоя» состоят из точек траекторий, входящих в «отрезки покоя», и их границами являются траектории, приходящие в точки $(\Theta_0, 0)$ и $(\pi + \Theta_0, 0)$; эти области на рис. 457 защищованы).

¹⁾ Период автоворачательного движения можно вычислить следующим образом. Согласно второму уравнению (8.83) $\dot{z} = \lambda - 1$ в области (I) и $\dot{z} = -1$ в области (II). Поэтому время пробега изображающей точки, двигающейся по предельному циклу, в области (I) равно $\tau_1 = \frac{\bar{v} - \bar{u}}{\lambda - 1}$ и в области (II) $\tau_2 = \bar{v} - \bar{u}$, т. е. период вращения вала машины (в единицах безразмерного времени) равен:

$$\begin{aligned}\tau = 2(\tau_1 + \tau_2) &= \frac{2\lambda}{\lambda - 1} (\bar{v} - \bar{u}) = \\ &= \frac{2\lambda}{\lambda - 1} \left[\frac{1}{k} \left(\Theta_0 - \frac{\pi}{\lambda} \right) - \sqrt{\frac{1}{k^2} \left(\Theta_0 - \frac{\pi}{\lambda} \right)^2 - 2(\lambda - 1) \frac{\pi}{\lambda}} \right].\end{aligned}$$

Итак, надлежаще выбранный регулятор скорости вращения вала стабилизирует работу паровой машины: при наличии такого регулятора становится возможной устойчивая работа паровой машины на «постоянную» нагрузку. Аналогичное стабилизирующее действие на работу паровой машины оказывает и нагрузка, момент сил которой возрастает с увеличением скорости вращения вала. Такая нагрузка делает невозможным неограниченное нарастание скорости вращения вала, поскольку при таком нарастании имело бы место также неограниченное нарастание работы (за каждый оборот вала) сил, действующих на машину со стороны нагрузки. Поэтому паровая машина будет работать устойчиво на нагрузку, возрастающую с увеличением скорости вращения вала, и без всякого регулятора.

3. Машина, работающая на нагрузку, зависящую от скорости. Рассмотрим динамику паровой машины в предположении, что ее нагрузка создается силами сухого и вязкого трения, т. е. что момент сил нагрузки

$$M_n = \begin{cases} M_n^0 \operatorname{sgn} \frac{d\vartheta}{dt} + H \frac{d\vartheta}{dt} & \text{при } \frac{d\vartheta}{dt} \neq 0, \\ M, \text{ если } \frac{d\vartheta}{dt} = 0 & \text{и } M \leq M_n^0, \\ M_n^0, \text{ если } \frac{d\vartheta}{dt} = 0, \text{ но } M > M_n^0, \end{cases}$$

где M_n^0 — максимальный момент трения покоя, а H — коэффициент характеризующий возрастание момента силы нагрузки с увеличением скорости вращения вала ($H > 0$). На нагрузку такого характера работает, например, паровая машина парохода.

При такой нагрузке уравнения вращения главного вала машины (в переменных, введенных в п. 1 настоящего параграфа), очевидно запишутся в следующем виде:

$$\dot{\vartheta} = z, \quad \dot{z} = \lambda \Phi(\vartheta) - \Psi(z, \vartheta) - hz, \quad (8.89)$$

где $\Phi(\vartheta)$ и $\Psi(z, \vartheta)$ — функции, определенные соотношениями (8.85a) и (8.84a),

$$\lambda = \frac{M}{M_n^0} > 1 \quad \text{и} \quad h = \frac{H}{V M_n^0 I} > 0,$$

причем «угол отсечки» пара Θ снова считается постоянным.

Разбиение полосы $0 \leq \vartheta < \pi$ фазового цилиндра ϑ, z системы на траектории уравнений (8.89) изображено на рис. 458; разбиение на траектории полосы $\pi \leq \vartheta < 2\pi$ цилиндра тождественно совпадает с разбиением полосы $0 \leq \vartheta < \pi$, поскольку правая часть второго уравнения (8.89) является периодической функцией угла поворота вала машины ϑ с периодом, равным π . Как и раньше, на окружности $z = 0$ фазового цилиндра имеются два «отрезка покоя» $\Theta \leq \vartheta < \pi$

и $\pi + \Theta \leqslant \theta < 2\pi$, состоящие из устойчивых состояний равновесия; траектории на нижней половине фазового цилиндра или входят

в «отрезки покоя» или же переходят на верхнюю половину цилиндра; кроме того, на фазовом цилиндре системы нет траекторий, переходящих с его верхней половины на нижнюю. Поэтому, как и в п. 1 настоящего параграфа, изучение динамики паровой машины, работающей на нагрузку, возрастающую с увеличением скорости вращения вала машины (и, в частности, задача нахождения ее периодических движений), сводится к рассмотрению точечного преобразования полуправой $U (\theta = 0, z = u > 0)$ в полуправую $U' (\theta = \pi, z = u' > 0)$, осуществляемого траекториями системы на верхней половине фазового цилиндра.

Для вычисления функции соответствия этого точечного преобразования рассмотрим траекторию L , проходящую через некоторую произвольную точку u полуправой U (рис. 458). Интегрируя уравнения (8.89) в области (I): $0 \leqslant \theta < \Theta, z > 0$, получим уравнения этой траектории в области (I):

$$\begin{aligned} z &= a + (u - a) e^{-ht}, \\ \dot{\theta} &= at + \frac{1}{h}(u - a)(1 - e^{-ht}), \end{aligned}$$

где

$$a = \frac{\lambda - 1}{h} > 0.$$

Эта траектория обязательно пересечет правую границу области (I) — полуправую $V (\theta = \Theta, z = v > 0)$, так как в области (I) $\dot{\theta} = z > 0$ и $\ddot{z} > 0$ на дуге $0 \leqslant \theta < \Theta$ окружности $z = 0$. Если обозначить время пробега изображающей точки по траектории L в области (I) через $t_1 = \frac{\tau_1}{h}$, то это время пробега и ордината v точки пересечения траектории L с полуправой V , очевидно, определятся следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{a}{h} \tau_1 + \frac{1}{h}(u - a)(1 - e^{-\tau_1}), \\ v &= a + (u - a) e^{-\tau_1}. \end{aligned}$$

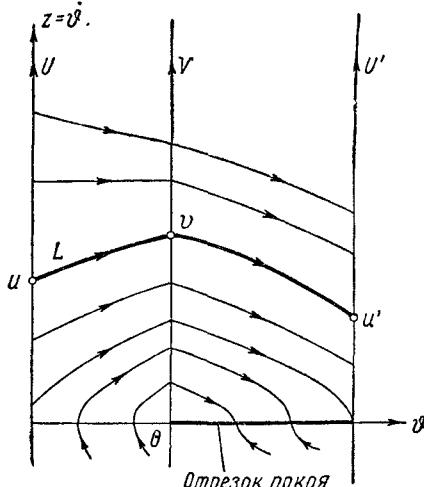


Рис. 458.

Разрешая полученные уравнения относительно u и v , мы получим (в параметрической форме) функцию соответствия для точечного преобразования Π_1 полупрямой U в полупрямую V , осуществляемого траекториями в области (I):

$$u = a \left[1 + \frac{\alpha - \tau_1}{1 - e^{-\tau_1}} \right], \quad v = a \left[1 + \frac{\alpha - \tau_1}{e^{\tau_1} - 1} \right], \quad (8.90)$$

где

$$\alpha = \frac{h\Theta}{a} = \frac{h^2\Theta}{\lambda - 1}.$$

Точки $u = 0$ полупрямой U соответствуют значение параметра τ_1 , равное τ_1^0 и определяемое уравнением

$$\tau_1^0 - 1 + e^{-\tau_1^0} = \alpha \quad (8.90a)$$

(очевидно, $\tau_1^0 > \alpha$), и последующая точка на полупрямой V с ординатой

$$v = v'_0 = a(1 - e^{-\tau_1^0}) = a(\tau_1^0 - \alpha) \quad (8.90b)$$

(ясно, что $0 < v'_0 < a$). Далее, поскольку

$$\frac{du}{d\tau_1} = a \frac{-(1 - e^{-\tau_1}) - (\alpha - \tau_1)e^{-\tau_1}}{(1 - e^{-\tau_1})^2} = -\frac{v}{1 - e^{-\tau_1}} < 0,$$

$$\frac{dv}{d\tau_1} = a \frac{(e^{\tau_1} - 1) - (\alpha - \tau_1)e^{\tau_1}}{(e^{\tau_1} - 1)^2} = -\frac{u}{e^{\tau_1} - 1} < 0$$

и

$$\frac{du}{dv} = \frac{du}{d\tau_1} : \frac{dv}{d\tau_1} = \frac{v}{u} e^{\tau_1} > 0, \quad (8.90b)$$

u и v являются монотонно убывающими функциями параметра τ_1 ; поэтому множеству значений координаты u от 0 до $+\infty$ соответствуют множества значений параметра τ_1 от τ_1^0 до 0 и координат последующих точек v от v'_0 до $+\infty$. Заметим также, что $\frac{du}{dv} = +\infty$ при $u = 0$ (и $v = v'_0$), $u - v = a(\alpha - \tau_1)$, в силу чего $u = v = a$ при $\tau_1 = \alpha$ (эти точки принадлежат прямолинейной траектории $z = a$ в области (I)), $u < v < a$ при $\alpha < \tau_1 < \tau_1^0$, $u > v > a$ при $0 < \tau_1 < \alpha$ и $u \rightarrow v \rightarrow a$ при $\tau_1 \rightarrow +0$ ($u, v \rightarrow +\infty$). График функции соответствия (8.90) преобразования Π_1 изображен на рис. 459.

После пересечения с полупрямой V фазовая траектория L переходит в область (II): $\Theta \leq \theta < \pi$, $z > 0$, где ее уравнениями будут:

$$z = -b + (v + b)e^{-ht},$$

$$\theta = \Theta - bt + \frac{1}{h}(v + b)(1 - e^{-ht})$$

($b = \frac{1}{h}$; кроме того, мы выбрали новое начало отсчета времени так, чтобы $\theta = \Theta$ и $z = v$ при $t = 0$). Если траектория L пересекает полупрямую U' , то ордината этой точки пересечения определяется из следующей системы уравнений:

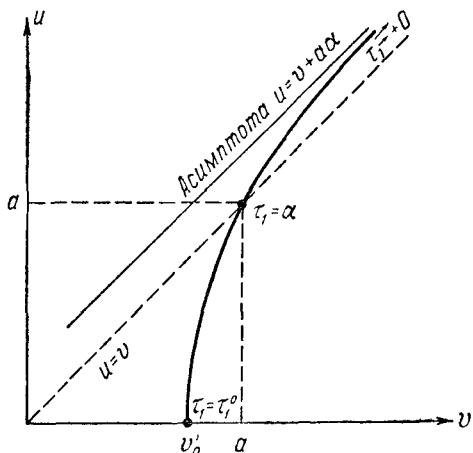


Рис. 459.

ческой форме) функцию соответствия точечного преобразования Π_α полупрямой V в полупрямую U' , осуществляемого траекториями в области (II) :

$$u' = b \left[-1 + \frac{\beta + \tau_2}{e^{\tau_2} - 1} \right], \quad v = b \left[-1 + \frac{\beta + \tau_2}{1 - e^{-\tau_2}} \right], \quad (8.91)$$

где

$$\beta = \frac{h(\pi - \Theta)}{b} = h^2(\pi - \Theta).$$

Обозначим через τ_2^0 значение τ_2 , соответствующее $u' = 0$ и определяемое поэтуому уравнением

$$e^{\tau_2^0} - 1 - \tau_2^0 = \beta; \quad (8.91a)$$

этому значению параметра $\tau_2 = \tau_2^0$ соответствует точка полупрямой V с ординатой

$$v = v_0'' = b(e^{\tau_2^0} - 1) = b(\beta + \tau_2^0). \quad (8.91b)$$

Очевидно, что только точки $v \geq v_0''$ полупрямой V преобразуются траекториями в области (II) в точки полупрямой U' ($u' \geq 0$). Точки полупрямой V с ординатами $0 < v < v_0''$ преобразуются в точки «отрезка покоя», так как траектории, выходящие из этих точек полупрямой V , входят в «отрезок покоя», не пересекая полупрямой U' .

$$\begin{aligned} \pi = \Theta - \frac{b}{h} \tau_2 + \\ + \frac{1}{h} (v + b) (1 - e^{-\tau_2}), \\ u' = -b + (v + b) e^{-\tau_2}; \end{aligned}$$

здесь $\tau_2 = ht_2$, где t_2 — время пробега изображающей точки по траектории L в области (II) от полупрямой V до полупрямой U' . Разрешая эти уравнения относительно u' и v , мы получим (также в параметри-

ческой форме) функцию соответствия точечного преобразования Π_α

Дифференцируя (8.91), получим:

$$\frac{du'}{d\tau_2} = -\frac{v}{e^{\tau_2} - 1} < 0, \quad \frac{dv}{d\tau_2} = -\frac{u}{1 - e^{-\tau_2}} < 0$$

и

$$\frac{du'}{dv} = \frac{v}{u'} e^{-\tau_2} > 0, \quad (8.91\text{в})$$

т. е. u и v являются монотонно убывающими функциями параметра τ_2 , и, следовательно, множеству точек полупрямой V : $v \geq v''_0$, преобразующихся траекториями в области (I) в точки полупрямой U' , соответствует множество значений параметра преобразования τ_2 : $0 < \tau_2 \leq \tau_2^0$. Так как $u' - v = -b(\beta + \tau_2)$, то $u' < v - b\beta$ при всех $0 < \tau_2 \leq \tau_2^0$ (при $\tau_2 \rightarrow +0$ $u' \rightarrow v - b\beta$, причем $u', v \rightarrow +\infty$). График функции соответствия (8.91) точечного преобразования Π_2 приведен на рис. 460.

Интересующее нас «полное» точечное преобразование Π полупрямой U в полупрямую U' является произведением найденных преобразований Π_1 и Π_2 :

$$\Pi = \Pi_1 \cdot \Pi_2.$$

Неподвижная точка этого преобразования ($u' = u = \bar{u}$, $v = \bar{v}$, $\tau_1 = \bar{\tau}_1$, $\tau_2 = \bar{\tau}_2$), соответствующая предельному циклу, охватывающему фазовый цилиндр (т. е. соответствующая автоворачательному режиму работы паровой машины), очевидно, определяется следующей системой трансцендентных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} a \left[1 + \frac{\alpha - \bar{\tau}_1}{1 - e^{-\bar{\tau}_1}} \right] &= b \left[-1 + \frac{\beta + \bar{\tau}_2}{e^{\bar{\tau}_2} - 1} \right], \\ a \left[1 + \frac{\alpha - \bar{\tau}_1}{e^{\bar{\tau}_1} - 1} \right] &= b \left[-1 + \frac{\beta + \bar{\tau}_2}{1 - e^{-\bar{\tau}_2}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (8.92)$$

(ясно, что $\alpha < \bar{\tau}_1 \leq \tau_1^0$ и $0 < \bar{\tau}_2 \leq \tau_2^0$). Согласно (8.90в) и (8.91в), для нее

$$0 < \frac{du'}{du} = \frac{dv'}{dv} : \frac{du}{dv} = e^{-(\bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2)} < 1; \quad (8.92\text{а})$$

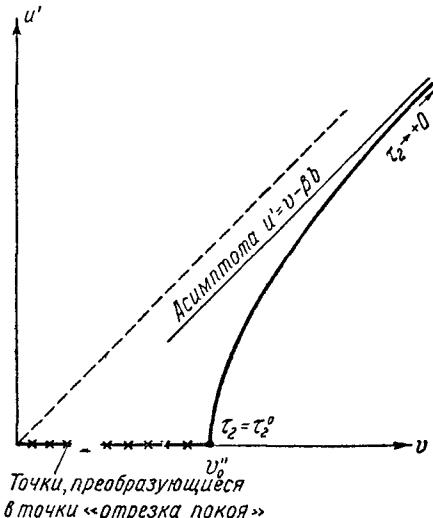


Рис. 460.

следовательно, неподвижная точка, если она существует, является устойчивой и единственной¹⁾.

В зависимости от значений параметров системы h, λ, Θ возможны два качественно различных случая. Если параметры системы таковы, что $v'_0 < v''_0$, то неподвижных точек преобразования Π не существует (рис. 461)²⁾, все последовательности точек пересечения траекторий

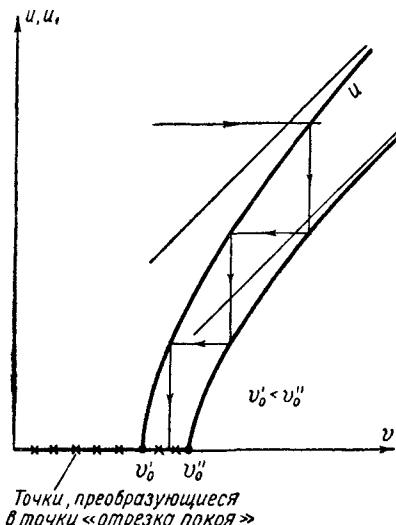


Рис. 461.

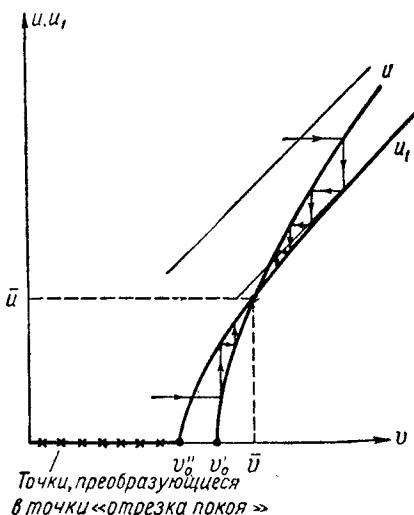


Рис. 462.

системы с полупрямыми U и U' конечны, причем последние точки этих последовательностей преобразуются в точки «отрезков покоя». Следовательно, в этом случае все траектории системы входят в «отрезки покоя», т. е. паровая машина останавливается при любых начальных условиях.

¹⁾ Устойчивость неподвижной точки непосредственно следует из теоремы Кенигса, ее единственность — из того обстоятельства, что если бы преобразование Π имело несколько неподвижных точек, то по крайней мере для одной из них (в силу непрерывности u и u' — функций v и их производных $\frac{du}{dv}$ и $\frac{du'}{dv}$) имело бы место неравенство

$$\frac{du'}{dv} > \frac{du}{dv} > 0,$$

невозможное согласно (8.92а).

²⁾ Так как при $v'_0 < v''_0$ $u' < v$ как при $v = v''_0$, так и при $v \rightarrow +\infty$, то графики функций соответствия (8.90) и (8.91), построенные на общей диаграмме (на диаграмме Ламера), или не пересекаются совсем (тогда неподвижных точек преобразования Π не существует) или же имеют четное число точек пересечения (т. е. имеется четное число неподвижных точек преобразования Π). Последнее согласно доказанному выше невозможно.

Если же $v'_0 > v''_0$, то точечное преобразование Π имеет единственную и устойчивую неподвижную точку, к которой сходятся все последовательности точек пересечения траекторий с полупрямыми U и U' (рис. 462)¹⁾. Поэтому на фазовом цилиндре существует единственный и устойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр, и к этому предельному циклу асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближаются все траектории, пересекающие полупрямые U и U' . Так как, кроме того, имеются устойчивые состояния равновесия, составляющие «отрезки покоя» на фазовом цилиндре, то имеет место *жесткое установление* автоворачательного режима работы паровой машины. Разбиение фазового цилиндра для этого случая изображено на рис. 463. Период установившегося автоворачательного движения вала машины, очевидно, равен (в единицах безразмерного времени)

$$\tau = 2(\bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2),$$

где $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_2$ — корни системы уравнений (8.92), определяющей неподвижную точку преобразования Π .

Таким образом, условие существования автоворачательного режима работы паровой машины сводится к неравенству

$$v'_0 > v''_0$$

или согласно (8.90б) и (8.91б)

$$(\lambda - 1)(1 - e^{-\tau_1^0}) > e^{\tau_2^0} - 1. \quad (8.93)$$

Рассматриваемая нами динамическая модель паровой машины имеет три независимых параметра: λ , Θ и h , которые характеризуют соответственно движущий момент паровой машины, «угол отсечки» пара

¹⁾ Так как теперь $u' > u$ при $v = v'_0$, но по-прежнему $u' < u$ при $v \rightarrow +\infty$, то в силу непрерывности функций соответствия (8.90) и (8.91) существует по крайней мере одна точка пересечения графиков этих функций, построенных на общей диаграмме (см. рис. 462), т. е. существует по крайней мере одна неподвижная точка преобразования Π . Выше на основании неравенства (8.92а) были доказаны устойчивость и единственность этой неподвижной точки.

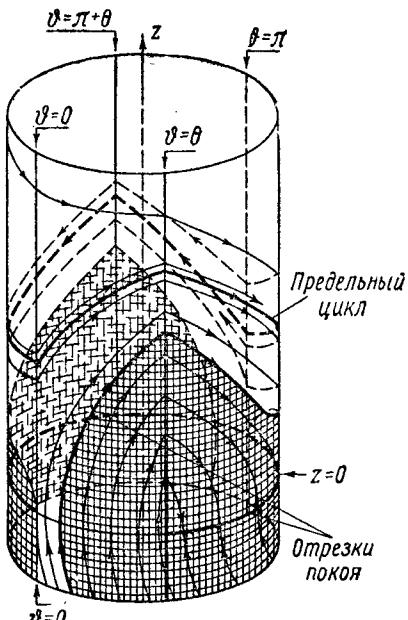


Рис. 463.

и коэффициент вязкого трения нагрузки и через которые выражаются введенные выше параметры a , α , b и β :

$$a = \frac{\lambda - 1}{h}, \quad \alpha = \frac{h^2 \Theta}{\lambda - 1}, \quad b = \frac{1}{h}, \quad \beta = h^2(\pi - \Theta).$$

Сообразно с этим можно взять трехмерное пространство параметров λ , Θ , h (точнее, его часть $\lambda > 1$, $0 < \Theta < \pi$, $h > 0$) и рассмотреть его разбиение на область существования автоворотательного режима работы машины (с жестким установлением), в которой выполнено условие (8.93), и на область остановки машины при любых начальных условиях, в которой условие (8.93) уже не выполняется.

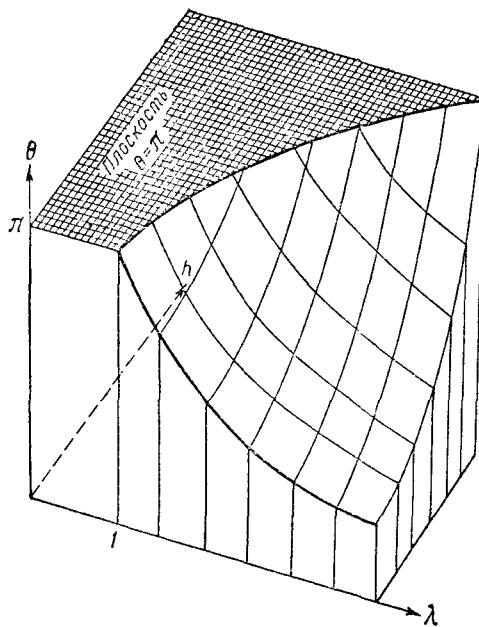


Рис. 464

Уравнения пограничной поверхности, разделяющей эти области, записаны в виде:

$$(\lambda - 1)(1 - e^{-\tau_1^0}) = e^{\tau_2^0} - 1$$

и уравнений (8.90a) и (8.91a):

$$\frac{h^2(\Theta)}{\lambda - 1} = \tau_1^0 - 1 + e^{-\tau_1^0}, \quad h^2(\pi - \Theta) = e^{\tau_2^0} - 1 - \tau_2^0,$$

или в параметрической форме:

$$\left. \begin{aligned} \lambda - 1 &= \frac{e^{\tau_2^0} - 1}{1 - e^{-\tau_1^0}}, \\ \frac{\pi}{\Theta} &= 1 + \frac{1}{\lambda - 1} \frac{e^{\tau_2^0} - 1 - \tau_2^0}{\tau_1^0 - 1 + e^{-\tau_1^0}}, \\ h^2 &= \frac{1}{\pi} [e^{\tau_2^0} - 1 - \tau_2^0 + (\lambda - 1)(\tau_1^0 - 1 + e^{-\tau_1^0})]. \end{aligned} \right\} \quad (8.94)$$

Уравнения (8.94) позволяют сравнительно просто построить сечения пограничной поверхности плоскостями $\lambda = \text{const}$ ¹⁾. Эта пограничная поверхность изображена на рис. 464. Так как при увеличении параметра Θ (остальные параметры λ и h фиксированы) возрастают α и τ_1^0 , а β и τ_2^0 уменьшаются, то в области над пограничной поверхностью условие (8.93) будет выполнено, т. е. над пограничной поверхностью лежит область существования автоворащательного режима работы паровой машины.

¹⁾ Если задаться некоторым значением параметра $\lambda > 1$ и серией значений τ_1^0 , то первое уравнение (8.94) определит соответствующую серию значений τ_2^0 , а два остальных уравнения — соответствующие значения Θ и h , т. е. координаты точек кривой, являющейся сечением пограничной поверхности выбранной плоскостью $\lambda = \text{const}$.