нетрудно дать простую интерпретацию: это постоянный член (умноженный на 2π) в разложении в ряд Фурье функции

$$f'_y\,(K_i \cos t, -K_i \sin t),$$

где K_i — соответствующий корень уравнения (9.72).

§ 6. Применение метода Пуанкаре

1. Ламповый генератор с мягким режимом. Для иллюстрации метода Пуанкаре мы исследуем уравнение, к которому приводит рассмотрение обыкновенного лампового генератора (рис. 465) при мягком установлении автоколебаний. Как мы убедились, в этом случае можно ограничиться кубической характеристикой лампы (9.37). Для разнообразия мы не будем считать сейчас малым затухание колебательного контура $\omega_0 RC$ $\left(\text{как и раньше, } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right)$. Тогда уравнение колебаний генератора

$$\ddot{x} + x = \{\omega_0 (MS_0 - RC) + 2\omega_0 MS_1 u_0 x - 3\omega_0 MS_2 u_0^2 x^2\}\,\dot{x},$$

где $x = \frac{u}{u_0}$ (u_0 — некоторый масштаб напряжения) и точкой сверху обозначено дифференцирование по безразмерному времени $t_{\text{нов}} = \omega_0 t_{\text{ст}}$, близко к уравнению гармонического осциллятора только при выполнении условий

$$\omega_0 \,|\, MS_0 - RC \,| \ll 1, \quad 2\omega_0 M \,|\, S_1 \,|\, u_0 \ll 1 \quad \text{и} \quad 3\omega_0 MS_2 u_0^2 \ll 1,$$

т. е. вблизи границы самовозбуждения генератора и при малой нелинейности характеристики лампы.

Обозначив

$$\omega_0 (MS_0 - RC) = \mu\alpha', \quad 2\omega_0 MS_1 u_0 = \mu\beta'$$

и

$$3\omega_0 MS_2 u_0^2 = \mu\gamma', \tag{9.79}$$

где μ — малый параметр ($0 < \mu \ll 1$), а α', β' и γ' — величины порядка единицы, мы приведем уравнение колебаний генератора к следующему виду:

$$\ddot{x} + x = \mu\,(\alpha' + \beta' x - \gamma' x^2)\,\dot{x}. \tag{9.80}$$

Это уравнение как раз такого типа, для которого нами был развит метод Пуанкаре. Поэтому мы дальше можем действовать по шаблону. В нулевом приближении периодические решения уравнения (9.80) имеют вид:

$$\varphi_0(t) = K \cos t, \quad \dot{\varphi}_0(t) = -K \sin t, \tag{9.81}$$

причем K определяется из уравнения

$$C(2\pi) = -\int_0^{2\pi} (\alpha' + \beta' K \cos u - \gamma' K^2 \cos^2 u)(-K \sin u) \sin u \, du =$$
$$= \pi K \left(\alpha' - \frac{\gamma'}{4} K^2\right) = 0,$$

т. е.

$$K^2 = 4 \frac{\alpha'}{\gamma'}. \tag{9.81a}$$

Легко убедиться, что $\dot{C}(2\pi) = 0$, т. е. что в первом приближении нет поправки на период автоколебаний. Далее,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (\beta' - 2\gamma' x)\dot{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \alpha' + \beta' x - \gamma' x^2$$

и, следовательно,

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = (\beta' - 2\gamma' K \cos u)(-K \sin u),$$
$$\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right] = \alpha' + \beta' K \cos u - \gamma' K^2 \cos^2 u.$$

Интегрируя эти выражения в пределах от 0 до 2π, имеем (см. (9.68в)):

$$D(2\pi) = 2\pi\left(\alpha' - \frac{\gamma'}{2} K^2\right) = -2\pi\alpha', \quad \dot{D}(2\pi) = 0,$$

поэтому поправка на период (см. (9.75))

$$\tau = \mu^2 \tau_2 = \frac{\dot{F}(2\pi)}{K}.$$

Для нахождения поправки на период, а также для написания периодического решения с точностью до членов порядка μ нам нужно вычислить функцию $C(t)$ и выражения $F(2\pi)$ и $\dot{F}(2\pi)$. Эти вычисления дают:

$$C(t) = \int_0^t (\alpha' + \beta' K \cos u - \gamma' K^2 \cos^2 u)(-K \sin u) \sin(t - u) \, du =$$
$$= -\frac{\beta' K^2}{6}(2 \sin t - \sin 2t) + \frac{\gamma' K^3}{32}(3 \sin t - \sin 3t),$$

$$\dot{F}(2\pi) = \int_0^{2\pi} \left\{\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] C(u) + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right] \dot{C}(u)\right\} \cos u \, du =$$
$$= \frac{\pi}{12} \beta'^2 K^3 + \frac{\pi}{128} \gamma'^2 K^5 = \pi\alpha' K \left(\frac{\beta'^2}{3\gamma'} + \frac{\alpha'}{8}\right),$$

а

$$F(2\pi) = -\int_0^{2\pi} \left\{\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] C(u) + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right] \dot{C}(u)\right\} \sin u \, du = 0,$$

так как выражение под интегралом — функция периодическая (с периодом 2π) и нечетная.

Таким образом, поправка на период

$$\tau=\mu^2\pi\alpha'\left(\frac{\beta'^2}{3\gamma'}+\frac{\alpha'}{8}\right)^{1)}, \tag{9.82}$$

а периодическое решение в виде (9.76), т. е. без вековых членов, с точностью до членов порядка μ^2 может быть записано так [2]):

$$\begin{aligned} x(t)=2\sqrt{\frac{\alpha'}{\gamma'}}\cos\left[\left(1-\frac{\tau}{2\pi}\right)t+\delta\right]+ \\ +\mu\left\{\left(-\frac{4\alpha'\beta'}{3\gamma'}+\frac{3\alpha'}{4}\sqrt{\frac{\alpha'}{\gamma'}}\right)\sin\left[\left(1-\frac{\tau}{2\pi}\right)t+\delta\right]+\right. \\ \left.+\frac{2\alpha'\beta'}{3\gamma'}\sin 2\left[\left(1-\frac{\tau}{2\pi}\right)t+\delta\right]-\frac{\alpha'}{4}\sqrt{\frac{\alpha'}{\gamma'}}\sin 3\left[\left(1-\frac{\tau}{2\pi}\right)t+\delta\right]\right\}+ \\ +O(\mu^2)\,. \end{aligned} \tag{9.82a}$$

В большинстве случаев для практики главный интерес представляет только выражение для амплитуды (9.81а). Второе приближение мы вычислили для того, чтобы, с одной стороны, показать, как производить вычисление, с другой — чтобы подчеркнуть, что решение принципиально содержит высшие гармоники, которыми при линейном рассмотрении всегда пренебрегают.

Выясним теперь, устойчиво ли найденное нами периодическое движение. Чтобы движение было устойчивым, нужно, чтобы постоянный коэффициент Фурье функции, которая является множителем при $\dot{x}$ в правой части уравнения (9.80) и в которую подставлено синусоидальное решение, оказался меньше нуля, т. е. чтобы $\alpha'-\frac{3\gamma'K^2}{2}<0$ или $K^2>\frac{2\alpha'}{3\gamma'}$. Но, как мы нашли, квадрат амплитуды нулевого приближения $K^2=\frac{4\alpha'}{3\gamma'}$. Следовательно, условие устойчивости всегда выполняется (так как $\alpha'>0$, $\gamma'>0$), и значит, найденное нами периодическое решение всегда устойчиво.

2. Значение малого параметра μ. Дифференциальное уравнение всякой динамической системы содержит ряд параметров, имеющих определенный физический смысл (например, L, R, C, S и т. д.).

---

[1]) В частности, для симметричной кубической характеристики, для которой $\beta=0$, поправка на период

$$\tau=\frac{\pi\mu^2\alpha'^2}{8}=\frac{\pi}{8}\left[\omega_0(MS_0-RC)\right]^2.$$

[2]) Как видим, четный член характеристики не играет роли, лишь пока мы ограничиваемся нулевым приближением, но входит как в поправку на период, так и в первое приближение (9.82а) для периодического решения $x(t)$.

Обычно бывает целесообразно вместо этих параметров ввести новые, так называемые «безразмерные» параметры (точно так же часто бывает целесообразно вводить безразмерные переменные), представляющие собой некоторые определенные комбинации «размерных» физических параметров. Желательно для упрощения математического исследования свести число этих безразмерных параметров к наименьшему числу независимых. Если один из этих параметров может быть выбран таким образом, чтобы при значении параметра, равном нулю, система превращалась в линейный гармонический осциллятор, то этот параметр может служить с математической точки зрения тем малым параметром μ, по которому производятся разложения в ряды в теории Пуанкаре и малостью которого приходится распоряжаться при обосновании метода Ван-дер-Поля.

Пуанкаре доказал, что ряды, представляющие периодическое решение, в его теории обладают отличным от нуля радиусом сходимости μ_0, так что для всех $\mu \leqslant \mu_0$ эти ряды сходятся абсолютно и равномерно. Это значит, что в таком случае для всех $\mu \leqslant \mu_0$ существует периодическое решение, представляемое суммами соответствующих рядов [1]).

Однако о характере решения, например о близости решения к синусоидальному, эта сходимость еще ничего не говорит; на основании теории Пуанкаре мы можем лишь утверждать, что в этом случае всегда можно выбрать столь малое μ, чтобы решение было сколь угодно близко к синусоидальному.

Обычно при рассмотрении физических задач мы пользуемся нулевым приближением ($x = K \cos t$, $\Phi(K) = 0$); иногда кроме нулевого приближения нас интересует так называемая первая поправка на частоту (пропорциональная μ или μ^2) и выражение второго члена (пропорционального μ) в разложении периодического решения. Поэтому нас в первую очередь интересуют такие вопросы: насколько амплитуда нулевого приближения отличается (при заданном μ) от амплитуды основного тона точного решения, насколько первая поправка на частоту отличается от истинной поправки на частоту, насколько истинная несинусоидальность (определенная, например, при помощи так называемого клирфактора) отличается от несинусоидальности, присущей первому приближению, и т. д. Если мы при этом зададимся, исходя из физической сущности задачи, допустимой погрешностью (например, выраженной в процентах), то это даст нам теоретическую возможность определить верхнюю границу для μ, исходя из соображений о физической пригодности нулевого приближения, первого приближения и т. д. Так как, с другой стороны, μ есть определенная комбинация физических параметров, то в реаль-

---

[1]) Заметим, что расходимость рядов по μ для $\mu > \mu_0$ еще, вообще говоря, ничего не говорит о несуществовании периодического решения для $\mu > \mu_0$.

ной системе μ имеет совершенно определенное значение, и мы не можем по произволу считать его сколь угодно малым, не теряя физического смысла задачи. Пусть, например, по самому физическому смыслу поставленной задачи $\mu \leqslant \mu_1$. Тогда возникают следующие два вопроса: во-первых, будет ли μ_1 таким значением, при котором сходятся ряды Пуанкаре, и, во-вторых, будет ли μ_1 таким значением, при котором нулевое или первое приближение дает требуемую точность. При отрицательном ответе на первый вопрос мы должны отказаться от использования метода Пуанкаре; при отрицательном ответе на второй вопрос, если на первый вопрос ответ положительный, возникает необходимость пользоваться дальнейшими приближениями. Однако ответы на эти вопросы при современном положении теории затруднительны и перед теорией стоит задача выработать для ответа на них достаточно эффективные методы [1]).

§ 7. Ламповый генератор в случае ломаных характеристик

При рассмотрении лампового генератора мы представляли характеристики лампы в виде полиномов. Наряду с полиномами бывает целесообразно представлять характеристики и в виде иных аналитических выражений. Рассмотрение таких более общих типов характеристик интересно уже потому, что можно проверить, какие полученные свойства автоколебательных систем специфичны для полиномов и какие специфичны для существа задачи.

Далее, в наших рассуждениях мы предполагали, что $f(x, \dot{x})$ — голоморфная функция x и $\dot{x}$. Однако иногда бывает весьма выгодно пользоваться так называемыми ломаными характеристиками (например, характеристика твердого трения, Γ-характеристика генератора и т. д.), которые, очевидно, суть функции неголоморфные. В этом случае целесообразно поступать так: рассматривать неголоморфную функцию как предел некоторой голоморфной; провести вычисление всех нужных интегралов (определяющих амплитуды, устойчивость и т. д.), перейдя к пределу (что обычно упрощает выкладки), а результаты истолковать не для ломаных характеристик (что, вообще говоря, было бы неверно), а для близких к ним голоморфных.

---

[1]) Грубая оценка μ_0 может быть сделана по Пуанкаре. Однако эта оценка весьма груба и часто не имеет практического значения.

Физики иногда, для грубой оценки погрешности нулевого приближения, поступают следующим нестрогим образом: вычисляют численную величину выражения $\frac{\mu_{\max}\{f(K_i \cos u, -K_i \sin u)\}}{K_i}$ для значений параметров, соответствующих физическим условиям задачи, и для интересующей нас амплитуды нулевого приближения K_i. Если эта величина равна, например, $^1/_{10}$, то считают, что амплитуда нулевого приближения дает амплитуду основного тона с точностью порядка 10% и т. д. Легко видеть, что и эта оценка для многих случаев не имеет практического значения. Аналогичный прием см. у А. Н. Крылова [77], стр. 44.