

уравнения (9.1) (тем более точные, чем меньше параметр μ) как для периодических движений, так и для процессов установления периодических движений или состояний равновесия. Второй (метод Пуанкаре) позволяет найти периодические решения уравнения (9.1) в виде рядов по степеням параметра μ (т. е. принципиально с любой степенью точности, если только эти ряды сходятся)¹⁾.

§ 2. Метод Ван-дер-Поля

Чтобы исследовать систему уравнений (9.2) при достаточно малых значениях параметра μ , можно воспользоваться следующим приближенным методом исследования нелинейных систем, который будем называть «методом медленно меняющихся амплитуд» или методом Ван-дер-Поля [186, 187, 190, 35, 36]. Именно, вместо уравнений (9.2) можно рассматривать другие, составленные по определенному рецепту, вспомогательные, так называемые *укороченные уравнения* Ван-дер-Поля, которые позволяют сравнительно просто получить приближенные решения исходных уравнений (тем более точные, чем меньше значение параметра μ). В частности, задача отыскания периодических решений уравнений (9.2) (задача отыскания предельных циклов на фазовой плоскости x, y) сводится к несравненно более простой задаче нахождения состояний равновесия укороченных уравнений. Следует отметить, что метод Ван-дер-Поля является адекватным методом исследования нелинейных систем, в том смысле, что этот метод учитывает специфику нелинейных систем, их характерные черты, так как укороченные уравнения, так же как и исходные уравнения, являются нелинейными.

Перейдем к составлению укороченных уравнений для интересующей нас системы (9.2).

Прежде всего заметим, что при $\mu = 0$ система (9.2) превращается в уравнения обычного гармонического осциллятора; их решения, как известно (см., например, §§ 1 и 2 гл. I), имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t + b \sin t, \\ y &= -a \sin t + b \cos t \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

¹⁾ Метод Ван-дер-Поля и метод Пуанкаре пригодны и для решения неавтономных уравнений вида:

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}, t),$$

где μ — достаточно малый положительный параметр, а также обобщаются на системы (и автономные, и неавтономные), близкие к консервативным системам с любым числом степеней свободы [107, 41].

Другие методы, разработанные для исследования динамических систем, близких к консервативным системам (например, методы «средней крутизны» [18, 136, 178, 73, 74], гармонического баланса [78, 79, 46, 47, 2] и др. [118]), предполагают близость колебаний к синусоидальным и по существу дела являются видоизмененными формами методов, излагаемых в настоящей главе.

или

$$\left. \begin{array}{l} x = K \cos(t + \vartheta), \\ y = -K \sin(t + \vartheta) \end{array} \right\} \quad (9.5)$$

(a и b или K и ϑ — постоянные интегрирования), а фазовыми траекториями являются окружности с центром в начале координат, по которым изображающие точки двигаются с постоянной угловой скоростью $\omega = 1$.

Будем искать решения уравнений (9.2) при достаточно малых μ ($0 < \mu \ll 1$) в том же виде (9.4) или (9.5), но, разумеется, считая теперь a и b (или K и ϑ) не константами, а некоторыми, пока неизвестными функциями времени (они, как увидим ниже, будут медленно меняющимися функциями времени). Эта замена переменных x, y на a, b (или K, ϑ) — на «переменные Ван-дер-Поля» — геометрически может быть интерпретирована как переход с фазовой плоскости x, y на другую плоскость (на плоскость переменных Ван-дер-Поля), вращающуюся по часовой стрелке относительно плоскости x, y (вокруг начала координат) с постоянной угловой скоростью

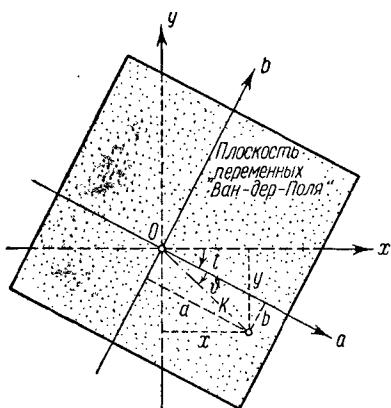


Рис. 466.

$\omega = 1$; на этой вращающейся плоскости a и b являются прямоугольными координатами, K и ϑ — полярными (рис. 466); согласно (9.4) и (9.5) a, b и K, ϑ связаны между собой соотношениями:

$$a = K \cos \vartheta, \quad b = -K \sin \vartheta^1). \quad (9.6)$$

В переменных a, b уравнения (9.2) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} \cos t + \frac{db}{dt} \sin t &= 0, \\ -\frac{da}{dt} \sin t + \frac{db}{dt} \cos t &= \mu f(a \cos t + b \sin t, -a \sin t + b \cos t) \end{aligned}$$

¹⁾ В силу (9.6) положительным направлением отсчета полярного угла ϑ является направление по ходу часовой стрелки.

Заметим также, что при $\mu = 0$ изображающая точка, двигаясь по фазовой плоскости x, y по круговым фазовым траекториям, остается неподвижной относительно вращающейся плоскости, т. е. при $\mu = 0$ каждая точка плоскости переменных Ван-дер-Поля является состоянием равновесия.

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\mu f(a \cos t + b \sin t, -a \sin t + b \cos t) \sin t, \\ \frac{db}{dt} &= \mu f(a \cos t + b \sin t, -a \sin t + b \cos t) \cos t. \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

Рассматривая правые части полученных уравнений как функции трех переменных a , b и t (эти функции — периодические по t с периодом 2π) и развертывая их в ряды Фурье по t (коэффициенты Фурье являются функциями a и b), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \mu \left\{ \frac{\varphi_0(a, b)}{2} + \varphi_1(a, b) \cos t + \bar{\varphi}_1(a, b) \sin t + \right. \\ &\quad \left. + \varphi_2(a, b) \cos 2t + \bar{\varphi}_2(a, b) \sin 2t + \dots \right\}, \\ \frac{db}{dt} &= \mu \left\{ \frac{\psi_0(a, b)}{2} + \psi_1(a, b) \cos t + \bar{\psi}_1(a, b) \sin t + \right. \\ &\quad \left. + \psi_2(a, b) \cos 2t + \bar{\psi}_2(a, b) \sin 2t + \dots \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (9.7a)$$

где $\varphi_i(a, b)$, $\bar{\varphi}_i(a, b)$, $\psi_i(a, b)$ и $\bar{\psi}_i(a, b)$ — соответствующие коэффициенты Фурье функций

$$-\mu f(a \cos t + b \sin t, -a \sin t + b \cos t) \sin t$$

и

$$+\mu f(a \cos t + b \sin t, -a \sin t + b \cos t) \cos t$$

(при фиксированных a и b).

Уравнения (9.7) (или (9.7a)) — это наша система (9.2), преобразованная к другим, медленно меняющимся переменным a , b ($\frac{da}{dt}$ и $\frac{db}{dt}$ являются величинами порядка μ). Так как формулы преобразования переменных (9.4) содержали явно время, то новая система уравнений неавтономна, хотя исходная система была автономной. От этой системы уравнений (9.7a) в медленно меняющихся переменных мы перейдем к приближенным, укороченным уравнениям Ван-дер-Поля:

$$\frac{da}{dt} = \mu \frac{\varphi_0(a, b)}{2}, \quad \frac{db}{dt} = \mu \frac{\psi_0(a, b)}{2}, \quad (9.8)$$

отбрасывая в правых частях все «осциллирующие» члены или, иначе говоря, производя *усреднение* правых частей уравнений (9.7) (или (9.7a)) *по явно входящему времени*.

Решения полученной системы укороченных уравнений (9.8) аппроксимируют при достаточно малых значениях параметра μ решения «полной» системы (9.7), эквивалентной, как уже указывалось,

исходной системе (9.2). Поэтому если мы найдем решения укороченных уравнений $a = a_0(t)$, $b = b_0(t)$, то с помощью формул преобразования переменных (9.4) мы получим приближенные (но тем более точные, чем меньше значение параметра μ) решения системы (9.2):

$$\left. \begin{aligned} x_0(t) &= a_0(t) \cos t + b_0(t) \sin t, \\ y_0(t) &= -a_0(t) \sin t + b_0(t) \cos t. \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

В частности, состояния равновесия укороченных уравнений $a_0(t) \equiv \equiv \text{const}$, $b_0(t) \equiv \text{const}$ соответствуют (приближенно) синусоидальным периодическим решениям уравнений (9.2) с периодом 2π .

Отложив до следующего параграфа доказательство аппроксимирующих свойств укороченных уравнений, займемся сейчас их исследованием (построением их фазовых траекторий на плоскости a , b). Система укороченных уравнений (9.7), как и первоначальная система (9.2), является автономной и может быть исследована обычными методами. Особенно просто это исследование проводится в полярных координатах K , ϑ , в которых укороченные уравнения имеют разделяющиеся переменные.

Для вывода укороченных уравнений в полярных координатах сделаем в исходных уравнениях (9.2) замену переменных x , y на полярные переменные Ван-дер-Поля K , ϑ согласно (9.5)¹⁾:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} \cos(t + \vartheta) - K \frac{d\vartheta}{dt} \sin(t + \vartheta) &= 0, \\ -\frac{dK}{dt} \sin(t + \vartheta) - K \frac{d\vartheta}{dt} \cos(t + \vartheta) &= \mu f[K \cos(t + \vartheta), -K \sin(t + \vartheta)] \end{aligned}$$

или, разрешив относительно $\frac{dK}{dt}$ и $\frac{d\vartheta}{dt}$,

$$\left. \begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= -\mu f[K \cos(t + \vartheta), -K \sin(t + \vartheta)] \sin(t + \vartheta), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= -\frac{\mu}{K} f[K \cos(t + \vartheta), -K \sin(t + \vartheta)] \cos(t + \vartheta). \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

Усредняя правые части полученных уравнений рассматриваемой динамической системы по явно входящему в них времени t (или, что то же самое, по $u = t + \vartheta$, поскольку время t входит в правые части только в комбинации $t + \vartheta$), получим следующие укороченные уравнения для K и ϑ :

$$\frac{dK}{dt} = \mu \Phi(K), \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \mu \Psi(K), \quad (9.11)$$

¹⁾ Укороченные уравнения в переменных K , ϑ , конечно, можно получить и из укороченных уравнений (9.8) заменой переменных (9.6).

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi(K) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[K \cos u, -K \sin u] \sin u \, du, \\ \Psi(K) &= -\frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} f[K \cos u, -K \sin u] \cos u \, du \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

— средние значения по u периодических (с периодом 2π) функций $-f[K \cos u, -K \sin u] \sin u$ и $-\frac{1}{K} f[K \cos u, -K \sin u] \cos u$, зависящие только от K^1 .

Проведем исследование системы укороченных уравнений и построение их фазовых траекторий на плоскости переменных Ван-дер-Поля.

Начнем с первого из уравнений (9.11), которое мы сможем исследовать независимо от второго:

$$\frac{dK}{dt} = \mu \Phi(K); \quad (9.11a)$$

качественная картина уравнения такого типа, как мы видели, полностью определяется расположением и характером состояний равновесия на соответствующей фазовой прямой.

¹ В самом деле, правые части укороченных уравнений для K и ϑ — свободные члены в разложениях Фурье по явно входящему времени t правых частей уравнений (9.9) — соответственно равны:

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[K \cos(\xi + \vartheta), -K \sin(\xi + \vartheta)] \sin(\xi + \vartheta) d\xi$$

и

$$\Psi = -\frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} f[K \cos(\xi + \vartheta), -K \sin(\xi + \vartheta)] \cos(\xi + \vartheta) d\xi$$

(интегрирование ведется при фиксированных значениях K и ϑ), откуда, полагая $u = \xi + \vartheta$ и используя периодичность подинтегральных функций по u (период равен 2π), получим (9.12).

Заметим, что для неавтономных систем вида $\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}, t)$ укороченные уравнения получаются тем же способом, путем преобразования к медленно меняющимся переменным и последующего усреднения правых частей полученных уравнений по времени t , явно входящему в них. Укороченные уравнения получаются также автономными, но с неразделяющимися переменными и в полярных координатах K, ϑ .

Координаты этих состояний равновесия суть корни уравнения

$$\Phi(K) = 0 \quad (9.13)$$

или

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \sin u \, du = 0. \quad (9.13a)$$

Состояние равновесия $K = K_i$ будет устойчивым, если

$$\Phi'(K_i) < 0 \quad (9.14)$$

или если¹⁾

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'_y(K_i \cos u, -K_i \sin u) \, du < 0, \quad (9.14a)$$

и неустойчивым, если

$$\Phi'(K_i) > 0.$$

Остальные движения, как мы знаем, являются либо асимптотическими к состояниям равновесия как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$, либо асимптотическими к состоянию равновесия для $t \rightarrow +\infty$ и уходящими в бесконечность для $t \rightarrow -\infty$ и т. д.

¹⁾ Действительно,

$$\begin{aligned} \Phi'(K) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'_x \cos u \sin u \, du + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'_y \sin^2 u \, du = \\ &= -\frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} [f'_x K \sin u + f'_y K \cos u] \cos u \, du + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'_y \, du = \\ &= \frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} \frac{d}{du} \{f \cos u\} \, du + \frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} f \sin u \, du + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'_y \, du = \\ &= \frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} f \sin u \, du + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'_y \, du, \end{aligned}$$

откуда в силу (9.13)

$$\Phi'(K_i) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'_y(K_i \cos u, -K_i \sin u) \, du.$$

Для этих движений, как всегда в таких случаях, могут быть найдены и аналитические выражения¹⁾.

Действительно, из (9.11а) имеем:

$$\mu(t - t_0) = \int_{K_0}^K \frac{dK}{\Phi(K)},$$

где K_0 — значение K при $t = t_0$, откуда, разрешая это уравнение относительно K , имеем:

$$K = K\{\mu(t - t_0)\}.$$

Теперь перейдем ко второму из уравнений (9.11):

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \mu\Psi(K). \quad (9.11б)$$

Здесь следует различать два случая. В первом случае, довольно

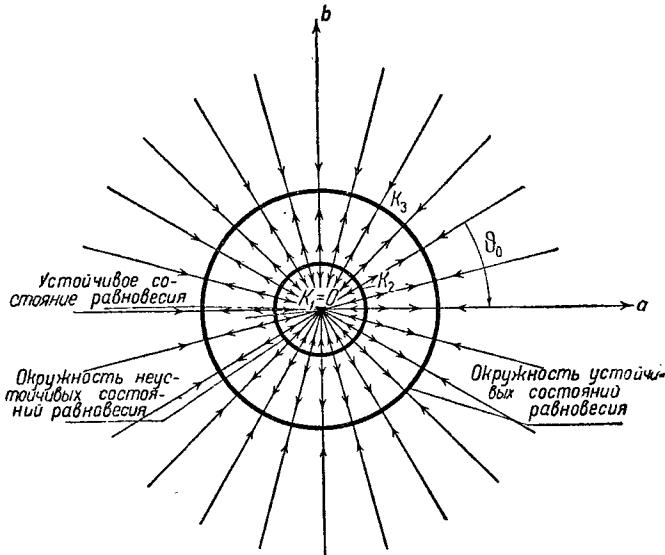


Рис. 467.

часто встречающемся на практике,

$$\Psi(K) \equiv 0$$

или

$$\frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \cos u du \equiv 0.$$

¹⁾ Мы сейчас не рассматриваем вопроса о том, можно ли фактически вычислить те интегралы, которые содержат эти аналитические выражения.

В этом случае второе уравнение интегрируется сразу:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0 \text{ и } \vartheta = \text{const} = \vartheta_0,$$

и мы можем сразу представить себе картину фазовых траекторий на плоскости переменных Ван-дер-Поля. Все интегральные кривые суть прямые, проходящие через начало координат и наклоненные под всевозможными углами $\vartheta = \text{const}$. Движение вдоль каждой из этих прямых происходит одинаково и определяется уравнением (9.11а). Корни уравнения (9.13) $K = K_i$ дают радиусы окружностей, каждая точка которых является состоянием равновесия укороченной системы. Примерная картина разбиения на траектории плоскости переменных Ван-дер-Поля

(плоскости a, b) в частном случае трех состояний равновесия укороченного уравнения (9.11а) изображена на рис. 467.

Если мы перейдем теперь от вращающейся плоскости a, b к неподвижной фазовой плоскости x, y с помощью формул преобразования (9.4) или (9.5), то, как нетрудно видеть, окружностям, состоящим из состояний равновесия на плоскости a, b , будут соответствовать на плоскости x, y круговые предельные циклы, имеющие те же радиусы K_i (рис. 468).

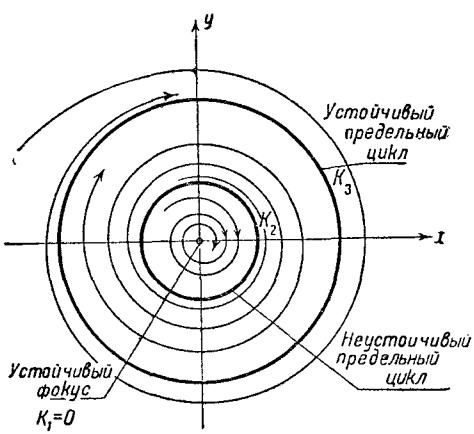


Рис. 468.

Движение изображающей точки по какому-нибудь циклу, имеющему радиус K_i , следует закону:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t + b \sin t = K_i \cos(t + \vartheta_0), \\ y &= -a \sin t + b \cos t = -K_i \sin(t + \vartheta_0), \end{aligned} \right\} \quad (9.15)$$

где ϑ_0 произвольно. Произвольность начальной фазы ϑ_0 для периодических движений по данному предельному циклу на плоскости x, y соответствует тому обстоятельству, что состояния равновесия укороченных уравнений образуют на плоскости a, b целые окружности.

Сразу видно, что предельный цикл будет орбитно устойчив, если соответствующие состояния равновесия на плоскости a, b будут устойчивы, и наоборот. Остальные траектории, представляющие собою на плоскости a, b отрезки прямых, преобразуются на плоскости x, y

в спирали, вообще говоря, накручивающиеся на предельные циклы либо при $t \rightarrow +\infty$, либо при $t \rightarrow -\infty$.

Перейдем теперь ко второму случаю, когда $\Psi(K) \not\equiv 0$. Пусть уравнение $\Psi(K)=0$ имеет несколько корней и пусть эти корни будут $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_m$. Мы предположим, что ни одно из чисел $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_m$ не совпадает с числами K_1, K_2, \dots, K_n , о которых у нас уже была речь.

Тогда, возвращаясь к уравнениям (9.11), легко сделать заключение, что состояниям равновесия уравнения (9.11a) на фазовой плоскости a, b соответствуют круговые предельные циклы, опять-таки с радиусами K_1, K_2, \dots, K_n . Движение изображающей точки на плоскости a, b по какому-нибудь предельному циклу радиуса K_j подчиняется уравнениям:

$$K = K_j = \text{const}, \quad \theta = \mu \Psi(K_j) t + \theta_0$$

или

$$a = K_j \cos \{\mu \Psi(K_j) t + \theta_0\}, \quad b = -K_j \sin \{\mu \Psi(K_j) t + \theta_0\}.$$

Устойчивость или неустойчивость рассматриваемого предельного цикла определяется устойчивостью или неустойчивостью соот-

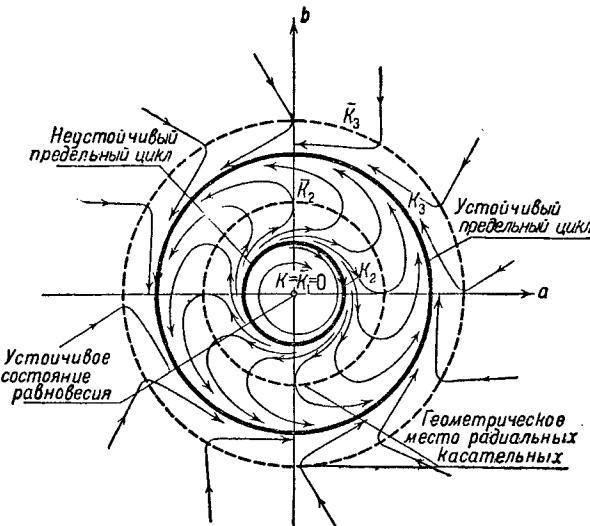


Рис. 469.

ветствующего состояния равновесия для уравнения (9.11a), а направление вращения — знаком $\Psi(K)$.

Остальные кривые суть спирали, накручивающиеся на предельные циклы (или на состояние равновесия) либо при $t \rightarrow +\infty$, либо при $t \rightarrow -\infty$ (рис. 469). Если мы теперь в этом втором случае перейдем

к неподвижной системе координат, то получим картину, совершенно аналогичную той, которая была на этой плоскости в первом случае. Мы будем опять иметь ряд предельных циклов с радиусами K_1, K_2, \dots, K_n . Движение по какому-нибудь из этих предельных циклов, для которого $K = K_j$, дается уравнениями¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} x &= K_j \cos \{ [1 + \mu \Psi(K_j)] t + \vartheta_0 \}, \\ y &= -K_j \sin \{ [1 + \mu \Psi(K_j)] t + \vartheta_0 \}. \end{aligned} \right\} \quad (9.15a)$$

Этот случай отличается от первого случая лишь тем, что здесь мы имеем определенную поправку на частоту $\Delta\omega = \mu\Psi(K_j)$, которая в первом приближении по μ соответствует поправке на период $\tau = -2\pi\mu\Psi(K_j)$ (т. е. относительной поправке $\frac{\tau}{2\pi} = -\mu\Psi(K_j)$). Остальные траектории — опять спирали, вообще говоря, медленно накручивающиеся на предельные циклы или на состояние равновесия $x = 0, y = 0$, если последнее существует и устойчиво.

Мы истолковали результаты исследования укороченных уравнений (уравнений (9.8) или, что все равно, уравнений (9.11)) на основной фазовой плоскости x, y . Теперь возникает вопрос, в какой мере эти результаты отражают свойства решений исходных уравнений (9.2)?

Можно доказать (и в этом, вообще говоря, и заключается обоснование метода Ван-дер-Поля), что то разбиение фазовой плоскости x, y на траектории, которое мы только что получили с помощью решений укороченных уравнений, аппроксимирует при достаточно малых μ картину фазовых траекторий исходной системы уравнений (9.2). Это высказывание можно сделать более точным. Именно, что касается предельных циклов, то мы докажем, что при достаточно малых μ уравнения (9.2) действительно имеют предельные циклы (если уравнение $\Phi(K) = 0$ имеет простые корни K_i), которые близки к окружностям с радиусами K_i (тем ближе, чем меньше μ), и не имеют других предельных циклов; эти предельные циклы, соответствующие периодическим, близким к синусоидальным движениям, устойчивы, если $\Phi'(K_i) < 0$ ²⁾.

Что же касается решений, соответствующих процессам установления, то мы, следуя Л. И. Мандельштаму и Н. Д. Папалекси [90], докажем, что решения укороченных уравнений сколь угодно мало отличаются от решений исходных уравнений (9.2) (при одинаковых

¹⁾ Заметим, что для этого решения $\frac{dx}{dt}$ равняется y лишь с точностью до величин порядка μ .

²⁾ В § 5 этой главы, когда будет идти речь о методе Пуанкаре, мы получим выражение для периода автоколебаний в виде ряда по степеням параметра μ , причем коэффициентом члена, пропорционального μ , является $-2\pi\Psi(K_i)$.

начальных условиях) в течение сколь угодно большого промежутка времени $\frac{D}{\mu}$ (D — положительное, сколь угодно большое число), если параметр μ достаточно мал.

§ 3. Обоснование метода Ван-дер-Поля

1. Обоснование метода Ван-дер-Поля для процессов установления [90, 149]. Для доказательства последнего утверждения, приведенного в конце предыдущего параграфа, относительно аппроксимирующих свойств выражения (9.9), полученного с помощью решения укороченных уравнений, нам, очевидно, достаточно доказать следующее предложение:

Пусть $a = a(t)$, $b = b(t)$ — решение «полной» системы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \mu \left\{ \frac{\varphi_0(a, b)}{2} + \sum_j [\varphi_j(a, b) \cos jt + \bar{\varphi}_j(a, b) \sin jt] \right\}, \\ \frac{db}{dt} &= \mu \left\{ \frac{\psi_0(a, b)}{2} + \sum_j [\psi_j(a, b) \cos jt + \bar{\psi}_j(a, b) \sin jt] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (9.7a)$$

и $a = a_0(t)$, $b = b_0(t)$ — решение системы укороченных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \mu \frac{\varphi_0(a, b)}{2}, \\ \frac{db}{dt} &= \mu \frac{\psi_0(a, b)}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$

удовлетворяющие одним и тем же начальными условиям: при $t = t_0$ $a(t_0) = a_0(t_0)$, $b(t_0) = b_0(t_0)$; тогда по заданным положительным ε и D (ε может быть сколь угодно малым, D — сколь угодно большим) всегда можно найти такое достаточно малое μ , чтобы

$$|a(t) - a_0(t)| < \varepsilon, \quad |b(t) - b_0(t)| < \varepsilon$$

или

$$t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{D}{\mu}.$$

Прежде всего заметим, что укороченные уравнения (9.8) преобразованием времени $\tau = \mu t$ (здесь τ — так называемое «медленное» время) приводятся к виду:

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{\varphi_0(a, b)}{2}, \quad \frac{db}{d\tau} = \frac{\psi_0(a, b)}{2};$$

поэтому их решение зависит только от «медленного» времени τ и от начальных условий при некотором $\tau = \tau_0$. Следовательно, задавая начальные значения $a_0(t_0)$, $b_0(t_0)$ и промежуток «медленного» времени D , мы тем самым задаем на плоскости a, b некоторую конечную и