

а предельный цикл устойчив, поскольку

$$\Phi'(K_0) = -\frac{\alpha_3}{4} K_0^2 = -1 < 0.$$

Таким образом, будет иметь место мягкий режим: автоколебания, близкие к синусоидальным, с амплитудой K_0 устанавливаются при любых начальных условиях¹⁾. Их период (в обычных единицах и с точностью до членов порядка μ^2), очевидно, равен

$$T = 2\pi \sqrt{R_a R_g C C_a}.$$

§ 5. Метод Пуанкаре

Мы рассмотрим здесь метод интегрирования нелинейных уравнений, данный Пуанкаре в его работах по небесной механике [184, 185]. Этот метод, несмотря на существенные ограничения, накладываемые и на выбор уравнения и на поставленные задачи, все же охватывает очень многие важные случаи и дает ответ на ряд существенных для практики вопросов.

Мы будем предполагать, что наше нелинейное уравнение (или система уравнений) зависит от некоторого параметра μ и при определенном значении $\mu = \mu_0$ (например, при $\mu = 0$) обращается в уравнение или систему уравнений, решение которых нам хорошо известно, например, в линейное уравнение или систему линейных уравнений.

Мы изучим нелинейное уравнение для значений μ , мало отличающихся от μ_0 . Далее мы будем рассматривать только периодические решения нелинейного уравнения (это ограничение также лежит в существе метода). Для определенности мы предположим, что наша система при $\mu = 0$ обращается в линейную с постоянными коэффициентами. Ход рассуждений является, однако, вполне общим, применимым и при других предположениях.

Итак, мы будем рассматривать систему нелинейных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + \mu f_1(x, y, \mu); \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy + \mu f_2(x, y, \mu), \quad (9.52)$$

где a, b, c, d и μ — константы; считаем, что μ достаточно мало. Далее будем считать, что f_1 и f_2 являются голоморфными функциями x, y и μ , т. е. что их можно разложить в сходящиеся

¹⁾ Если аппроксимировать характеристику ламповой группы $I = I(\mu)$ полиномом пятой степени, то получаются как мягкий, так и жесткий режимы возбуждения автоколебаний в зависимости от знака коэффициента при x^2 в выражении для крутизны характеристики.

степенные ряды по x , y , μ (по крайней мере при малых значениях переменных).

Рассматривая нелинейные члены как результат малого искажения линейной системы (получающейся при $\mu = 0$), мы поставим своей задачей изучить, для каких исходных периодических решений линейной системы существуют периодические же (хотя бы и с другим периодом) решения нелинейной системы, обращающиеся в исходные при $\mu = 0$, и при каких условиях (т. е. при каких f_1 и f_2) эти периодические решения нелинейной системы будут устойчивыми.

Рассмотрим сначала случай $\mu = 0$. Уравнения переходят в

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy. \quad (9.53)$$

Исключение y приводит к уравнению

$$\ddot{x} - (a + d)\dot{x} + (ad - bc)x = 0. \quad (9.53a)$$

Необходимая предпосылка дальнейших рассмотрений состоит в том, что полученная линейная система (9.53) или уравнение (9.53a) должна сама иметь периодические решения.

Это значит, что характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

должно иметь чисто мнимые корни, т. е. должно быть

$$(a + d) = 0, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0. \quad (9.54)$$

Тогда

$$\lambda_1 = +j\sqrt{ad - bc}, \quad \lambda_2 = -j\sqrt{ad - bc},$$

или, если ввести обозначение $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \omega_1 = +\sqrt{ad - bc}$, то можно сказать, что решение уравнения (9.53a) имеет вполне определенную частоту ω_1 , определяемую самим уравнением. Фаза же и амплитуда периодического решения не задаются системой и определяются начальными условиями. Произвольность фазы очевидна: время не входит явно в (9.53a), и поэтому начинать отсчет можно с любого момента t_0 (но разность фаз между x и y и отношение амплитуд x и y вполне определены системой: достаточно подставить значение для x во второе из уравнений (9.53)).

Итак, мы убедились, что если выполнены условия (9.54), то наша система (9.53) имеет бесчисленное множество периодических решений, отличающихся одно от другого амплитудой и фазой. Эти решения имеют вид:

$$x = K \cos(\omega_1 t + \chi); \quad y = kK \sin(\omega_1 t + \chi + \chi'),$$

где k и χ' определяются через коэффициенты уравнений (9.53), а K и χ произвольны. В общем виде

$$x = \varphi_0(t, \chi, K); \quad y = \psi_0(t, \chi, K),$$

где φ_0 и ψ_0 — периодические функции t с периодом $\frac{2\pi}{\omega_1}$, χ и K — произвольные постоянные. Такой общий вид будут иметь решения, если при $\mu=0$ наша система становится нелинейной, но консервативной, соответствующей случаю центра.

Так как отсчет времени можно начинать с произвольного момента, то без всякого ограничения общности можно считать $\chi=0$, и тогда решение нашей линейной системы может быть написано в виде:

$$x = x_0(t, K) = K \cos \omega_1 t; \quad y = y_0(t, K) = kK \sin (\omega_1 t + \chi'). \quad (9.55)$$

1. Идея метода Пуанкаре. Прежде чем перейти к систематическому изложению теории Пуанкаре, мы приведем вкратце основную идею и одновременно точно сформулируем математическую задачу. Такое введение поможет легче разобраться в дальнейшем изложении. Пусть нам известно решение уравнений (9.52) при $\mu=0$, т. е., другими словами, решение уравнений (9.53). Пусть это решение будет $x = x_0(t, K)$; $y = y_0(t, K)$. При $t=0$ имеем: $x = x_0(0, K)$, $y = y_0(0, K)$, где K — «амплитуда». Слово «амплитуда» мы ставим в кавычках, имея в виду, что уравнения, получающиеся при $\mu=0$, вообще говоря, могут быть и нелинейными, но консервативными. (В дальнейшем, однако, мы будем считать, что при $\mu=0$ уравнения превращаются в линейные.) Рассмотрим теперь решения уравнений (9.52) при $\mu \neq 0$. Пусть это будут: $x = x(t, \mu, K)$, $y = y(t, \mu, K)$, принимающие значения $x = x_0(0, K) + \beta_1$, $y = y_0(0, K) + \beta_2$ при $t=0$; β_1 и β_2 — некоторые достаточно малые величины. Пуанкаре ищет эти решения в виде степенных рядов по β_1 , β_2 и μ и доказывает их сходимость при достаточно малых значениях β_1 , β_2 и μ , равномерную внутри любого заданного конечного интервала времени $0 < t < t_1$ (этого доказательства сходимости мы не приводим). Коэффициенты этих степенных рядов есть функции времени. Эти функции можно вычислить, приравнивая коэффициенты при равных степенях β_1 , β_2 и μ в выражениях, получившихся после подстановки в уравнения (9.52) вышеупомянутых степенных рядов. Для определения этих функций получатся линейные уравнения с определенными начальными значениями. Итак, для x и y мы получаем некоторые выражения:

$$x = x(t, \mu, \beta_1, \beta_2, K), \quad y = y(t, \mu, \beta_1, \beta_2, K). \quad (9.56)$$

Посмотрим теперь, при каких условиях эти решения будут периодическими. Пусть период решений уравнений нулевого приближения (эти уравнения по нашему предположению линейны) будет T . Период решений нелинейных уравнений будет, вообще говоря, другой, но так как мы ищем решения, мало отличающиеся от решений

линейных уравнений, то и период искомых решений должен быть близок к T . Поэтому мы можем положить, что новый период есть $T + \tau$, где τ — некоторая небольшая «поправка на период». Очевидно, что для того, чтобы решения (9.56) были периодическими с периодом $T + \tau$, нужно, чтобы x и y при $t = 0$ и при $t = T + \tau$ имели одинаковые значения. Действительно, если мы получим в момент $t = T + \tau$ те же значения переменных x и y , как и в момент $t = 0$, то в силу теоремы Коши и автономности системы с момента $t = T + \tau$ мы получим повторение того, что происходило, начиная с $t = 0$, т. е. наши решения действительно будут периодическими с периодом $T + \tau$. Итак, условия периодичности сводятся к соотношениям:

$$\begin{aligned} x(T + \tau, \mu, \beta_1, \beta_2, K) - x(0, \mu, \beta_1, \beta_2, K) &= 0, \\ y(T + \tau, \mu, \beta_1, \beta_2, K) - y(0, \mu, \beta_1, \beta_2, K) &= 0, \end{aligned}$$

которые, ввиду того, что T есть заданная величина, можно переписать так:

$$\Phi(\tau, \mu, \beta_1, \beta_2, K) = 0, \quad \Psi(\tau, \mu, \beta_1, \beta_2, K) = 0. \quad (9.57)$$

Мы получили таким образом два уравнения с тремя неизвестными τ , β_1 , β_2 , но ввиду того, что уравнения автономны и фаза произвольна, мы можем одно из β зафиксировать, например положить β_2 равным нулю. Тогда мы получим одно вполне определенное периодическое решение; после того как это периодическое решение будет найдено, прибавляя к нему произвольную фазу, мы снова восстановим потерянную произвольность.

Так как при $\mu = 0$ мы должны получить периодические решения с периодом T , т. е. без поправки на период, то очевидно, что при $\mu = 0$ и $\tau = 0$ удовлетворяется условие периодичности и функции Φ и Ψ обращаются в нуль. Следовательно, μ есть общий множитель, и уравнения (9.57) можно переписать так:

$$\mu \Phi_1\left(\frac{\tau}{\mu}, \mu, \beta_1, \beta_2, K\right) = 0, \quad \mu \Psi_1\left(\frac{\tau}{\mu}, \mu, \beta_1, \beta_2, K\right) = 0$$

и условия существования периодических решений системы (9.52) будут иметь вид:

$$\Phi_1\left(\frac{\tau}{\mu}, \mu, \beta_1, \beta_2, K\right) = 0, \quad \Psi_1\left(\frac{\tau}{\mu}, \mu, \beta_1, \beta_2, K\right) = 0.$$

Для того чтобы при $\mu = 0$ $\beta_1 = \tau = 0$, нужно, чтобы эти уравнения не содержали свободных членов. Приравнивая нулю эти свободные члены, мы получим вполне определенные значения для амплитуды K и первого приближения поправки на частоту $\left(\frac{\tau}{\mu}\right)_{\mu \rightarrow 0}$. Следовательно, в рассматриваемом случае могут существовать периодические решения, но не со всякими значениями K , а только с вполне определенными. В соот-

ветствии с этим одна из основных задач может быть сформулирована следующим образом: при $\mu = 0$ мы имеем бесчисленное множество периодических решений с произвольными амплитудами, но при $\mu \neq 0$ только вблизи некоторых вполне определенных амплитуд сохраняются периодические решения. Требуется найти значения этих амплитуд. При этом для решения вопроса о форме автоколебаний мы часто можем ограничиться линейным приближением, и знание нелинейности нам нужно только для того, чтобы определить величину амплитуды этих колебаний. Из условий для амплитуд, в случае если в уравнение движения входят какие-либо параметры, можно установить условия бифуркации между периодическими решениями, а также между периодическими решениями и положениями равновесия. Вторая часть задачи состоит в определении поправки на период τ . Во многих практических интересных случаях оказывается, что она в первом приближении равна нулю, т. е. что $\left(\frac{\tau}{\mu}\right)_{\mu \rightarrow 0} \rightarrow 0$. Тогда, если все-таки оказывается нужным определить поправку на период, необходимо обратиться к следующим приближениям. Ввиду важности этого вопроса для теории колебаний мы этот вопрос затронем в дальнейшем.

2. Метод Пуанкаре для систем, близких к линейным. Теперь мы переходим к систематическому изложению метода Пуанкаре. Мы рассмотрим одно дифференциальное уравнение второго порядка специального вида, особенно интересное с точки зрения теории колебаний и ее практических применений, а именно, уравнение системы, близкой к гармоническому осциллятору:

$$\ddot{y} + y = \mu f(y, \dot{y}), \quad (9.2)$$

где μ — произвольный положительный параметр, который можно выбрать достаточно малым; $f(y, \dot{y})$ — функция, разлагаемая в ряд по степеням y и \dot{y} . При $\mu = 0$ уравнение (9.2) имеет решение:

$$y = K \cos t. \quad (9.58)$$

Общим решением уравнения (9.2) при $\mu = 0$ будет, конечно, $y = K \cos(t + \delta)$, но вследствие автономности рассматриваемой системы мы можем δ дать вполне определенное значение, в частности положить его равным нулю. Если мы затем найдем близкое к нему решение при $\mu \neq 0$, то в этом решении можно затем снова положить фазу произвольной. Как сказано, не при всех значениях K будут существовать периодические решения уравнения (9.2), близкие к (9.58). Наша задача заключается в том, чтобы найти, при каких значениях K существуют такие периодические решения уравнения (9.2).

Поясним нашу задачу с точки зрения представлений на фазовой плоскости. Так как уравнение (9.2) не зависит явно от времени,

то фазовые траектории образуют систему непересекающихся кривых на плоскости y, \dot{y} . При $\mu = 0$ уравнение (9.2) имеет решение:

$$y = K \cos t = \varphi_0(t), \quad (9.59)$$

где K — произвольная амплитуда (фазу мы не выписали по известным уже соображениям, но также и она остается произвольной). Решения при $\mu = 0$, если рассматривать эти решения на фазовой плоскости y, \dot{y} , представляют собой семейство концентрических окружностей.

Решение (9.59) мы назовем порождающим решением. Для $\mu \neq 0$ мы будем искать такие периодические решения, которые при $\mu \rightarrow 0$ стремились бы к порождающим решениям $y = \varphi_0(t)$. Мы увидим, что не для всех значений K такие периодические решения существуют. Наша задача будет заключаться в том, чтобы найти K тех порождающих решений $\varphi_0(t)$, в области которых возникают периодические решения уравнения (9.2) при $\mu \neq 0$, а также определить изменение периода по сравнению с порождающим решением. Таким образом, с точки зрения фазовой плоскости y, \dot{y} мы можем первую часть нашей задачи сформулировать так: при $\mu = 0$ интегральные кривые представляют собой семейство окружностей; при $\mu \neq 0$ окружности превращаются в спирали, и только некоторые из интегральных кривых остаются замкнутыми, т. е. превращаются в предельные циклы. Требуется определить значение K для тех окружностей, вблизи которых возникают предельные циклы.

Как мы уже упоминали, существует доказательство того, что решения уравнения (9.2) можно представить в виде степенных рядов, составленных по степеням μ , и разностей начальных значений $\beta_1 = y(0) - \varphi_0(0)$ и $\beta_2 = \dot{y}(0) - \dot{\varphi}_0(0)$, абсолютно и равномерно сходящихся для достаточно малых значений μ , β_1 , β_2 на любом заданном конечном промежутке времени $[0, t_1]$. Следовательно, можем написать:

$$y = \varphi_0(t) + A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu + D\beta_1\mu + E\beta_2\mu + F\mu^2 + \dots, \quad (9.60)$$

где A, B, C, D, E, F, \dots — какие-то, пока неизвестные, функции времени. Для определения этих функций мы поступим следующим образом. Продифференцировав ряд (9.60) по времени сначала один раз, а затем второй, мы получим выражения для \dot{y} и \ddot{y} также в виде рядов:

$$\dot{y} = \dot{\varphi}_0(t) + \dot{A}\beta_1 + \dot{B}\beta_2 + \dot{C}\mu + \dot{D}\beta_1\mu + \dot{E}\beta_2\mu + \dot{F}\mu^2 + \dots, \quad (9.61)$$

$$\ddot{y} = \ddot{\varphi}_0(t) + \ddot{A}\beta_1 + \ddot{B}\beta_2 + \ddot{C}\mu + \ddot{D}\beta_1\mu + \ddot{E}\beta_2\mu + \ddot{F}\mu^2 + \dots \quad (9.62)$$

Так как мы рассматриваем значения y и \dot{y} , близкие соответственно к значениям $\varphi_0(t)$ и $\dot{\varphi}_0(t)$, то функцию $f(y, \dot{y})$ мы можем разложить в ряд Тейлора вблизи значений $\varphi_0(t)$ и $\dot{\varphi}_0(t)$. Применяя

для аргументов y и \dot{y} опять выражения в виде рядов (9.60) и (9.61), мы получим ряд Тейлора для функции $f(y, \dot{y})$ в таком виде:

$$\begin{aligned} f(y, \dot{y}) = & f[\varphi_0(t), \dot{\varphi}_0(t)] + \\ & + f'_y[\varphi_0(t), \dot{\varphi}_0(t)][A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu + D\beta_1\mu + E\beta_2\mu + F\mu^3 + \dots] + \\ & + f''_y[\varphi_0, \dot{\varphi}_0][\dot{A}\beta_1 + \dot{B}\beta_2 + \dot{C}\mu + \dots] + \frac{1}{2}f'''_{yy}[\varphi_0, \dot{\varphi}_0][A\beta_1 + B\beta_2 + \\ & + C\mu + \dots]^2 + f''_{yy}[\varphi_0, \dot{\varphi}_0][A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu + \dots][\dot{A}\beta_1 + \dot{B}\beta_2 + \\ & + \dot{C}\mu + \dots] + \frac{1}{2}f''_{y\dot{y}}[\varphi_0, \dot{\varphi}_0][\dot{A}\beta_1 + \dot{B}\beta_2 + \dot{C}\mu + \dots]^2 + \dots \quad (9.63) \end{aligned}$$

Подставляя выражения для y , \dot{y} и $f(y, \dot{y})$ в исходное уравнение (9.2) и приравнивая нулю сумму коэффициентов при членах, подобных относительно β_1 , β_2 и μ , мы получим систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и с периодической правой частью. Число этих уравнений зависит от того, до какого порядка малости мы будем вести разложение рядов. Если при разложении и подстановке ограничимся только членами не выше второго порядка малости, то мы получим шесть уравнений, определяющих шесть функций A , B , C , D , E , F :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{A} + A &= 0, & \ddot{D} + D &= f'_y(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)A + f'_y(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)\dot{A}, \\ \ddot{B} + B &= 0, & \ddot{E} + E &= f'_y(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)B + f'_y(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)\dot{B}, \\ \ddot{C} + C &= f(\varphi_0, \dot{\varphi}_0), & \ddot{F} + F &= f'_y(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)C + f'_y(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)\dot{C}. \end{aligned} \right\} \quad (9.64)$$

Кроме уравнений (9.64) мы еще должны знать начальные условия, которым подчиняются функции A , B , C , D , E , F . Сопоставляя выражения

$$\beta_1 = y(0) - \varphi_0(0) \text{ и } \beta_2 = \dot{y}(0) - \dot{\varphi}_0(0) \quad (9.65)$$

с выражениями для y и \dot{y} (9.60) и (9.61), мы можем найти значения A , B , C , D , E , F и \dot{A} , \dot{B} , \dot{C} , \dot{D} , \dot{E} , \dot{F} при $t = 0$. Мы получим:

$$\left. \begin{aligned} A(0) &= 1, & \dot{A}(0) &= 0, & B(0) &= 0, & \dot{B}(0) &= 1, \\ C(0) &= \dot{C}(0) = D(0) = \dot{D}(0) = E(0) = & & & & & \\ & & & & & & \\ & = \dot{E}(0) = F(0) = \dot{F}(0) = 0. & & & & & \end{aligned} \right\} \quad (9.66)$$

Первые два из уравнений (9.64) при начальных условиях (9.66) имеют решения:

$$A = \cos t, \quad B = \sin t.$$

Чтобы найти остальные функции C , D , E , F , определяемые уравнениями (9.64) и начальными условиями (9.66), нужно знать в общем

виде решение уравнения $\ddot{x} + x = \Phi(t)$, удовлетворяющее начальным условиям $x = \dot{x} = 0$ при $t = 0$. Это решение, как известно, имеет вид:

$$x = \int_0^t \Phi(u) \sin(t-u) du, \quad \dot{x} = \int_0^t \Phi(u) \cos(t-u) du.$$

Поэтому

$$\left. \begin{aligned} A(t) &= \cos t, & \dot{A}(t) &= -\sin t, \\ B(t) &= \sin t, & \dot{B}(t) &= \cos t, \\ C(t) &= \int_0^t [f] \sin(t-u) du, & \dot{C}(t) &= \int_0^t [f] \cos(t-u) du, \\ D(t) &= \int_0^t \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \cos u - \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] \sin u \right\} \sin(t-u) du, \\ \dot{D}(t) &= \int_0^t \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \cos u - \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] \sin u \right\} \cos(t-u) du, \\ E(t) &= \int_0^t \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \sin u + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] \cos u \right\} \sin(t-u) du, \\ \dot{E}(t) &= \int_0^t \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \sin u + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] \cos u \right\} \cos(t-u) du, \\ F(t) &= \int_0^t \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] C(u) + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] \dot{C}(u) \right\} \sin(t-u) du, \\ \dot{F}(t) &= \int_0^t \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] C(u) + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] \dot{C}(u) \right\} \cos(t-u) du. \end{aligned} \right\} \quad (9.67)$$

Здесь и ниже выражения f , $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}$, взятые в квадратные скобки, обозначают, что в эти выражения вместо y и \dot{y} подставлены соответственно

$$\varphi_0(u) = K \cos u \quad \text{и} \quad \dot{\varphi}_0(u) = -K \sin u.$$

Так как нам понадобятся значения этих функций при $t = 2\pi$ ¹⁾,

¹⁾ Напомним, что мы ввели для времени новый масштаб, приняв за единицу времени $\frac{T}{2\pi}$, где T — период собственных колебаний системы. Вследствие этого время u у нас стало безразмерным и длительность одного периода колебаний выражается безразмерной величиной 2π .

то мы их сейчас выпишем:

$$\begin{aligned}
 A(2\pi) &= 1, & \dot{A}(2\pi) &= 0, \\
 B(2\pi) &= 0, & \dot{B}(2\pi) &= 1, \\
 C(2\pi) &= - \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \sin u \, du, \\
 \dot{C}(2\pi) &= \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \cos u \, du, \\
 D(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \sin 2u + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] \sin^2 u \right\} du, \\
 \dot{D}(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \cos^2 u - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] \sin 2u \right\} du, \\
 E(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left\{ - \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \sin^2 u - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] \sin 2u \right\} du, \\
 \dot{E}(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \sin 2u + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] \cos^2 u \right\} du, \\
 F(2\pi) &= - \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] C(u) + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] \dot{C}(u) \right\} \sin u \, du, \\
 \dot{F}(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] C(u) + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] \dot{C}(u) \right\} \cos u \, du.
 \end{aligned} \tag{9.68}$$

Последние выражения для $D(2\pi)$, $\dot{D}(2\pi)$, $E(2\pi)$, $\dot{E}(2\pi)$ можно несколько упростить. Используя тождества:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{K} \frac{d}{du} \left\{ [f] \cos u \right\} &= - \frac{[f]}{K} \sin u - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \sin 2u - \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] \cos^2 u, \\
 \frac{1}{K} \frac{d}{du} \left\{ [f] \sin u \right\} &= \frac{[f]}{K} \cos u - \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \sin^2 u - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] \sin 2u,
 \end{aligned}$$

можно привести их к такому виду:

$$\begin{aligned}
 D(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] du - \frac{C(2\pi)}{K}, \\
 \dot{D}(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] du - \frac{\dot{C}(2\pi)}{K}, \\
 E(2\pi) &= - \frac{1}{K} \dot{C}(2\pi), \quad \dot{E}(2\pi) = \frac{1}{K} C(2\pi).
 \end{aligned} \tag{9.68a}$$

В частности при $C(2\pi) = 0$ имеем:

$$\left. \begin{aligned} D(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] du, & \dot{D}(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] du - \frac{\dot{C}(2\pi)}{K}, \\ E(2\pi) &= -\frac{1}{K} \dot{C}(2\pi), & \dot{E}(2\pi) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.68б)$$

Наконец, если $C(2\pi) = \dot{C}(2\pi) = 0$, то

$$\left. \begin{aligned} D(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] du, & \dot{D}(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] d\mu, \\ E(2\pi) &= 0, & \dot{E}(2\pi) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.68в)$$

Заметим, что в последних формулах (9.68в) величинам $D(2\pi)$ и $\dot{D}(2\pi)$ можно дать простую интерпретацию: это — постоянные члены в разложении в ряд Фурье функции $\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right]$ и соответственно $\left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]$, помноженные на 2π . Величины же $C(2\pi)$ и $\dot{C}(2\pi)$ суть коэффициенты при $\sin t$ и $\cos t$ разложения в ряд Фурье функции $f(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$, помноженные на 2π . Если функция $f(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$ есть многочлен, то эти величины можно вычислить непосредственно по тригонометрическим формулам (см. Дополнение III).

Перейдем теперь к отысканию периодических решений среди решений (9.60) уравнения (9.2) при $\mu \neq 0$. Пусть период некоторого периодического решения равен $2\pi + \tau$, где τ — малая поправка на период (при $\mu \rightarrow 0$ $\tau \rightarrow 0$). Тогда, приравнивая $y(2\pi + \tau)$ и $\dot{y}(2\pi + \tau)$ соответственно $y(0) = \varphi_0(0) + \beta_1$ и $\dot{y}(0) = \dot{\varphi}_0(0) + \beta_2$, мы получим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} y(2\pi + \tau) - y(0) &\equiv \psi_1(\beta_1, \beta_2, \tau, \mu) = 0, \\ \dot{y}(2\pi + \tau) - \dot{y}(0) &\equiv \psi_2(\beta_1, \beta_2, \tau, \mu) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (9.69)$$

определенные это периодическое решение. Это — два уравнения с тремя неизвестными β_1 , β_2 и τ , причем β_1 и β_2 — произвольные постоянные нашей задачи. Нас интересуют периодические решения, но если мы определим какое-нибудь одно периодическое решение, то их будет существовать бесконечное множество, отличающихся друг от друга на произвольную фазу. Поэтому, как уже указывалось, по существу задачи одно из β должно остаться совершенно произвольным. Можно, например, не нарушая общности, одно из них положить равным нулю. Если при этом уравнения (9.69) можно разрешить относительно τ и другого β таким образом, что при $\mu = 0$ $\tau = \beta = 0$, то наша задача решена. Если этого не удается сделать, то в запасе остается еще один вариант, а именно, положить равным

нулю другое β . Мы сейчас убедимся, что в нашей задаче предположение $\beta_2 = 0$ приводит к положительным результатам. Если бы мы исходили из решения $\varphi_0 = K \sin t$, т. е. полагали, что в порождающем решении $\delta = -\frac{\pi}{2}$ (а не нуль), то пришлось бы воспользоваться вторым вариантом, т. е. положить $\beta_1 = 0$.

Составим уравнения (9.69) сначала в общем виде, не полагая β_2 равным нулю. Для этого мы должны прежде всего составить выражения $y(2\pi + \tau)$ и $\dot{y}(2\pi + \tau)$. Поскольку τ мало по сравнению с 2π , мы можем разложить y и \dot{y} в ряды вблизи значения 2π .

Ограничеваясь членами первого и второго порядка малости, мы получим:

$$y(2\pi + \tau) = y(2\pi) + \tau \dot{y}(2\pi) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{y}(2\pi) + \dots,$$

$$\dot{y}(2\pi + \tau) = \dot{y}(2\pi) + \tau \ddot{y}(2\pi) + \frac{\tau^2}{2} \dddot{y}(2\pi) + \dots$$

Значения $y(2\pi)$, $\dot{y}(2\pi)$, $\ddot{y}(2\pi)$ и т. д. мы можем определить, пользуясь их выражениями при помощи рядов (9.60) — (9.62), подставляя вместо функций A , B , C и т. д. их значения при $t = 2\pi$, т. е. $A(2\pi)$, $B(2\pi)$ и т. д.

Отбрасывая члены более чем второго порядка малости (следует учесть, что порядок малости τ не ниже μ), получим:

$$\begin{aligned} y(2\pi + \tau) &= \varphi_0(2\pi) + A(2\pi)\beta_1 + B(2\pi)\beta_2 + C(2\pi)\mu + D(2\pi)\beta_{1\mu} + \\ &+ E(2\pi)\beta_{2\mu} + F(2\pi)\mu^2 + \tau \dot{\varphi}_0(2\pi) + \tau \dot{A}(2\pi)\beta_1 + \tau \dot{B}(2\pi)\beta_2 + \\ &+ \tau \dot{C}(2\pi)\mu + \frac{\tau^2}{2} \ddot{\varphi}_0(2\pi) + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}(2\pi + \tau) &= \dot{\varphi}_0(2\pi) + \dot{A}(2\pi)\beta_1 + \dot{B}(2\pi)\beta_2 + \dot{C}(2\pi)\mu + \dot{D}(2\pi)\beta_{1\mu} + \\ &+ \dot{E}(2\pi)\beta_{2\mu} + \dot{F}(2\pi)\mu^2 + \tau \ddot{\varphi}_0(2\pi) + \tau \ddot{A}(2\pi)\beta_1 + \tau \ddot{B}(2\pi)\beta_2 + \\ &+ \tau \ddot{C}(2\pi)\mu + \frac{\tau^2}{2} \dddot{\varphi}_0(2\pi) + \dots \end{aligned}$$

Подставляя в эти выражения значения φ_0 , A и B и их производных при $t = 2\pi$ и составляя уравнения (9.69), получим:

$$\left. \begin{aligned} y(2\pi + \tau) - y(0) &= -K \frac{\tau^2}{2} + \tau \beta_2 + C(2\pi)\mu + \dot{C}(2\pi)\tau\mu + \\ &+ D(2\pi)\beta_{1\mu} + E(2\pi)\beta_{2\mu} + F(2\pi)\mu^2 = 0, \\ \dot{y}(2\pi + \tau) - \dot{y}(0) &= -K\tau - \tau \beta_1 + \dot{C}(2\pi)\mu + \ddot{C}(2\pi)\tau\mu + \\ &+ \dot{D}(2\pi)\beta_{1\mu} + \dot{E}(2\pi)\beta_{2\mu} + \dot{F}(2\pi)\mu^2 = 0. \end{aligned} \right\} (9.70)$$

Из этих двух уравнений можно определить как функции параметра μ поправку на период τ и одно из двух β (в нашем случае β_1), если

другому β (β_2) приписано какое-либо определенное значение (например, 0). Подставим разложения этих величин в степенные ряды¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \mu\tau_1 + \mu^2\tau_2 + \dots, \\ \beta_1 &= \mu\beta_{11} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (9.71)$$

в уравнения (9.70) и приравняем нулю суммы членов порядка μ :

$$C(2\pi) = 0, \quad -K\tau_1 + \dot{C}(2\pi) = 0.$$

Первое из этих уравнений

$$C(2\pi) = - \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \sin u \, du = 0, \quad (9.72)$$

или по (9.12)

$$\Phi(K) = 0,$$

определяет радиусы K_i тех окружностей, вблизи которых при малых μ имеются предельные циклы. Второе уравнение определяет поправку на период первого приближения:

$$\tau_1 = \frac{\dot{C}(2\pi)}{K_i} = \frac{1}{K_i} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \cos u \, du, \quad (9.73)$$

или по (9.12)

$$\tau_1 = -2\pi\Psi(K_i).$$

Заметим, что приравнивание нулю $C(2\pi)$ эквивалентно приравниванию нулю коэффициента Фурье при $\sin t$ в разложении функции $f(K \cos t, -K \sin t)$.

Приравнивая нулю суммы членов порядка μ^3 в уравнениях (9.70), получим уравнения²⁾:

$$\left. \begin{aligned} K \frac{\tau_1^2}{2} + D(2\pi)\beta_{11} + F(2\pi) &= 0, \\ -K\tau_2 + \ddot{C}(2\pi)\tau_1 + [\dot{D}(2\pi) - \tau_1]\beta_{11} + \dot{F}(2\pi) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9.74)$$

которые определят β_{11} и поправку на период второго порядка τ_2 , если только $D(2\pi) \neq 0$.

¹⁾ В разложениях τ и β_1 в ряды по степеням μ свободные члены должны отсутствовать, так как $\tau \rightarrow 0$ и $\beta_1 \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$. Если задано $\beta_2 \neq 0$, то оно должно быть величиной порядка μ .

²⁾ Нетрудно видеть, что из этих уравнений β_2 выпадает, так как коэффициенты при β_2

$$\tau_1 + E(2\pi) = 0 \text{ и } \dot{E}(2\pi) = 0,$$

поскольку K является корнем уравнения (9.72).

Рассмотрим более подробно интересный с точки зрения практических приложений случай:

$$\dot{C}(2\pi) = 0,$$

когда $\tau_1 = 0$ и поправка на период τ является, вообще говоря, величиной порядка μ^2 . В этом частном случае уравнения (9.74) записываются в виде:

$$\begin{aligned} D(2\pi)\beta_{11} + F(2\pi) &= 0, \\ -K\tau_2 + \dot{D}(2\pi)\beta_{11} + F(2\pi) &= 0 \end{aligned}$$

и дают (при $D(2\pi) \neq 0$):

$$\left. \begin{aligned} \beta_{11} &= -\frac{F(2\pi)}{D(2\pi)}, \\ \tau_2 &= \frac{D(2\pi)F(2\pi) - \dot{D}(2\pi)F(2\pi)}{D(2\pi)K}. \end{aligned} \right\} \quad (9.75)$$

Подставляя найденные нами функции $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $\beta_1 = \beta_{11}\mu + \dots$ в выражение (9.60) для y и возвращаясь снова к произвольному началу отсчета времени (для чего достаточно заменить t на $t + \delta$), мы сможем записать решение нашего уравнения (9.2) (с точностью до величин порядка μ) в виде:

$$y = K \cos(t + \delta) + \mu \left\{ \int_0^{t+\delta} f[\varphi_0(u), \dot{\varphi}_0(u)] \sin(t + \delta - u) du - \frac{F(2\pi)}{D(2\pi)} \cos(t + \delta) \right\} + O(\mu^3), \quad (9.76)$$

где K — корень уравнения (9.72).

Сделаем одно замечание по поводу полученного приближенного выражения (9.76) для решения (9.60). Первое приближение (9.76), так же как и нулевое приближение (9.59), имеет период 2π , в то время как решение (9.59) должно иметь период, несколько отличный от 2π (и равный $2\pi + \mu^2\tau_2 + \dots$). Последнее обеспечивается тем, что выражение (9.60) есть разложение по степеням μ такого ряда Фурье, у которого не только «амплитуда», но и период зависят от μ .

Действительно, рассмотрим ряд Фурье

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} [A_k(\mu) \cos k\omega(\mu)t + B_k(\mu) \sin k\omega(\mu)t]$$

и разложим его в ряд по степеням μ ; разложение это имеет вид:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{k=0}^{\infty} [A_k(0) \cos k\omega(0)t + B_k(0) \sin k\omega(0)t] + \\ &\quad + \mu \sum_{k=0}^{\infty} [A'_k(0) \cos k\omega(0)t + B'_k(0) \sin k\omega(0)t] - \\ &\quad - A_k(0)\omega'(0)kt \sin k\omega(0)t + B_k(0)\omega'(0)kt \cos k\omega(0)t] + \mu^2 \sum \dots \end{aligned}$$

Несмотря на то, что тригонометрические функции входят только с периодом $\frac{2\pi}{\omega(0)}$, y есть периодическая функция с периодом, не равным $\frac{2\pi}{\omega(0)}$, если $\mu \neq 0$. Это изменение периода получается вследствие того, что в разложение входят вековые члены, т. е. члены, содержащие t в нетригонометрическом виде. Подобным же образом и в решении (9.76), начиная со следующего приближения, начнут появляться вековые члены, которые не нарушают периодичности функции y , а лишь немного изменят ее период¹⁾. Можно написать полученное периодическое решение и без вековых членов, если писать сразу все тригонометрические функции с правильными периодами, для чего нужно в аргументы всех тригонометрических функций ввести поправку на частоту. Вследствие малости ее можно считать равной поправке на период, деленной на 2π и взятой с обратным знаком. После этого решение принимает вид:

$$\begin{aligned} y = & K \cos \left[\left(1 - \frac{\tau_2 \mu^2}{2\pi} + \dots \right) t + \sigma \right] + \\ & \left(1 - \frac{\tau_2 \mu^2}{2\pi} + \dots \right) t + \delta \\ + \mu \left\{ \int \right. & \left. \left\{ f(\varphi_0, \dot{\varphi}_0) \sin \left[\left(1 - \frac{\tau_2 \mu^2}{2\pi} + \dots \right) t + \delta - u \right] du - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{F(2\pi)}{D(2\pi)} \cos \left[\left(1 - \frac{\tau_2 \mu^2}{2\pi} + \dots \right) t + \delta \right] \right\} + \dots \quad (9.77) \right. \end{aligned}$$

Наконец, заметим, что в силу общей теории (см. гл. V, § 8) условие устойчивости рассматриваемого периодического решения $y(t)$ имеет вид:

$$\int_0^{2\pi} f'_y [y(t), \dot{y}(t)] dt < 0$$

или, ограничиваясь первым членом разложения $y(t)$ по μ :

$$2\pi \Phi'(K_t) = \int_0^{2\pi} f'_y [\varphi_0(t), \dot{\varphi}_0(t)] dt < 0. \quad (9.78)$$

Выражению, стоящему в правой части последнего неравенства,

¹⁾ Напомним, что мы рассматриваем случай $\dot{C}(2\pi) = 0$, когда функция $C(t)$ является периодической с периодом 2π .

Если же $\dot{C}(2\pi) \neq 0$, то, несмотря на условие $C(2\pi) = 0$, функция $C(t)$ не будет периодической и уже в первом приближении для y (в члене $\mu C(t)$) появятся вековые члены, не нарушающие периодичности функции $y(t)$, но изменяющие ее период на величину порядка μ .

нетрудно дать простую интерпретацию: это постоянный член (умноженный на 2π) в разложении в ряд Фурье функции

$$f'_j(K_i \cos t, -K_i \sin t),$$

где K_i — соответствующий корень уравнения (9.72).

§ 6. Применение метода Пуанкаре

1. Ламповый генератор с мягким режимом. Для иллюстрации метода Пуанкаре мы исследуем уравнение, к которому приводит рассмотрение обыкновенного лампового генератора (рис. 465) при мягком установлении автоколебаний. Как мы убедились, в этом случае можно ограничиться кубической характеристикой лампы (9.37). Для разнообразия мы не будем считать сейчас малым затухание колебательного контура $\omega_0 RC$ (как и раньше, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$). Тогда уравнение колебаний генератора

$$\ddot{x} + x = \{\omega_0(MS_0 - RC) + 2\omega_0 MS_1 u_0 x - 3\omega_0 MS_2 u_0^2 x^2\} \dot{x},$$

где $x = \frac{u}{u_0}$ (u_0 — некоторый масштаб напряжения) и точкой сверху обозначено дифференцирование по безразмерному времени $t_{\text{нов}} = \omega_0 t_{\text{ст}}$, близко к уравнению гармонического осциллятора только при выполнении условий

$$\omega_0 |MS_0 - RC| \ll 1, \quad 2\omega_0 M |S_1| u_0 \ll 1 \quad \text{и} \quad 3\omega_0 MS_2 u_0^2 \ll 1,$$

т. е. вблизи границы самовозбуждения генератора и при малой нелинейности характеристики лампы.

Обозначив

$$\omega_0(MS_0 - RC) = \mu \alpha', \quad 2\omega_0 MS_1 u_0 = \mu \beta'$$

и

$$3\omega_0 MS_2 u_0^2 = \mu \gamma', \quad (9.79)$$

где μ — малый параметр ($0 < \mu \ll 1$), а α' , β' и γ' — величины порядка единицы, мы приведем уравнение колебаний генератора к следующему виду:

$$\ddot{x} + x = \mu(\alpha' + \beta' x - \gamma' x^2) \dot{x}. \quad (9.80)$$

Это уравнение как раз такого типа, для которого нами был развит метод Пуанкаре. Поэтому мы дальше можем действовать по шаблону. В нулевом приближении периодические решения уравнения (9.80) имеют вид:

$$\varphi_0(t) = K \cos t, \quad \dot{\varphi}_0(t) = -K \sin t, \quad (9.81)$$