начальных условиях) в течение сколь угодно большого промежутка времени $\frac{D}{\mu}$ (D — положительное, сколь угодно большое число), если параметр μ достаточно мал.

§ 3. Обоснование метода Ван-дер-Поля

1. Обоснование метода Ван-дер-Поля для процессов установления [90, 149]. Для доказательства последнего утверждения, приведенного в конце предыдущего параграфа, относительно аппроксимирующих свойств выражения (9.9), полученного с помощью решения укороченных уравнений, нам, очевидно, достаточно доказать следующее предложение:

Пусть $a = a(t)$, $b = b(t)$ — решение «полной» системы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \mu\left\{\frac{\varphi_0(a,b)}{2} + \sum_j [\varphi_j(a,b)\cos jt + \bar{\varphi}_j(a,b)\sin jt]\right\}, \\ \frac{db}{dt} &= \mu\left\{\frac{\psi_0(a,b)}{2} + \sum_j [\psi_j(a,b)\cos jt + \bar{\psi}_j(a,b)\sin jt]\right\} \end{aligned}\right\} \quad (9.7a)$$

и $a = a_0(t)$, $b = b_0(t)$ — решение системы укороченных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \mu\frac{\varphi_0(a,b)}{2}, \\ \frac{db}{dt} &= \mu\frac{\psi_0(a,b)}{2}, \end{aligned}\right\} \quad (9.8)$$

удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям: при $t = t_0$ $a(t_0) = a_0(t_0)$, $b(t_0) = b_0(t_0)$; *тогда по заданным положительным* ε *и* D (ε может быть сколь угодно малым, D — сколь угодно большим) *всегда можно найти такое достаточно малое* μ, *чтобы*

$$|a(t) - a_0(t)| < \varepsilon, \quad |b(t) - b_0(t)| < \varepsilon$$

или

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \frac{D}{\mu}.$$

Прежде всего заметим, что укороченные уравнения (9.8) преобразованием времени $\tau = \mu t$ (здесь τ — так называемое «медленное» время) приводятся к виду:

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{\varphi_0(a,b)}{2}, \quad \frac{db}{d\tau} = \frac{\psi_0(a,b)}{2};$$

поэтому их решение зависит только от «медленного» времени τ и от начальных условий при некотором $\tau = \tau_0$. Следовательно, задавая начальные значения $a_0(t_0)$, $b_0(t_0)$ и промежуток «медленного» времени D, мы тем самым задаем на плоскости a, b некоторую конечную и

не зависящую от μ дугу фазовой траектории $a = a_0(t)$, $b = b_0(t)$ $\left(t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \frac{D}{\mu}\right)$ укороченных уравнений. Таким образом, наше предложение утверждает, что решение укороченных уравнений обладает указанными выше аппроксимирующими свойствами на любой заданной дуге фазовой траектории укороченных уравнений (на конечных интервалах изменения переменных a и b).

Для сокращения выкладок мы докажем сформулированное выше предложение для случая одного уравнения первого порядка:

$$\frac{da}{dt} = \mu F(a, t), \tag{9.16}$$

для которого укороченное уравнение имеет вид:

$$\frac{da}{dt} = \mu f(a). \tag{9.17}$$

Здесь $F(a, t)$ — функция периодическая по явно входящему t (с периодом 2π), а

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(a, \xi)\, d\xi$$

— ее среднее значение по t (при любых фиксированных a). Заметим, что функцию $F(a, t)$ можно представить в виде:

$$F(a, t) = f(a) + \varphi(a, t), \tag{9.18}$$

где, очевидно, $\varphi(a, t)$ — функция, периодическая по t (с периодом 2π) и имеющая среднее значение (также по t при любых фиксированных a), равное нулю; таким образом, при любых a и t

$$\int_t^{t+2\pi} \varphi(a, \xi)\, d\xi \equiv 0. \tag{9.19}$$

Доказательство для интересующего нас случая системы второго порядка (9.7а) (или для системы уравнений любого порядка, записанной в медленно меняющихся переменных) не отличается по идее от доказательства, которое будет проведено ниже.

Будем рассматривать решение $a = a(t)$ «полного» уравнения (9.16) и решение $a = a_0(t)$ укороченного уравнения (9.17), удовлетворяющие одному и тому же начальному условию:

$$\text{при } t = t_0 \quad a(t_0) = a_0(t_0) = \eta.$$

Мы будем предполагать ниже, что на некотором интервале изменения a

$$|a - \eta| < A \tag{9.20}$$

и при любых t функции $f(a)$ и $F(a, t)$ (или $f(a)$ и $\varphi(a, t)$) непрерывны, ограничены и, кроме того, удовлетворяют условиям Липшица, т. е. существуют положительные числа M, P, Q и B такие, что при любых a, a', a'' в интервале (9.20) и любых t выполняются неравенства [1]):

$$\left.\begin{aligned} &|f(a)|<M, \quad |\varphi(a, t)|<P, \\ &|\varphi(a'', t)-\varphi(a', t)|<Q|a''-a'|, \\ &|F(a'', t)-F(a', t)|<B|a''-a'|. \end{aligned}\right\} \tag{9.21}$$

Заметим, что последние два неравенства (9.21) заведомо выполнены, если в интервале (9.20) функции $f(a)$ и $F(a, t)$ имеют непрерывные и ограниченные производные по a, в силу теоремы Лагранжа о конечных приращениях функций.

Нам нужно доказать, что *по любым заданным положительным числам* ε *и* D (ε *сколь угодно мало) всегда можно подобрать такое достаточно малое* μ, *чтобы для всех* t, *удовлетворяющих условию*

$$0 \leqslant \mu(t-t_0) \leqslant D,$$

выполнялось неравенство

$$|a(t)-a_0(t)|<\varepsilon.$$

На число D накладывается только одно ограничение: D должно быть таким, чтобы решение $a_0(t)$ при любых μ и при всех значениях t, удовлетворяющих неравенству $0 \leqslant \mu(t-t_0) \leqslant D$, не выходило за пределы выбранного ранее интервала (9.20), т. е. чтобы

$$|a_0(t)-\eta|<A \tag{9.22}$$

при

$$0 \leqslant \mu(t-t_0) \leqslant D.$$

Такое D всегда можно выбрать, так как решение $a_0(t)$ есть функция только $\mu(t-t_0)$. Заметим, что и здесь, задавая начальное значение η и промежуток «медленного» времени D, мы задаем на траектории $a=a_0(t)$ укороченного уравнения некоторый отрезок *конечной* длины; таким образом, мы хотим доказать, что решение $a_0(t)$ аппроксимирует (при достаточно малых μ) решение $a(t)$ на всем этом отрезке траектории укороченного уравнения, т. е. при *конечных* изменениях переменного a.

Для доказательства нашего предложения будем искать решение уравнения (9.16) методом последовательных приближений, взяв

---

[1]) Каких-либо ограничений на значения η накладывать не нужно вследствие непрерывности и периодичности по t функции $\varphi(a, t)$.

за нулевое приближение $a_0(t)$. Первое приближение мы найдем, подставляя $a_0(t)$ в правую часть уравнения (9.16) и интегрируя:

$$a_1(t) = \eta + \mu \int_{t_0}^{t} F[a_0(t),\ t]\,dt. \tag{9.23}$$

Точно так же мы найдем второе приближение:

$$a_2(t) = \eta + \mu \int_{t_0}^{t} F[a_1(t),\ t]\,dt, \tag{9.24}$$

и вообще n-ым приближением будет:

$$a_n(t) = \eta + \mu \int_{t_0}^{t} F[a_{n-1}(t),\ t]\,dt. \tag{9.25}$$

Как известно, при выполнении условий (9.21) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(t)$ существует и является единственным решением $a(t)$ уравнения (9.16), удовлетворяющим начальному условию: $a(t_0) = \eta$ [1]).

Будем теперь последовательно оценивать разности $a_n - a_0$. Для первого приближения будем иметь:

$$a_1(t) = \eta + \mu \int_{t_0}^{t} F[a_0(t), t]\,dt = \eta + \mu \int_{t_0}^{t} f[a_0(t)]\,dt + \mu \int_{t_0}^{t} \varphi[a_0(t), t]\,dt.$$

Но

$$\eta + \mu \int_{t_0}^{t} f[a_0(t)]\,dt \equiv a_0(t),$$

поэтому

$$a_1(t) - a_0(t) = \mu \int_{t_0}^{t} \varphi[a_0(t), t]\,dt.$$

Покажем ограниченность интеграла, стоящего в правой части полученного выражения. Обозначим через N целую часть отношения $\frac{t-t_0}{2\pi}$, т. е. число периодов подинтегральной функции (по явно входящему t), целиком укладывающихся на отрезке интегрирования $[t_0, t]$.

---

[1]) Метод последовательных приближений и доказательство того, что функции $a_n(t)$ стремятся при $n \to \infty$ к решению уравнения (9.16), можно найти, например, в [113].

Тогда

$$\int_{t_0}^{t} \varphi\,[a_0(t), t]\,dt = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_0+2\pi k}^{t_0+2\pi(k+1)} \varphi\,[a_0(t), t]\,dt + \int_{t_0+2\pi N}^{t} \varphi\,[a_0(t), t]\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_0+2\pi k}^{t_0+2\pi(k+1)} \Big\{ \varphi\,[a_0(t), t] - \varphi\,[a_0(t_0+2\pi k), t]\,dt + \Big.$$

$$\Big. + \int_{t_0+2\pi N}^{t} \varphi\,[a_0(t), t]\,dt$$

в силу (9.19). Используя неравенства (9.21) и теорему Лагранжа о конечных приращениях функций, имеем:

$$|\varphi\,[a_0(t), t] - \varphi\,[a_0(t_0+2\pi k), t]| < Q\,|a_0(t) - a_0(t_0+2\pi k)| <$$

$$< \mu MQ\,|t - (t_0+2\pi k)|,$$

следовательно,

$$\left| \int_{t_0+2\pi k}^{t_0+2\pi(k+1)} \Big\{ \varphi\,[a_0(t), t] - \varphi\,[a_0(t_0+2\pi k), t] \Big\}\,dt \right| <$$

$$< \mu MQ \int_{t_0+2\pi k}^{t_0+2\pi(k+1)} [t - (t_0+2\pi k)]\,dt = 2\pi^2 \mu MQ,$$

а

$$\left| \int_{t_0}^{t} \varphi\,[a_0(t), t]\,dt \right| < 2\pi^2 MQD + 2\pi P,$$

так как $\mu N \leqslant D$ и $\left| \int_{t_0+2\pi N}^{t} \varphi\,[a_0(t), t]\,dt \right| < 2\pi P.$

Таким образом,

$$|a_1(t) - a_0(t)| < \mu S, \tag{9.26}$$

где

$$S = 2\pi^2 MQD + 2\pi P,$$

т. е. эта разность является величиной порядка μ.

Для того чтобы оценить $a_2(t) - a_0(t)$, заметим, что

$$|a_2(t) - a_0(t)| \leqslant |a_2 - a_1| + |a_1 - a_0|.$$

Но

$$a_2 - a_1 = \mu \int_{t_0}^{t} [F(a_1, t) - F(a_0, t)]\,dt;$$

пользуясь последним из неравенств (9.21), имеем:

$$|a_2(t)-a_1(t)|<\mu B\int_{t_0}^{t}|a_1-a_0|\,dt<\mu^2BS|t-t_0|\leqslant\mu BSD;$$

следовательно, мы будем иметь:

$$|a_2(t)-a_0(t)|<\mu S(1+BD). \tag{9.27}$$

Далее,

$$|a_3(t)-a_0(t)|\leqslant|a_3-a_2|+|a_2-a_1|+|a_1-a_0|.$$

Но

$$|a_3-a_2|=\mu\left|\int_{t_0}^{t}[F(a_2,t)-F(a_1,t)]\,dt\right|<\mu B\int_{t_0}^{t}|a_2-a_1|\,dt<$$

$$<\mu^3B^2S\frac{|t-t_0|^2}{1\cdot2}\leqslant\mu S\frac{(BD)^2}{1\cdot2},$$

откуда

$$|a_3-a_0|<\mu S\left[1+BD+\frac{(BD)^2}{1\cdot2}\right]. \tag{9.28}$$

Продолжая дальше таким же образом, получим:

$$|a_n-a_{n-1}|<\mu S\frac{(BD)^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$|a_n-a_0|<\mu S\left[1+BD+\frac{(BD)^2}{1\cdot2}+\ldots\frac{(BD)^{n-1}}{(n-1)!}\right]<\mu Se^{BD}. \tag{9.29}$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}a_n(t)$ есть решение уравнения (9.16), то мы будем иметь:

$$|a-a_0|\leqslant\mu Se^{BD}. \tag{9.30}$$

Однако все те оценки, которые мы делали, например использование неравенства (9.21), законны только до тех пор, пока мы можем ручаться, что все функции $a_j(t)$ находятся внутри указанных нами границ, т. е. до тех пор, пока

$$|a_j(t)-\eta|<A \tag{9.31}$$

при

$$0\leqslant\mu(t-t_0)\leqslant D.$$

Посмотрим, выполняется ли это. Очевидно, в силу неравенства (9.22) существует такое число α ($\alpha>0$) [1]), что

$$|a_0(t)-\eta|\leqslant A-\alpha \tag{9.32}$$

---

[1]) Величина α определена, коль скоро задано D и выбрано A. Выбор μ не отражается на α.

при любых t, удовлетворяющих условию

$$0 \leqslant \mu (t - t_0) \leqslant D.$$

Переходя к $a_1(t)$, на основании (9.26) имеем (для тех же значений t)

$$|a_1(t) - \eta| \leqslant |a_1 - a_0| + |a_0 - \eta| < |\mu S + A - \alpha|,$$

откуда следует, что для выполнения неравенства (9.31) для $a_1(t)$ достаточно, чтобы $\mu S < \alpha$.

Далее,

$$|a_2(t) - \eta| \leqslant |a_2 - a_0| + |a_0 - \eta| < |\mu S (1 + BD) + A - \alpha|,$$

т. е. для того, чтобы $|a_2 - \eta|$ было меньше A, достаточно взять

$$\mu S (1 + BD) < \alpha.$$

Продолжая таким же образом дальше, нетрудно видеть, что все проведенные оценки законны, если $\mu S e^{BD} < \alpha$.

Очевидно, что сколь бы мало ни было ε, мы всегда можем указать такое μ, чтобы мы имели:

$$\mu S e^{BD} < \alpha \tag{9.33}$$

и

$$|a(t) - a_0(t)| < \mu S e^{BD} < \varepsilon$$

для всех t, удовлетворяющих неравенству $\mu (t - t_0) \leqslant D$. С этой целью нам достаточно выбрать μ меньше наименьшего из чисел $\frac{\alpha}{S e^{BD}}$, $\frac{\varepsilon}{S e^{BD}}$.

Этим наше предложение доказано.

Совершенно так же и при аналогичных предположениях относительно свойств правых частей уравнений доказывается теорема, сформулированная в начале параграфа для системы второго порядка (9.7а). Сделав переход от медленно меняющихся переменных a, b к переменным x, y, мы, очевидно, сможем утверждать следующее:

Пусть в некоторой области A (например, внутри круга некоторого радиуса R с центром в начале координат) функция $f(x, y)$ в уравнениях

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \mu f(x, y) \tag{9.2}$$

непрерывна, ограничена и удовлетворяет условиям Липшица (или имеет непрерывные и ограниченные производные по x и y) [1]; пусть приближенное решение

$$\left.\begin{aligned} x_0(t) &= a_0(t) \cos t + b_0(t) \sin t = K_0(t) \cos[t + \vartheta_0(t)], \\ y_0(t) &= -a_0(t) \sin t + b_0(t) \cos t = -K_0(t) \sin[t + \vartheta_0(t)] \end{aligned}\right\} \tag{9.9}$$

[1]) Эти условия, очевидно, обеспечат непрерывность и ограниченность правых частей уравнений, преобразованных к медленно меняющимся переменным (уравнений (9.7) или (9.10)), а также выполнение для них условий Липшица.

($a_0(t)$, $b_0(t)$ или $K_0(t), \vartheta_0(t)$ — решения укороченных уравнений (9.8) или соответственно (9.11)) и решение $x=x(t)$, $y=y(t)$ системы уравнений (9.2) удовлетворяют одним и тем же начальным условиям:

$$\text{при } t=t_0 \quad x(t_0)=x_0(t_0), \quad y(t_0)=y_0(t_0);$$

тогда *по любым заданным положительным* ε и D [1]) *всегда можно найти такое достаточно малое* μ, *чтобы*

$$|x(t)-x_0(t)|<\varepsilon, \quad |y(t)-y_0(t)|<\varepsilon$$

при всех t, *удовлетворяющих условию*

$$0\leqslant \mu(t-t_0)\leqslant D$$

(т. е. при *конечных* изменениях медленно меняющихся переменных a, b или K, ϑ).

2. Обоснование метода Ван-дер-Поля для установившихся колебаний. Докажем теперь, что, *если уравнение* $\Phi(K)=0$ *имеет простой корень* K_i ($\Phi'(K_i)\neq 0$), *то по любому заданному положительному, сколь угодно малому числу* ε *всегда можно найти такое достаточно малое значение параметра* μ, *чтобы система* (9.2) *имела предельный цикл, лежащий в* ε*-окрестности окружности* $x^2+y^2=K_i^2$, *причем этот предельный цикл устойчив, если* $\Phi'(K_i)<0$, *и неустойчив, если* $\Phi'(K_i)>0$.

Для доказательства этого утверждения мы будем предполагать ниже, что функция $\Phi(K)$ имеет непрерывную производную (по крайней мере в некоторой окрестности корня K_i). Это заведомо имеет место, если функция $f(x, y)$ в уравнениях (9.2) имеет непрерывные производные (см. формулу (9.14а) и относящееся к ней примечание).

Предположим для определенности, что для рассматриваемого простого корня K_i уравнения $\Phi(K)=0$ $\Phi'(K_i)<0$ [2]). Тогда $K=K_i$ является устойчивым состоянием равновесия первого укороченного уравнения:

$$\frac{dK}{dt}=\mu\Phi(K), \tag{9.11а}$$

а на фазовой плоскости x, y имеется устойчивый предельный цикл укороченных уравнений — окружность радиуса K_i. Возьмем произвольную, достаточно малую ε-окрестность этой окружности (рис. 470), такую, чтобы в ней, т. е. при $K_i-\varepsilon\leqslant K\leqslant K_i+\varepsilon$,

$$\Phi'(K)\leqslant -\beta, \tag{9.34}$$

---

[1]) ε может быть сколь угодно малым, D должно быть таким, чтобы при $0\leqslant\mu(t-t_0)\leqslant D$ приближенное решение (9.9) не выходило за пределы области A.

[2]) Доказательство для случая $\Phi'(K_i)>0$ сводится к проводимому ниже заменой t на $-t$. Случай $\Phi'(K_i)=0$ невозможен, так как K_i является простым корнем уравнения $\Phi(K)=0$.

где β — некоторое положительное число; это всегда можно сделать, так как $\Phi'(K)$ — непрерывная функция и $\Phi'(K_i) < 0$.

Рассмотрим на фазовой плоскости x, y траекторию Γ:

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

уравнений (9.2) и траекторию Γ_0:

$$\left.\begin{aligned} x_0(t) &= K_0(t)\cos[t + \vartheta_0(t)], \\ y_0(t) &= -K_0(t)\sin[t + \vartheta_0(t)] \end{aligned}\right\} \tag{9.9}$$

укороченных уравнений, проходящие (пусть при $t = 0$) через одну и ту же точку $A(0, K_i + \varepsilon)$ (здесь, как и раньше, $K_0(t)$, $\vartheta_0(t)$ — решение укороченных уравнений (9.11)). Траектория Γ_0 является спиралью, скручивающейся к окружности $x^2 + y^2 = K_i^2$ при $t \to +\infty$, так как в силу (9.34) при $K_i \leqslant K \leqslant K_i + \varepsilon$

$$\Phi(K) \leqslant -\beta(K - K_i) < 0 \tag{9.34а}$$

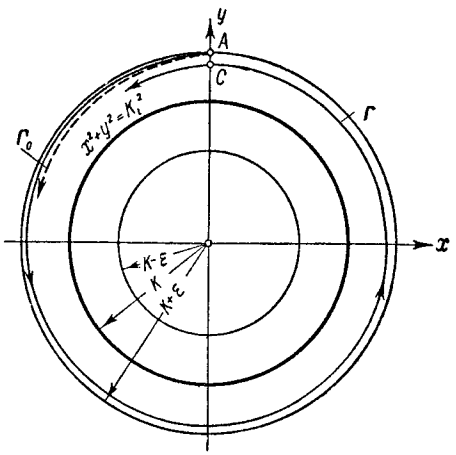

Рис. 470.

и, следовательно, $K_0(t)$ монотонно убывает, стремясь к K_i при $t \to +\infty$. Выберем такой промежуток медленного времени D, чтобы при $t = \frac{D}{\mu}$ $K_0(t) - K_i \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ и за промежуток времени $\frac{D}{\mu}$ траектория Γ_0 делала более одного оборота вокруг начала координат [1]).

Согласно теореме, сформулированной в п. 1 настоящего параграфа, существует такое $\mu = \mu(\varepsilon, D)$, при котором изображающая

---

[1]) Согласно (9.34а) при $K_i \leqslant K \leqslant K_i + \varepsilon$

$$\frac{dK}{dt} = \mu\Phi(K) \leqslant -\mu\beta(K - K_i),$$

т. е. для траектории Γ_0 имеем:

$$0 < K_0(t) - K_i \leqslant \varepsilon e^{-\mu\beta t}.$$

Поэтому за необходимый нам промежуток медленного времени D можно взять $D = \frac{1}{\beta}\ln 2$. Число оборотов спирали Γ_0 за этот промежуток времени может быть сделано любым за счет выбора достаточно малого μ.

точка $[x(t), y(t)]$ не выходит за пределы $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестности точки $[x_0(t), y_0(t)]$ на всем промежутке времени $0 \leqslant t \leqslant \frac{D}{\mu}$. Возьмем это значение параметра μ в системе уравнений (9.2). При этом значении μ точка $\left[x\left(\frac{D}{\mu}\right), y\left(\frac{D}{\mu}\right)\right]$ траектории Г будет, очевидно, находиться *внутри* заданной нами ε-окрестности окружности $x^2+y^2=K_i^2$, а сама траектория Г сделает более одного оборота вокруг начала координат за промежуток времени $0 \leqslant t \leqslant \frac{D}{\mu}$. Так как Г является фазовой траекторией автономной системы (9.2) и не может в силу этого самопересекаться, то, следовательно, первая точка ее пересечения с осью y (при $t>0$) — точка C — будет иметь ординату

$$y_C < K_i + \varepsilon.$$

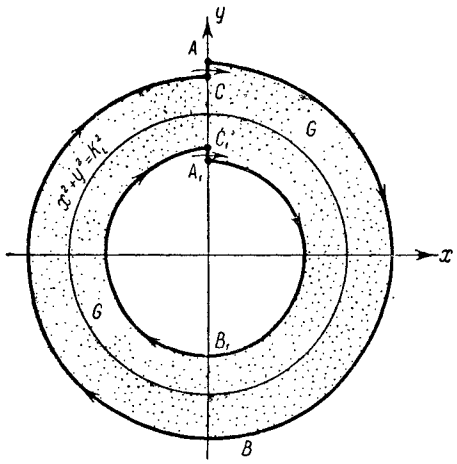

Рис. 471.

Поэтому через замкнутую кривую $ABCA$ (рис. 471), составленную из дуги ABC траектории Г и отрезка CA оси y, фазовые траектории системы (9.2) *могут только входить* (при возрастании t) в область, заключенную внутри этой кривой [1]).

Совершенно так же можно построить другую замкнутую кривую $A_1B_1C_1A_1$, состоящую из дуги $A_1B_1C_1$ траектории системы (9.2), проходящей через точку $A_1(0, -K_i-\varepsilon)$, и из отрезка C_1A_1 оси y; через эту кривую фазовые траектории системы (9.2) могут только выходить (также при возрастании t) в область, лежащую вне ее.

Таким образом, мы построили на фазовой плоскости x, y кольцевую область G, ограниченную кривыми $ABCA$ и $A_1B_1C_1A_1$ (рис. 471), из которой *траектории* системы (9.2) *не могут выходить* (при увеличении t). Так как в этой области нет состояний равновесия системы (9.2) [2]), то согласно теореме качественной теории диффе-

---

[1]) Траектории системы (9.2) не могут пересекать дугу ABC траектории Г той же системы уравнений, а на отрезке CA оси y $\dot{x}=y>0$.

[2]) Единственное состояние равновесия системы (9.2) при достаточно малом μ лежит на оси x вблизи начала координат; его абсцисса определяется уравнением

$$-x+\mu f(x, 0)=0.$$

ренциальных уравнений второго порядка (см. гл. VI, § 2) в этой области, т. е. в ε-окрестности окружности $x^2+y^2=K_i^2$, имеется устойчивый предельный цикл системы (9.2) с выбранным выше значением параметра μ.

Доказательство существования неустойчивого предельного цикла системы (9.2) при достаточно малом μ, лежащего в окрестности окружности $x^2+y^2=K_i^2$, где K_i — корень уравнения $\Phi(K)=0$, причем $\Phi'(K_i)>0$, сводится к только что проведенному заменой t на $-t$. Таким образом, предложение, сформулированное в начале настоящего раздела § 2, доказано [1]).

В заключение параграфа докажем, что при достаточно малых μ система уравнений (9.2) не имеет предельных циклов, лежащих *вне* малых окрестностей окружностей $x^2+y^2=K_i^2$. Другими словами, докажем, что, определяя корни K_i уравнения $\Phi(K)=0$ (пусть они все простые), мы тем самым найдем *все* предельные циклы системы уравнений (9.2) с достаточно малыми значениями параметра μ. Точнее, докажем следующее:

Пусть $\Phi(K)\neq 0$ *при* $0<R_1\leqslant K\leqslant R_2$; *тогда существуют такие достаточно малые значения параметра* μ:

$$0<\mu\leqslant\mu_0,$$

при которых система уравнений (9.2) *не имеет предельных циклов в кольцевой области* R:

$$R_1^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R_2^2.$$

Положим для определенности, что $\Phi(K)>0$ при $R_1\leqslant K\leqslant R_2$. Тогда в силу непрерывности функции $\Phi(K)$ (что заведомо имеет место, так как $f(x, y)$ — непрерывная функция) существуют такие положительные числа ε и Φ_0, что при $R_1\leqslant K\leqslant R_2+\varepsilon$

$$\Phi(K)>\Phi_0>0. \tag{9.35}$$

Рассмотрим на плоскости x, y траекторию γ:

$$x=x(t),\quad y=y(t)$$

системы (9.2) и траекторию γ_0:

$$\left.\begin{aligned} x_0(t)&=K_0(t)\cos[t+\vartheta_0(t)],\\ y_0(t)&=-K_0(t)\sin[t+\vartheta_0(t)]\end{aligned}\right\}$$

укороченных уравнений, начинающиеся (пусть при $t=0$) в какой-либо точке окружности $x^2+y^2=R_1^2$ (рис. 472). Для решения

---

[1]) Для доказательства этого предложения мы использовали теорему о существовании предельного цикла, справедливую только для автономных систем второго порядка. Доказательство аналогичного утверждения для систем с любым числом степеней свободы содержится в работах Н. Н. Боголюбова [35, 36].

$K=K_0(t)$ первого укороченного уравнения на отрезке $R_1 \leqslant K \leqslant R_2+\varepsilon$, очевидно, имеем:

$$\frac{dK}{dt} > \mu\Phi_0 > 0,$$

т. е. для траектории γ_0 на том же промежутке изменения $K_0(t)$ (и при $t>0$):

$$K_0(t) > R_1 + \mu\Phi_0 t.$$

Следовательно,

$$\text{при } t = \frac{R_2+\varepsilon-R_1}{\mu\Phi_0} = \frac{D}{\mu} \qquad K_0\left(\frac{D}{\mu}\right) > R_2+\varepsilon,$$

т. е. траектория γ_0 за промежуток времени $0 \leqslant t \leqslant \frac{D}{\mu}$ пересечет кольцевую область R и выйдет за окружность $x^2+y^2=(R_2+\varepsilon)^2$.

Но согласно теореме, доказанной в первом разделе настоящего параграфа, существует такое $\mu_0=\mu_0(\varepsilon, D)$, что при любом заданном $0<\mu \leqslant \mu_0$ и при любых $0 \leqslant t \leqslant \frac{D}{\mu}$ изображающая точка $[x(t), y(t)]$ системы (9.2), двигающаяся по траектории γ, не выйдет из ε-окрестности точки $[x_0(t), y_0(t)]$. Следовательно, за промежуток времени $0 \leqslant t \leqslant \frac{D}{\mu}$ не только кривая γ_0, но и траектория γ системы (9.2) пересекут область R и выйдут за ее границу.

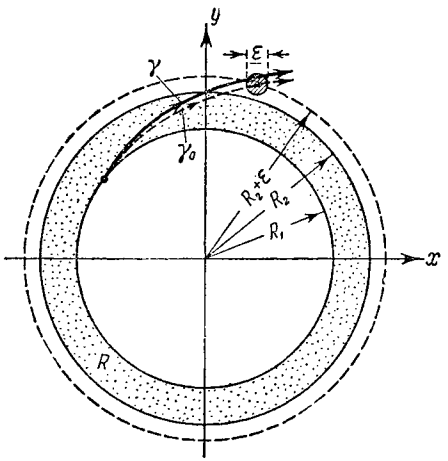

Рис. 472.

Так как кольцевая область R не содержит состояний равновесия системы (9.2) (при достаточно малых μ), то в ней могут быть только такие замкнутые фазовые траектории (предельные циклы) системы (9.2), которые охватывают окружность $x^2+y^2=R_1^2$. Но система (9.2) не может иметь и таких предельных циклов, так как если бы такой цикл существовал, то он пересекался бы с траекторией γ той же системы уравнений (9.2), что невозможно [1]).

Таким образом, мы доказали, что при достаточно малых μ система уравнений (9.2) имеет предельные циклы, близкие к окружностям

[1]) Доказательство для случая $\Phi(K)<0$ при $R_1 \leqslant K \leqslant R_2$ полностью аналогично изложенному выше, только в этом случае начальную точку траекторий γ и γ_0 нужно брать на окружности $x^2+y^2=R_2^2$.

$x^2+y^2=K_i^2$, где K_i — корни уравнения $\Phi(K)=0$, и не имеет других предельных циклов [1]).

На этом мы закончим изложение обоснования метода Ван-дер-Поля и перейдем к рассмотрению с помощью этого метода некоторых автоколебательных систем.

§ 4. Применение метода Ван-дер-Поля

Рассмотрим при помощи метода Ван-дер-Поля колебания лампового генератора с колебательным контуром в цепи сетки или в цепи анода (рис. 465), пренебрегая, как обычно, анодной реакцией и сеточными токами.

Пусть затухание колебательного контура

$$\omega_0 RC \ll 1.$$

Тогда уравнение лампового генератора приводится (см. § 1 настоящей главы) к следующему уравнению, близкому к уравнению гармонического осциллятора:

$$\ddot{x}+x=\mu[-1+\alpha s(x)]\dot{x}, \tag{9.3}$$

где $x=\frac{u}{u_0}$ (u_0 — некоторый масштаб напряжений), $\mu=\omega_0 RC\ll 1$, $\alpha=\frac{MS_0}{RC}$ — коэффициент возбуждения генератора и $s(x)=\frac{S(E_g+u_0x)}{S_0}$ — приведенная, безразмерная крутизна характеристики лампы генератора.

Укороченные уравнения (8.11) для этого уравнения, очевидно, запишутся в виде:

$$\frac{dK}{dt}=\mu\Phi(K),\quad \frac{d\vartheta}{dt}=\mu\Psi(K),$$

где

$$\Phi(K)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[-1+\alpha s(K\cos\xi)]K\sin^2\xi\,d\xi=$$

$$=\frac{K}{\pi}\int_0^{\pi}[-1+\alpha s(K\cos\xi)]\sin^2\xi\,d\xi$$

---

[1]) Мы доказали это для случая *грубой* системы (9.2), когда все корни уравнения $\Phi(K)=0$ простые.