ГЛАВА IX

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ, БЛИЗКИЕ К ГАРМОНИЧЕСКОМУ ОСЦИЛЛЯТОРУ [1]

§ 1. Введение

Перейдем теперь к изложению количественных методов рассмотрения автономных динамических систем (с одной степенью свободы), близких к консервативным системам. При этом мы ограничимся наиболее простым случаем, именно системами, близкими к линейной консервативной системе (к гармоническому осциллятору). Уравнения движения таких систем могут быть написаны в виде уравнения второго порядка [2]):

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}) \tag{9.1}$$

---

[1]) §§ 1 и 3 переработаны Н. А. Железцовым; п. 2 § 3, § 4 и п. 1 § 7 написаны им заново.

[2]) Уравнение системы, близкой к гармоническому осциллятору, в обычных переменных имеет вид:

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} + \omega_0^2 v = \mu F\left(v, \frac{dv}{d\tau}, \mu\right), \tag{α}$$

где τ — время, ω_0 — циклическая частота, v — зависимое переменное, например напряжение или ток, μ — так называемый малый параметр, который мы будем предполагать не имеющим размерности и который определяет близость рассматриваемой системы к линейной консервативной. Вводя безразмерное независимое переменное $t = \omega_0\tau$ и безразмерное зависимое переменное $x = \frac{u}{v_0}$, где v_0 — некоторая определенная физическая величина, имеющая такую же размерность, как и v (например, напряжение насыщения или ток насыщения), получим уравнение (α) в виде:

$$\ddot{x} + x = \mu \frac{1}{v_0\omega_0^2} F(v_0 x, v_0\omega_0\dot{x}; \mu)$$

или, обозначая

$$\frac{1}{v_0\omega_0^2} F(v_0 x, v_0\omega_0\dot{x}; \mu) = f(x, \dot{x}; \mu),$$

в виде:

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}; \mu). \tag{β}$$

Заметим, что часто преобразование уравнения системы, близкой к линейной

или, если ввести $y=\dot{x}$, в виде двух уравнений первого порядка:

$$\dot{x}=y, \qquad \dot{y}=-x+\mu f(x, y). \tag{9.2}$$

Здесь μ — безразмерный положительный параметр, который мы в дальнейшем будем полагать достаточно малым. Величина этого параметра при заданной функции $f(x, y)$ определяет степень близости рассматриваемой системы к гармоническому осциллятору.

Типичным примером систем, близких к гармоническому осциллятору, является (конечно, при определенных условиях) ламповый генератор с колебательным контуром в цепи сетки (рис. 465, *а*) или

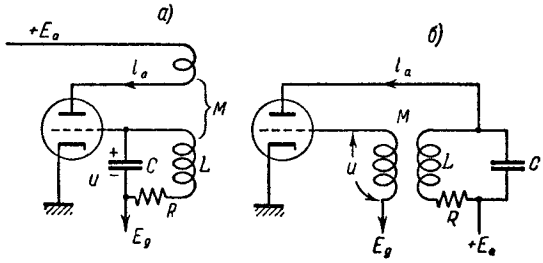

Рис. 465.

в цепи анода (рис. 465, *б*) и с фиксированным смещением. Уравнение колебаний такого генератора (при пренебрежении анодной реакцией, сеточными токами и паразитными параметрами, в частности внутриламповыми емкостями и емкостями монтажа), как известно, записывается в виде:

$$LC\frac{d^2u}{dt^2}+[RC-MS(E_g+u)]\frac{du}{dt}+u=0\ ^{1)}.$$

консервативной, к виду (β), весьма удобному для теоретического исследования, можно провести иным путем: например, можно ввести малый параметр и одновременно привести уравнения к безразмерному виду и т. д.

Теория для простоты рассуждений приводится в тексте для частного случая, когда в уравнении (β) $f(x, \dot{x}; \mu)$ не зависит от μ. Если $f(x, \dot{x}; \mu)$ — многочлен μ, коэффициенты которого в свою очередь полиномы по x и $\dot{x}$, то формулы, относящиеся к первому приближению для уравнений (9.2), например формулы (9.13а) и (9.14а), сохраняют свою силу и для уравнения (β), если только $f(\xi, \eta)$ заменить через $f(\xi, \eta; 0)$.

[1]) Для лампового генератора с колебательным контуром в цепи сетки это уравнение было получено в § 6 гл. I (см. уравнение (1.36)). К этому же уравнению приводятся и уравнения колебаний генератора с контуром в цепи анода (рис. 465, *б*):

$$LC\frac{d^2i}{dt^2}+RC\frac{di}{dt}+i=i_a(E_g+u), \qquad u=-M\frac{di}{dt}$$

(см. § 4 гл. III) путем дифференцирования первого из них и подстановки

$$\frac{di}{dt}=-\frac{u}{M}.$$

Это уравнение заменой переменных $t_{\text{нов}} = \omega_0 t_{\text{ст}}$, $x = \frac{u}{u_0}$, где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и u_0 — некоторое постоянное напряжение (новые переменные $t_{\text{нов}}$ и x являются безразмерными), преобразуются в уравнение

$$\ddot{x} + x = \mu [-1 + \alpha s(x)] \dot{x}, \tag{9.3}$$

в котором $\mu = \omega_0 RC$ — затухание колебательного контура, $\alpha = \frac{MS_0}{RC}$ ($S_0 = S(E_g)$ — крутизна характеристики лампы в рабочей точке) и $s(x) = \frac{S(E_g + u_0 x)}{S_0}$ — приведенная, безразмерная крутизна лампы ($s(x)$ имеет величину порядка единицы). Очевидно, уравнение (9.3) близко к уравнению гармонического осциллятора при

$$\mu \ll 1, \qquad \mu\alpha = \omega_0 M S_0 \ll 1,$$

т. е. мы можем рассматривать ламповый генератор как систему, близкую к гармоническому осциллятору, если затухание колебательного контура и обратная связь в генераторе являются достаточно малыми величинами[1]).

Для решения уравнений вида (9.1) с достаточно малыми μ разработан ряд асимптотических (приближенных) методов, из которых в настоящей главе будут изложены два: метод медленно меняющихся амплитуд (метод Ван-дер-Поля [186]) и метод Пуанкаре [184, 185]. Первый из них дает возможность найти асимптотические решения

---

[1]) Если же затухание колебательного контура генератора $\omega_0 RC$ не мало, то приведение уравнения колебаний генератора к виду (9.1) должно быть сделано иначе. Введем $S_1(x) = S(E_g + u_0 x) - S_0 = S_1^0 \varphi(x)$ — отклонение крутизны характеристики от ее значения в состоянии равновесия, обусловленное, конечно, нелинейностью характеристики лампы (под S_1^0 мы можем понимать значение $S_1(x_0)$ при каком-либо фиксированном значении x_0, определяющее порядок величины значений $S_1(x)$ в интересующем нас интервале значений x). Тогда уравнение лампового генератора можно записать в виде:

$$\ddot{x} + x = \omega_0 [-RC + MS_0 + MS_1^0 \varphi(x)] \dot{x}.$$

Это уравнение будет близким к уравнению гармонического осциллятора при других условиях, а именно при

$$\omega_0 |MS_0 - RC| \ll 1 \quad \text{и} \quad \omega_0 M S_1^0 \ll 1,$$

т. е. вблизи границы самовозбуждения генератора и при малой нелинейности характеристики лампы. Обозначив $\mu = \omega_0 (MS_0 - RC)$ и $\beta = \frac{MS_1^0}{MS_0 - RC}$, мы приведем уравнение генератора к виду:

$$\ddot{x} + x = \mu [1 + \beta \varphi(x)] \dot{x},$$

т. е. к виду (9.1).

уравнения (9.1) (тем более точные, чем меньше параметр μ) как для периодических движений, так и для процессов установления периодических движений или состояний равновесия. Второй (метод Пуанкаре) позволяет найти периодические решения уравнения (9.1) в виде рядов по степеням параметра μ (т. е. принципиально с любой степенью точности, если только эти ряды сходятся)[1]).

§ 2. Метод Ван-дер-Поля

Чтобы исследовать систему уравнений (9.2) при достаточно малых значениях параметра μ, можно воспользоваться следующим приближенным методом исследования нелинейных систем, который будем называть «методом медленно меняющихся амплитуд» или методом Ван-дер-Поля [186, 187, 190, 35, 36]. Именно, вместо уравнений (9.2) можно рассматривать другие, составленные по определенному рецепту, вспомогательные, так называемые *укороченные уравнения* Ван-дер-Поля, которые позволяют сравнительно просто получить приближенные решения исходных уравнений (тем более точные, чем меньше значение параметра μ). В частности, задача отыскания периодических решений уравнений (9.2) (задача отыскания предельных циклов на фазовой плоскости x, y) сводится к несравненно более простой задаче нахождения состояний равновесия укороченных уравнений. Следует отметить, что метод Ван-дер-Поля является адекватным методом исследования нелинейных систем, в том смысле, что этот метод учитывает специфику нелинейных систем, их характерные черты, так как укороченные уравнения, так же как и исходные уравнения, являются нелинейными.

Перейдем к составлению укороченных уравнений для интересующей нас системы (9.2).

Прежде всего заметим, что при $\mu = 0$ система (9.2) превращается в уравнения обычного гармонического осциллятора; их решения, как известно (см., например, §§ 1 и 2 гл. I), имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t + b\sin t, \\ y &= -a\sin t + b\cos t \end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

---

[1]) Метод Ван-дер-Поля и метод Пуанкаре пригодны и для решения неавтономных уравнений вида:

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}, t),$$

где μ — достаточно малый положительный параметр, а также обобщаются на системы (и автономные, и неавтономные), близкие к консервативным системам с любым числом степеней свободы [107, 41].

Другие методы, разработанные для исследования динамических систем, близких к консервативным системам (например, методы «средней крутизны» [18, 136, 178, 73, 74], гармонического баланса [78, 79, 46, 47, 2] и др. [118]), предполагают близость колебаний к синусоидальным и по существу дела являются видоизмененными формами методов, излагаемых в настоящей главе.