

$x^2 + y^2 = K_i^2$, где K_i — корни уравнения $\Phi(K) = 0$, и не имеет других предельных циклов¹⁾.

На этом мы закончим изложение обоснования метода Ван-дер-Поля и перейдем к рассмотрению с помощью этого метода некоторых автоколебательных систем.

§ 4. Применение метода Ван-дер-Поля

Рассмотрим при помощи метода Ван-дер-Поля колебания лампового генератора с колебательным контуром в цепи сетки или в цепи анода (рис. 465), пренебрегая, как обычно, анодной реакцией и сеточными токами.

Пусть затухание колебательного контура

$$\omega_0 RC \ll 1.$$

Тогда уравнение лампового генератора приводится (см. § 1 настоящей главы) к следующему уравнению, близкому к уравнению гармонического осциллятора:

$$\ddot{x} + x = \mu [-1 + \alpha s(x)] \dot{x}, \quad (9.3)$$

где $x = \frac{u}{u_0}$ (u_0 — некоторый масштаб напряжений), $\mu = \omega_0 RC \ll 1$, $\alpha = \frac{MS_0}{RC}$ — коэффициент возбуждения генератора и $s(x) = \frac{S(E_g + u_0 x)}{S_0}$ — приведенная, безразмерная крутизна характеристики лампы генератора.

Укороченные уравнения (8.11) для этого уравнения, очевидно, запишутся в виде:

$$\frac{dK}{dt} = \mu \Phi(K), \quad \frac{d\theta}{dt} = \mu \Psi(K),$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(K) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [-1 + \alpha s(K \cos \xi)] K \sin^2 \xi d\xi = \\ &= \frac{K}{\pi} \int_0^\pi [-1 + \alpha s(K \cos \xi)] \sin^2 \xi d\xi \end{aligned}$$

¹⁾ Мы доказали это для случая *грубой* системы (9.2), когда все корни уравнения $\Phi(K) = 0$ простые.

в силу четности подинтегральной функции и

$$\Psi(K) = \frac{1}{2\pi K} \int_{-\pi}^{+\pi} [-1 + \alpha s(K \cos \xi)] K \sin \xi \cos \xi d\xi \equiv 0 \quad (9.36)$$

в силу нечетности подинтегральной функции.

Таким образом, при любых характеристиках лампы $\Psi(K) \equiv 0$ и период автоколебаний (с точностью до членов порядка μ^2) совпадает с периодом собственных колебаний колебательного контура генератора (при $R=0$).

1. Ламповый генератор при мягком режиме. Аппроксимируем характеристику лампы полиномом третьей степени:

$$i_a = f(E_g + u) = i_{a0} + S_0 u + S_1 u^2 - S_2 u^3; \quad (9.37)$$

тогда крутизна характеристики

$$S(E_g + u) = \frac{di_a}{du_g} = S_0 + 2S_1 u - 3S_2 u^2.$$

Положим $u = u_0 x$. Выбрав масштаб напряжений u_0 так, чтобы коэффициент при x^2 обратился в единицу: $u_0 = \sqrt{\frac{S_0}{3S_2}}$, мы приведем безразмерную крутизну $s(x)$ к виду:

$$s(x) = 1 + \beta_1 x - x^2,$$

где

$$\beta_1 = \frac{2S_1}{S_0} u_0.$$

Если характеристика лампы симметричная и аппроксимируется полиномом $i_a = i_{a0} + S_0 u - S_2 u^3$ (рис. 473), то напряжение u_0 имеет физический смысл «напряжения насыщения» характеристики: при $u = \pm u_0$ $S_0 = 0$. Очевидно, такой полином аппроксимирует свойства реальной характеристики только при $|x| \leqslant 1$.



Рис. 473.

Итак, при аппроксимации характеристики лампы полиномом (9.37) уравнение лампового генератора (при $\omega_0 RC \ll 1$) приводится к следующему уравнению:

$$\ddot{x} + x = -1 + \alpha (1 + \beta_1 x - x^2) \dot{x}, \quad (9.38)$$

¹⁾ Крутизна характеристики в состоянии равновесия $S_0 > 0$; мы будем полагать также, что и $S_2 > 0$. Последнее обеспечит уменьшение крутизны $S(E_g + u)$ при возрастании $|u|$ (когда $|u|$ достаточно велико), являющееся характерным для реальных ламп.

для которого в согласии с (9.11) и (9.12) укороченные уравнения в полярных переменных Ван-дер-Поля K, θ запишутся в виде¹⁾:

$$\frac{dK}{dt} = \mu \frac{K}{2} \left[\alpha - 1 - \alpha \frac{K^2}{4} \right], \quad \frac{d\theta}{dt} = 0. \quad (9.39)$$

Радиусы предельных циклов на плоскости x, y (в нулевом приближении) даются уравнением

$$\Phi(K) \equiv \frac{K}{2} \left[\alpha - 1 - \alpha \frac{K^2}{4} \right] = 0. \quad (9.40)$$

Здесь возможны два случая. Если $\alpha < 1$, т. е. $MS_0 < RC$ (условия самовозбуждения генератора не выполнены), то уравнение (9.40) имеет единственный действительный корень $K = 0$, соответствующий состоянию равновесия $(0, 0)$ лампового генератора. Это состояние равновесия устойчиво, так как при $\alpha < 1$

$$\Phi'(0) = \frac{\alpha - 1}{2} < 0.$$

Все остальные траектории, как нетрудно видеть, суть спирали, асимптотически приближающиеся к состоянию равновесия в начале координат при $t \rightarrow +\infty$. Таким образом, при $\alpha < 1$ мы имеем на фазовой плоскости x, y картину, характерную для затухающих колебаний (рис. 474, a) — при любых начальных условиях колебания в генераторе затухают и устанавливается равновесное состояние.

При $\alpha > 1$ (т. е. при $MS_0 > RC$), когда условие самовозбуждения генератора выполняется, уравнение (9.40) имеет два интересных для нас корня:

$$K = 0 \text{ и } K = 2 \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha}} = K_0.$$

¹⁾ Функция $\Phi(K)$ — правая часть первого укороченного уравнения — может быть получена усреднением по ξ функции

$$[-1 + \alpha(1 + \beta_1 K \cos \xi - K^2 \cos^2 \xi)] K \sin^2 \xi,$$

т. е.

$$\Phi(K) = K [(\alpha - 1) \overline{\sin^2 \xi} + \alpha \beta_1 \overline{K \cos \xi \sin^2 \xi} - \alpha \overline{K^2 \cos^2 \xi \sin^2 \xi}]$$

(здесь и ниже чертой сверху будут обозначаться средние значения по ξ соответствующих функций).

Так как

$$\overline{\sin^2 \xi} = \frac{1}{2}, \quad \overline{\cos \xi \sin^2 \xi} = \overline{\sin \xi \cos^2 \xi} = 0, \quad \overline{\cos^2 \xi \sin^2 \xi} = \frac{1}{4} \overline{\sin^2 2\xi} = \frac{1}{8},$$

то

$$\Phi(K) = \frac{K}{2} \left[\alpha - 1 - \frac{\alpha}{4} K^2 \right].$$

Первый из них соответствует неустойчивому состоянию равновесия $(0, 0)$, так как теперь

$$\Phi'(0) = \frac{\alpha - 1}{2} > 0.$$

Второй корень соответствует предельному циклу радиуса

$$K_0 = 2\sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha}} = 2\sqrt{\frac{MS_0 - RC}{MS_0}}, \quad (9.41)$$

и притом устойчивому, так как

$$\Phi'(K_0) = -\frac{\alpha K_0^2}{4} < 0.$$

Остальные траектории разбиваются на два класса: на траектории

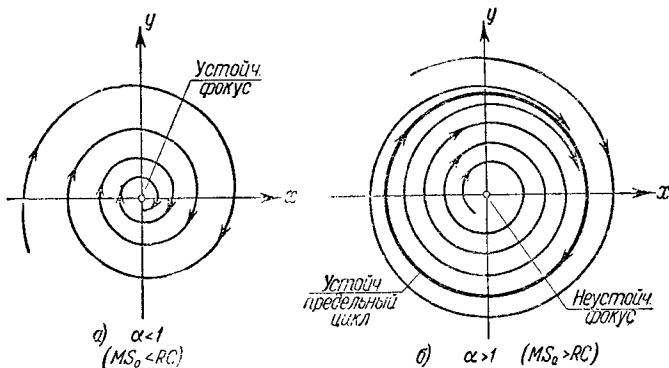


Рис. 474.

наматывающиеся снаружи на предельный цикл при $t \rightarrow +\infty$ и уходящие в бесконечность при $t \rightarrow -\infty$, и на траектории, наматывающиеся изнутри на предельный цикл при $t \rightarrow +\infty$ и стремящиеся к состоянию равновесия при $t \rightarrow -\infty$. Мы имеем картину, характерную для простейшей автоколебательной системы, работающей в *мягком* режиме (рис. 474, б), — при любых начальных условиях изображающая точка асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближается к устойчивому предельному циклу, что соответствует установлению в генераторе периодических, близких к синусоидальным, колебаний (автоколебаний).

Амплитуда автоколебаний дается радиусом предельного цикла K_0 и в размерных единицах, очевидно, равна

$$U_0 = u_0 K_0 = 2\sqrt{\frac{MS_0 - RC}{3MS_0}};$$

период автоколебаний (с точностью до членов порядка μ^2) равен 2π (в безразмерных единицах), поскольку $\Psi(K) \equiv 0$, или в обычных единицах

$$T = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Если, начиная с некоторого значения параметра $\alpha > 1$, мы будем его непрерывно уменьшать (например, уменьшая коэффициент обратной связи M), то радиус предельного цикла будет также непрерывно уменьшаться, стремясь к нулю при $\alpha \rightarrow 1$. При $\alpha = 1$ предельный цикл исчезнет, сольется с неустойчивым фокусом, передав фокусу свою устойчивость; мы видим, что $\alpha = 1$ является бифуркационным значением параметра α ¹⁾. Если изменять α непрерывно от значения $\alpha < 1$ до значения $\alpha > 1$, то при переходе α через $\alpha = 1$ возникнут автоколебания, амплитуда которых, начиная с нуля, будет непрерывно увеличиваться²⁾. При обратном изменении α амплитуда колебаний постепенно и непрерывно уменьшается, доходит до нуля, автоколебания исчезают и генератор начинает вести себя как затухающий осциллятор (рис. 475). Такой характер возникновения колебаний носит название *мягкого возникновения автоколебаний* (в данном случае при изменении параметра α) в отличие от жесткого возникновения автоколебаний, когда сразу возникают колебания конечной амплитуды, несмотря на то, что мы непрерывно и медленно меняем параметр.

Найдем теперь, пользуясь укороченными уравнениями, приближенные аналитические выражения, дающие процессы установления колебаний (мы будем полагать, что $\alpha > 1$). Интегрируя уравнения (9.39), находим³⁾:

$$K = \frac{K_0}{\sqrt{1 + Ce^{-\mu(\alpha-1)t}}}, \quad \vartheta = \vartheta_0 = \text{const}$$

¹⁾ Теория бифуркации для рассматриваемого случая в общем виде дана в § 10 этой главы.

²⁾ При этом предполагается, что изменения параметра совершаются достаточно медленно.

³⁾ Первое из уравнений (9.39) подстановкой $z = K^{-2}$ приводится к линейному уравнению:

$$\frac{dz}{dt} + \mu(\alpha-1)z = \frac{\mu\alpha}{4},$$

откуда

$$K^{-2} = K_0^{-2} + Ce^{-\mu(\alpha-1)t}.$$



Рис. 475.

(здесь C — произвольная постоянная, определяемая начальным значением K , например при $t=0$; нетрудно видеть, что $-1 < C \leq +\infty$). Отсюда после перехода к переменным x, y получим¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \frac{K_0 \cos(t + \vartheta_0)}{\sqrt{1 + Ce^{-\mu(\alpha-1)t}}}, \\ y(t) &= -\frac{K_0 \sin(t + \vartheta_0)}{\sqrt{1 + Ce^{-\mu(\alpha-1)t}}}. \end{aligned} \right\} \quad (9.42)$$

Можно сказать, что это — приближенное выражение общего интеграла уравнений (9.38), так как здесь две произвольные постоянные: C и ϑ_0 (заметим, что $C=0$ соответствует предельному циклу и $C=\infty$ — состоянию равновесия). Обратим теперь внимание на следующее обстоятельство: выражение (9.37), принятое нами для характеристики, содержало квадратичный член, который, однако, совершенно не входит в выражение нулевого приближения общего решения (его влияние будет сказываться только в следующих приближениях). Это — весьма общее положение, относящееся не только к квадратичному, но и к любым четным членам характеристики. Если мы аппроксимируем характеристику в виде любого многочлена, четные члены не оказывают никакого влияния на нулевое приближение. Происходит это вследствие того, что разложение четных степеней синусов и косинусов содержит только синусы и косинусы четных кратных углов, и поэтому в их разложении не содержится основной (резонансной) частоты.

2. Ламповый генератор при аппроксимации характеристики лампы полиномом пятой степени. Рассмотрим снова тот же ламповый генератор, но возьмем другое, более точное аппроксимирующее выражение для характеристики лампы, а именно положим:

$$i_a = i_{a0} + S_0 u + S_1 u^2 + S_2 u^3 + S_3 u^4 - S_4 u^5. \quad (9.43)$$

Тогда для крутизны характеристики имеем:

$$S(E_g + u) = \frac{di_a}{du} = S_0 + 2S_1 u + 3S_2 u^2 + 4S_3 u^3 - 5S_4 u^4.$$

Положив $u=u_0 x$, где $u_0 = \sqrt{\frac{S_0}{5S_4}}$, получим для приведенной кру-

¹⁾ Очевидно, автоколебания устанавливаются тем медленнее, чем меньше $\mu(\alpha-1)=\omega_0(MS_0-RC)$, т. е. чем ближе генератор к порогу самовозбуждения.

²⁾ $S_0, S_4 > 0$, знаки остальных коэффициентов могут быть любыми. Условие $S_4 > 0$ обеспечивает уменьшение крутизны S при увеличении $|u|$ (при достаточно больших $|u|$), что, как мы увидим ниже, необходимо для существования устойчивых автоколебаний. Коэффициенты $i_{a0}, S_0, S_1, S_2, S_3$ и S_4 при заданной характеристике лампы, очевидно, зависят от сеточного смещения E_g .

тизны:

$$s(x) = \frac{S(E_g + u_0 x)}{S_0} = 1 + \beta_1 x + \beta x^2 + \beta_3 x^3 - x^{4-1},$$

что дает возможность записать уравнение лампового генератора в виде

$$\ddot{x} + x = \mu [-1 + \alpha (1 + \beta_1 x + \beta x^2 + \beta_3 x^3 - x^{4-1})] \dot{x}. \quad (9.44)$$

Согласно (9.11) и (9.12) укороченные уравнения записываются в форме:

$$\frac{dK}{dt} = \mu \Phi(K), \quad \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad (9.45)$$

где

$$\Phi(K) = \frac{\alpha K}{2} \left[\frac{\alpha - 1}{\alpha} + \frac{\beta K^2}{4} - \frac{K^4}{8} \right]^2.$$

Уравнение $\Phi(K) = 0$ всегда имеет корень $K = 0$. Это означает, что начало координат всегда является состоянием равновесия. Так как

$$\Phi'(0) = \frac{\alpha - 1}{2},$$

то это состояние равновесия устойчиво при $\alpha < 1$ и неустойчиво при $\alpha > 1$ (при $MS_0 > RC$, когда генератор самовозбуждается). Остальные корни уравнения $\Phi(K) = 0$, отличные от нуля и являющиеся радиусами предельных циклов, очевидно, являются корнями биквадратного уравнения:

$$\frac{K^4}{8} - \frac{\beta K^2}{4} - \frac{\alpha - 1}{\alpha} = 0, \quad (9.46)$$

которое не может иметь более двух положительных корней.

$$1) \quad \beta_1 = \frac{2S_1 u_0}{S_0}, \quad \beta = \frac{3S_2 u_0^2}{S_0} \quad \text{и} \quad \beta_3 = \frac{4S_3 u_0^3}{S_0}.$$

$$2) \quad \Phi(K) = K [(\alpha - 1) \overline{\sin^2 \xi} + \alpha \beta_1 K \overline{\cos \xi \sin^2 \xi} + \\ + \alpha \beta K^2 \overline{\cos^2 \xi \sin^2 \xi} + \alpha \beta_3 K \overline{\cos^3 \xi \sin^3 \xi} - \alpha K^4 \overline{\cos^4 \xi \sin^2 \xi}],$$

откуда, заметив, что $\overline{\sin^2 \xi} = \frac{1}{2}$, $\overline{\cos \xi \sin^2 \xi} = \overline{\sin \xi \cos^2 \xi} = 0$,

$$\overline{\cos^2 \xi \sin^2 \xi} = \frac{1}{8}, \quad \overline{\cos^3 \xi \sin^3 \xi} = \overline{\sin^3 \xi \cos^3 \xi} = 0,$$

$$\overline{\cos^4 \xi \sin^2 \xi} = \overline{\sin^4 \xi \cos^2 \xi} = \frac{1}{2} [\overline{\cos^4 \xi \sin^2 \xi} + \overline{\sin^4 \xi \cos^2 \xi}] = \\ = \frac{1}{2} \overline{\cos^2 \xi \sin^2 \xi} = \frac{1}{16},$$

получим (9.45).

Для графического решения этого уравнения построим диаграмму (рис. 476), на которой по оси абсцисс будем откладывать $\gamma = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$, а по оси ординат $\rho = K_i^2$ (квадраты радиусов предельных циклов). На этой диаграмме кривая, определяемая уравнением (9.46):

$$\gamma = \frac{\alpha - 1}{\alpha} = \frac{K^4}{8} - \frac{\beta K^2}{4} = \frac{\rho^2}{8} - \frac{\beta \rho}{4}, \quad (9.46a)$$

как нетрудно видеть, является параболой с осью, параллельной оси γ . В зависимости от знака коэффициента β (или, что то же самое, от знака коэффициента S_2 в выражении (9.43)) мы имеем два случая.

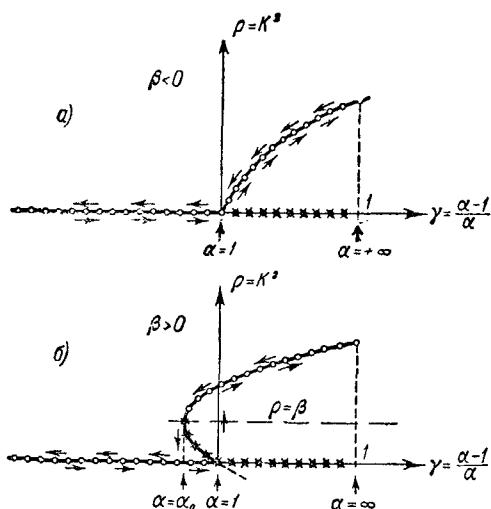


Рис. 476.

этой касательной. Следовательно, при $\beta > 0$ уравнение (9.46) не имеет положительных корней при $\gamma < -\frac{\beta^2}{8}$ (т. е. при $\alpha < \alpha_0 = \frac{1}{1 + \beta^2/8}$), имеет два положительных корня K_1 и K_2 при $-\frac{\beta^2}{8} < \gamma < 0$ (при $\alpha_0 < \alpha < 1$) и, наконец, один положительный корень при $\gamma > 0$ (при $\alpha > 1$).

Так как для корней K_i уравнения (9.46)

$$\Phi'(K_i) = -\frac{\alpha K_i^2}{2}(K_i^2 - \beta), \quad (9.47)$$

то при $\beta < 0$ единственный предельный цикл, существующий только при $\alpha > 1$, устойчив. Таким образом, при $\beta < 0$ мы получим разбиения фазовой плоскости x, y на траектории, качественно такие

Если $\beta < 0$ (рис. 476, а), то γ является монотонно возрастающей функцией ρ (при $\rho > 0$), и уравнение (9.46) не имеет положительных корней при $\gamma < 0$ (т. е. при $\alpha < 1$) и имеет единственный положительный корень K_1 при $\gamma > 0$ (при $\alpha > 1$). Если же $\beta > 0$ (рис. 476, б), то парабола (9.46а) пересекает ось ρ в двух точках: в точке $\rho = 0$ и в точке $\rho = 2\beta$; в точке, для которой $\rho = \beta$, $\gamma = -\frac{\beta^2}{8}$, парабола имеет вертикальную касательную и вся парабола расположена справа от

же, как и в случае аппроксимации характеристики лампы полиномом третьей степени (рис. 451), и характерные для *мягкого возникновения колебаний* (при изменении параметра α).

Иная картина получается при $\beta > 0$ (т. е. при $S_a > 0$). Теперь устойчивым является только тот предельный цикл, радиус которого

$$K_i > \sqrt{\beta},$$

т. е. вся часть параболы (9.46а), расположенная над ее осью $p = \beta$ (она отмечена на рис. 476, б) светлыми кружками), соответствует

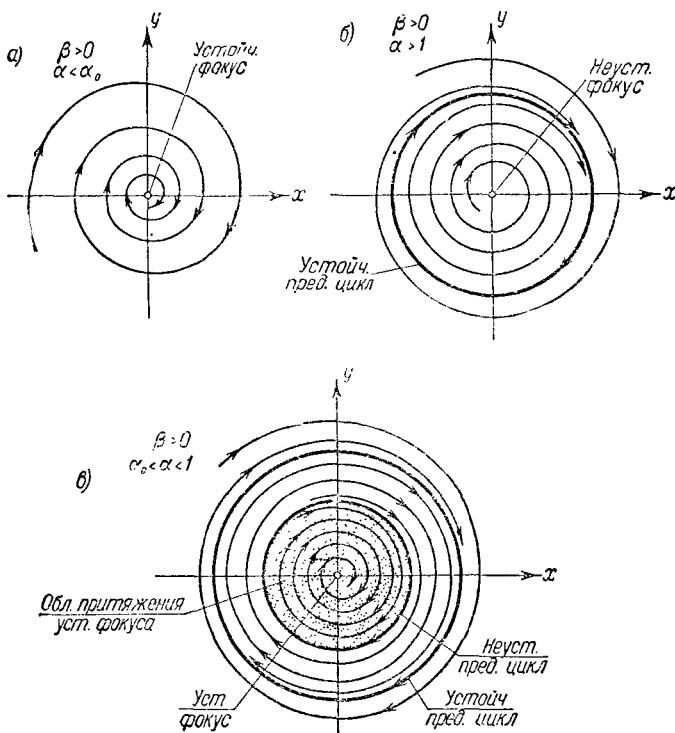


Рис. 477.

устойчивым предельным циклам, а дуга параболы, заключенная между осью параболы и осью абсцисс, — неустойчивым предельным циклам. Таким образом, при $\beta > 0$ мы имеем в зависимости от значения параметра α три качественно различных разбиения фазовой плоскости x, y на траектории (рис. 477).

При $\alpha < \alpha_0$ (рис. 477, а) все траектории асимптотически при $t \rightarrow +\infty$ приближаются к состоянию равновесия — к устойчивому

фокусу $(0, 0)$, т. е. генератор не возбуждается, любые его колебания являются затухающими. При $\alpha > 1$ (рис. 477, б) состояние равновесия неустойчиво и все траектории стремятся (при $t \rightarrow +\infty$) к единственному устойчивому предельному циклу; в этом случае имеет место *мягкий режим*: автоколебания устанавливаются при любых начальных условиях.

Наконец, при $\alpha_0 < \alpha < 1$ (рис. 477, в) устойчивое состояние равновесия $(0, 0)$ и устойчивый предельный цикл радиуса K_1 разделены неустойчивым предельным циклом радиуса K_2 . Поэтому траектории, начинающиеся внутри неустойчивого предельного цикла, будут идти к состоянию равновесия и только траектории, которые начинаются *вне* неустойчивого предельного цикла, будут наматываться на устойчивый предельный цикл¹).

Другими словами, в генераторе в зависимости от начальных условий будет устанавливаться или состояние равновесия или автоколебания с амплитудой K_2 , т. е. мы имеем дело с автоколебательной системой в *жестком режиме* (для возникновения автоколебаний в генераторе системе нужно дать некоторый «толчок»: необходимо, чтобы в начальный момент времени $x_0^2 + y_0^2 > K_1^2$).

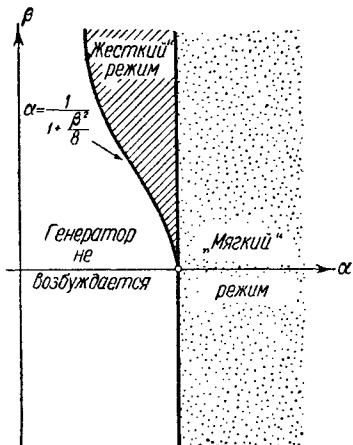


Рис. 478.

На рис. 478 изображена плоскость параметров α , β , разбитая на области различных режимов генератора.

Посмотрим теперь, как при $\beta > 0$, когда при $\alpha_0 < \alpha < 1$ имеет место жесткий режим, будет изменяться амплитуда автоколебаний при непрерывных и достаточно медленных изменениях параметра α . Если вначале генератор не возбужден, например α имеет некоторое значение, меньшее α_0 , то при медленном и непрерывном возрастании параметра α изображающая точка системы будет находиться в состоянии равновесия (точнее, вблизи состояния равновесия и тем ближе к нему, чем медленнее изменяется параметр α) до тех пор, пока это состояние равновесия не потеряет устойчивости (при $\alpha = 1$). Но при $\alpha = 1$ уже существует устойчивый предельный цикл конечного радиуса $K = \sqrt{2\beta}$, поэтому при увеличении параметра $\alpha = \frac{MS_0}{RC}$

¹⁾ Неустойчивый предельный цикл не соответствует, конечно, автоколебательным процессам, существующим в генераторе. Он является границей, разделяющей «области притяжения» устойчивого автоколебательного режима и устойчивого состояния равновесия.

в тот момент, когда α станет равным единице, возбуждаются автоколебания конечной амплитуды ¹⁾. При дальнейшем увеличении α амплитуда автоколебаний непрерывно и монотонно растет (при $\alpha \rightarrow +\infty$ $\gamma \rightarrow 1$ и $K \rightarrow \beta^2 + \sqrt{\beta^2 + 8}$).

При убывании параметра α изображающая точка будет находиться на устойчивом предельном цикле (точнее, вблизи него и тем ближе, чем медленнее изменяется α) до тех пор, пока α не станет равным α_0 . При переходе α через это бифуркационное значение устойчивый предельный цикл, слившись с неустойчивым предельным циклом,

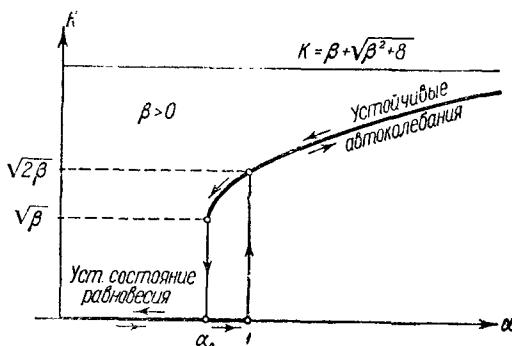


Рис. 479.

пропадает, автоколебания срываются (при амплитуде, равной $\sqrt{\beta}$) и система переходит в состояние равновесия.

Мы видим, что возникновение и исчезновение автоколебаний происходят, в отличие от случая мягкого установления (при $\beta < 0$), при разных значениях коэффициента возбуждения генератора $\alpha = \frac{MS_0}{RC}$ (при $\alpha = 1$ и при $\alpha = \alpha_0$), причем автоколебания появляются и прекращаются с различными и в обоих случаях конечными амплитудами. В общем получается типичная картина так называемого *жесткого установления* автоколебаний (рис. 479)²⁾.

¹⁾ Конечно, автоколебания устанавливаются не мгновенно. Скорость их установления тем меньше, чем меньше μ .

²⁾ Мы употребляем термины «мягкий» и «жесткий» режимы в двух смыслах. Во-первых, мы говорим о мягком или жестком *режиме* автоколебательной системы при *заданных значениях ее параметров* в зависимости от того, при всех или не при всех начальных условиях устанавливается автоколебательный процесс. Во-вторых, мы говорим о мягком или жестком *возбуждении* (установлении) автоколебаний в зависимости от характера изменения амплитуды автоколебаний при медленном и непрерывном *изменении* того или иного *параметра* системы. Ясно, что для жесткого возникновения автоколебаний необходимо, чтобы при некоторых значениях этого параметра система находилась в жестком режиме.

Таким образом, аппроксимируя характеристику лампы полиномом пятой степени, мы в зависимости от знака коэффициента S_2 получим или мягкое (при $S_2 < 0$) или жесткое (при $S_2 > 0$) возникновение автоколебаний в генераторе (при изменении его параметра α). Так как

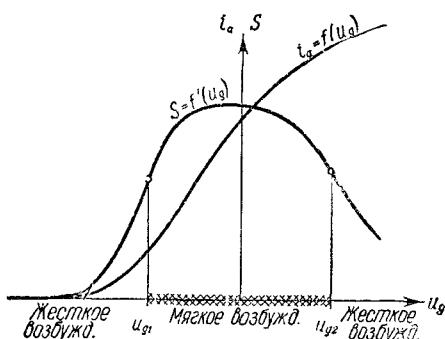


Рис. 480.

теристики $S = f'(u_g)$ от u_g и отметим на этой кривой точки перегиба u_{g1} и u_{g2} . Тогда при $u_{g1} < E_g < u_{g2}$ $\left(\frac{d^2S}{du_g^2}\right)_{u_g=E_g} < 0$, и при этих сеточных смещениях будем иметь мягкое возбуждение автоколебаний. Наоборот, вне этого интервала (при $E_g < u_{g1}$ или при $E_g > u_{g2}\right)$ $\left(\frac{d^2S}{du_g^2}\right)_{u_g=E_g} > 0$, и в генераторе будет жесткое возбуждение колебаний.

Заметим в заключение, что уравнения (9.45) можно проинтегрировать подобно тому, как мы это сделали в случае аппроксимации характеристики лампы полиномом третьей степени, и получить решения, количественно характеризующие процессы установления. К вопросу о мягким и жестким возникновении автоколебаний в ламповом генераторе (при изменении его параметров) мы еще вернемся в дальнейшем (в § 10 настоящей главы) в связи с теорией бифуркаций автоколебательных систем.

3. Автоколебания лампового генератора с двухзвенной RC-цепочкой. Приведем уравнения колебаний лампового генератора с двухзвенной RC-цепочкой (рис. 481, а):

$$C \frac{dv}{dt} = \frac{u - E_g}{R}, \quad \frac{E_a - (u + v)}{R_a} = i(u) + C \frac{dv}{dt} + C_a \frac{d(u + v)}{dt}$$

(см. также § 12 гл. V и § 5 гл. VIII) исключением v к одному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$R_a R_g C C_a \frac{d^2u}{dt^2} + R_g C \left[1 + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_a}{C} \right) + R_a S(u) \right] \frac{du}{dt} + u = E_g$$

то интервалы сеточных смещений E_g , в которых имеют место соответственно мягкое и жесткое возбуждения, можно определить следующим образом. Построим по заданной аппроксимированной характеристике $i_a = f(u_g)$ (рис. 480) кривую зависимости крутизны характеристики

или после введения новых, безразмерных переменных

$$t_{\text{нов}} = \frac{t}{\sqrt{R_a R_g C C_a}} \quad \text{и} \quad x = \frac{u - E_g}{u_0}$$

(u_0 — некоторый масштаб напряжения) к уравнению вида:

$$\ddot{x} + x = -\sqrt{\frac{R_g C}{R_a C_a}} \left[1 + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_a}{C} \right) + R_a S(E_g + u_0 x) \right] \dot{x}, \quad (9.48)$$

где $S(u) = \frac{di}{du}$ — крутизна характеристики ламповой группы $i = i(u)$. Так как характеристика ламповой группы $i = i(u)$ — падающая

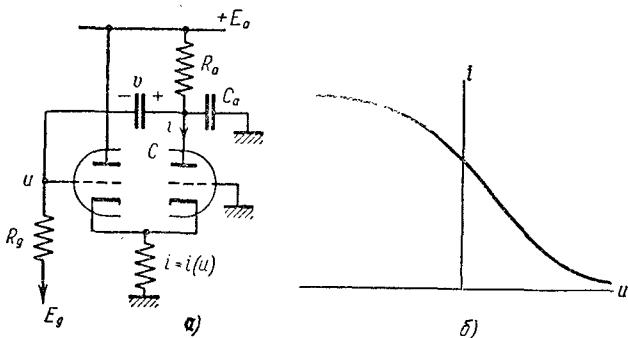


Рис. 481.

рис. 481, б), то $S(u) < 0$ и для самовозбуждения генератора (для неустойчивости единственного состояния равновесия: $x = 0$, $\dot{x} = 0$ или $u = E_g$, $v = E_a - E_g - R_a i(E_g)$) необходимо, чтобы

$$R_a S_0 > 1 + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_a}{C} \right), \quad (9.49)$$

где $S_0 = -S(E_g)$ — абсолютное значение крутизны характеристики ламповой группы в состоянии равновесия.

Пусть это условие выполнено и генератор самовозбуждается. Для определения амплитуды автоколебаний аппроксимируем характеристику ламповой группы $i = i(u)$ полиномом третьей степени. Тогда

$$S(E_g + u_0 x) = -S_0 + S_1 x + S_2 x^2,$$

¹⁾ При заданном u_0 коэффициенты S_0 , S_1 , S_2 , имеющие размерность, обратную размерности сопротивления, зависят от E_g . Так как характеристика ламповой группы падающая, то $S_0 > 0$; для того чтобы существовали автоколебания, мы будем полагать, что и $S_2 > 0$.

и уравнение колебаний генератора (9.48) запишется в следующем виде:

$$\ddot{x} + x = \sqrt{\frac{R_g C}{R_a C_a}} \left\{ R_a S_0 - \left[1 + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_a}{C} \right) \right] - R_a S_1 x - R_a S_2 x^2 \right\} \dot{x}.$$

Это уравнение близко к уравнению гармонического осциллятора, а колебания генератора близки к гармоническим только при выполнении условий:

$$R_a S_0 - \left[1 + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_a}{C} \right) \right] \ll 1, \quad R_a |S_1| \ll 1, \quad R_a S_2 \ll 1,$$

т. е. когда генератор близок к порогу самовозбуждения, а нелинейность характеристики мала.

Введем малый параметр

$$\mu = \sqrt{\frac{R_g C}{R_a C_a}} \left\{ R_a S_0 - \left[1 + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_a}{C} \right) \right] \right\}$$

($0 < \mu \ll 1$) и обозначим

$$\sqrt{\frac{R_g C}{R_a C_a}} R_a S_1 = \mu \alpha_1, \quad \sqrt{\frac{R_g C}{R_a C_a}} R_a S_2 = \mu \alpha_2$$

(α_1 и α_2 — величины порядка единицы). Тогда уравнение колебаний генератора с двухзвенной RC -цепочкой приведется к следующему виду, пригодному для применения метода Ван-дер-Поляя:

$$\ddot{x} + x = \mu [1 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2] \dot{x}. \quad (9.50)$$

Укороченными уравнениями для него, очевидно, будут:

$$\frac{dK}{dt} = \mu \frac{K}{2} \left(1 - \frac{\alpha_2 K^2}{4} \right), \quad \frac{d\vartheta}{dt} = 0.$$

Приравнивая нулю функцию

$$\Phi(K) = \frac{K}{2} \left(1 - \frac{\alpha_2 K^2}{4} \right),$$

получим, что система уравнений (9.50) имеет состояние равновесия ($x = 0, \dot{x} = 0$), соответствующее корню $K = 0$, и предельный цикл радиуса

$$K_0 = 2 \sqrt{\frac{1}{\alpha_2}} = 2 \sqrt{\frac{R_a S_0 - \left[1 + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_a}{C} \right) \right]}{R_a S_2}}. \quad (9.51)$$

Состояние равновесия неустойчиво, так как

$$\Phi'(0) = \frac{1}{2} > 0^1),$$

¹⁾ Не следует забывать, что мы рассматриваем случай самовозбуждающегося генератора, когда $R_a S_0 > 1 + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_a}{C} \right)$.

а предельный цикл устойчив, поскольку

$$\Phi'(K_0) = -\frac{\alpha_3}{4} K_0^2 = -1 < 0.$$

Таким образом, будет иметь место мягкий режим: автоколебания, близкие к синусоидальным, с амплитудой K_0 устанавливаются при любых начальных условиях¹⁾. Их период (в обычных единицах и с точностью до членов порядка μ^2), очевидно, равен

$$T = 2\pi \sqrt{R_a R_g C C_a}.$$

§ 5. Метод Пуанкаре

Мы рассмотрим здесь метод интегрирования нелинейных уравнений, данный Пуанкаре в его работах по небесной механике [184, 185]. Этот метод, несмотря на существенные ограничения, накладываемые и на выбор уравнения и на поставленные задачи, все же охватывает очень многие важные случаи и дает ответ на ряд существенных для практики вопросов.

Мы будем предполагать, что наше нелинейное уравнение (или система уравнений) зависит от некоторого параметра μ и при определенном значении $\mu = \mu_0$ (например, при $\mu = 0$) обращается в уравнение или систему уравнений, решение которых нам хорошо известно, например, в линейное уравнение или систему линейных уравнений.

Мы изучим нелинейное уравнение для значений μ , мало отличающихся от μ_0 . Далее мы будем рассматривать только периодические решения нелинейного уравнения (это ограничение также лежит в существе метода). Для определенности мы предположим, что наша система при $\mu = 0$ обращается в линейную с постоянными коэффициентами. Ход рассуждений является, однако, вполне общим, применимым и при других предположениях.

Итак, мы будем рассматривать систему нелинейных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + \mu f_1(x, y, \mu); \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy + \mu f_2(x, y, \mu), \quad (9.52)$$

где a, b, c, d и μ — константы; считаем, что μ достаточно мало. Далее будем считать, что f_1 и f_2 являются голоморфными функциями x, y и μ , т. е. что их можно разложить в сходящиеся

¹⁾ Если аппроксимировать характеристику ламповой группы $I = I(\mu)$ полиномом пятой степени, то получаются как мягкий, так и жесткий режимы возбуждения автоколебаний в зависимости от знака коэффициента при x^2 в выражении для крутизны характеристики.