

ной системе μ имеет совершенно определенное значение, и мы не можем по произволу считать его сколь угодно малым, не теряя физического смысла задачи. Пусть, например, по самому физическому смыслу поставленной задачи $\mu \leq \mu_1$. Тогда возникают следующие два вопроса: во-первых, будет ли μ_1 таким значением, при котором сходятся ряды Пуанкаре, и, во-вторых, будет ли μ_1 таким значением, при котором нулевое или первое приближение дает требуемую точность. При отрицательном ответе на первый вопрос мы должны отказаться от использования метода Пуанкаре; при отрицательном ответе на второй вопрос, если на первый вопрос ответ положительный, возникает необходимость пользоваться дальнейшими приближениями. Однако ответы на эти вопросы при современном положении теории затруднительны и перед теорией стоит задача выработать для ответа на них достаточно эффективные методы¹⁾.

§ 7. Ламповый генератор в случае ломанных характеристик

При рассмотрении лампового генератора мы представляли характеристики лампы в виде полиномов. Наряду с полиномами бывает целесообразно представлять характеристики и в виде иных аналитических выражений. Рассмотрение таких более общих типов характеристик интересно уже потому, что можно проверить, какие полученные свойства автоколебательных систем специфичны для полиномов и какие специфичны для существа задачи.

Далее, в наших рассуждениях мы предполагали, что $f(x, \dot{x})$ — голоморфная функция x и \dot{x} . Однако иногда бывает весьма выгодно пользоваться так называемыми ломанными характеристиками (например, характеристика твердого трения, Γ -характеристика генератора и т. д.), которые, очевидно, суть функции неголоморфные. В этом случае целесообразно поступать так: рассматривать неголоморфную функцию как предел некоторой голоморфной; провести вычисление всех нужных интегралов (определяющих амплитуды, устойчивость и т. д.), перейдя к пределу (что обычно упрощает выкладки), а результаты истолковать не для ломанных характеристик (что, вообще говоря, было бы неверно), а для близких к ним голоморфных.

¹⁾ Грубая оценка μ_0 может быть сделана по Пуанкаре. Однако эта оценка весьма груба и часто не имеет практического значения.

Физики иногда, для грубой оценки погрешности нулевого приближения, поступают следующим нестрогим образом: вычисляют численную величину выражения $\mu \max \{f(K_i \cos u, -K_i \sin u)\}$

для значений параметров, соответствующих

K_i физическим условиям задачи, и для интересующей нас амплитуды нулевого приближения K_i . Если эта величина равна, например, $1/10$, то считают, что амплитуда нулевого приближения дает амплитуду основного тона с точностью порядка 10% и т. д. Легко видеть, что и эта оценка для многих случаев не имеет практического значения. Аналогичный прием см. у А. Н. Крылова [77], стр. 44.

1. Ламповый генератор в случае Γ -характеристики. Рассмотрим в качестве первого примера автоколебания лампового генератора с колебательным контуром в цепи анода при аппроксимации характеристики лампы Γ -характеристикой (см. также § 3 гл. III). Уравнение колебаний в таком генераторе (3.15) после введения безразмерных переменных

$$x = \frac{i}{i_0} \quad \text{и} \quad t_{\text{нов}} = \omega_0 t_{\text{ст}}$$

(i_0 — некоторый масштаб тока, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$) приводится к виду:

$$\ddot{x} + x = -\omega_0 RC \dot{x} + \begin{cases} \frac{I_s}{i_0} & \text{при } \dot{x} > 0, \\ 0 & \text{при } \dot{x} < 0. \end{cases}$$

Оно близко к уравнению гармонического осциллятора при выполнении двух условий:

$$\omega_0 RC \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{I_s}{i_0} \ll 1,$$

т. е. при малом затухании колебательного контура и при малом токе насыщения I_s характеристики лампы (мы будем считать ниже, что эти условия выполняются). Введем $\mu = \omega_0 RC \ll 1$ и $\beta = \frac{I_s}{\omega_0 RC i_0}$ — величину порядка единицы. Тогда уравнение колебаний приводится к виду:

$$\ddot{x} + x = \mu [-\dot{x} + \beta \cdot 1(\dot{x})] \quad (9.83)$$

пригодному для применения метода малого параметра (например, метода Ван-дер-Поля).

Так как

$$\begin{aligned} \Phi(K) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [+K \sin u + \beta \cdot 1(-K \sin u)] \sin u du = \\ &= -\frac{K}{2} - \beta \int_{-\pi}^{\pi} \sin u du = -\frac{K}{2} + \frac{\beta}{\pi}, \end{aligned}$$

a

$$\Psi(K) = -\frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} [K \sin u + \beta \cdot 1(-K \sin u)] \cos u du \equiv 0,$$

¹⁾ Как и раньше,

$$1(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z > 0, \\ 0 & \text{при } z < 0. \end{cases}$$

то в нулевом приближении амплитуда автоколебаний

$$K = \frac{2\beta}{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{\frac{I_s}{i_0}}{\omega_0 RC}, \quad (9.84)$$

а период автоколебаний равен $2\pi^1$). Эти автоколебания устойчивы, так как

$$\Phi'(K) = -\frac{1}{2} < 0.$$

2. Ламповый генератор в случае ломаных характеристик без насыщения. Рассмотрим теперь, также с помощью метода малого параметра, автоколебания генератора, характеристика лампы которого не имеет насыщения и изображается в виде двух прямолинейных отрезков: горизонтального и наклонного (рис. 482), т. е. крутизна характеристики

$$S(u_g) = \begin{cases} S & \text{при } u_g > u_{g0}, \\ 0 & \text{при } u_g < u_{g0} \end{cases}$$

(u_{g0} — напряжение запирания лампы). Как мы видели в § 2 гл. VIII, в случае такой ограниченной с одной стороны характеристики при известных условиях возможны устойчивые автоколебания.

Ламповый генератор (например, с колебательным контуром в цепи сетки (рис. 465, a)) при такой кусочно-линейной характеристике лампы близок к гармоническому осциллятору только при малом затухании колебательного контура и при слабой обратной связи. Уравнение для напряжения на конденсаторе («безразмерного») будет иметь вид (см. § 1 настоящей главы):

$$\ddot{x} + x = \mu [-1 + \alpha s(x)] \dot{x}, \quad (9.3)$$

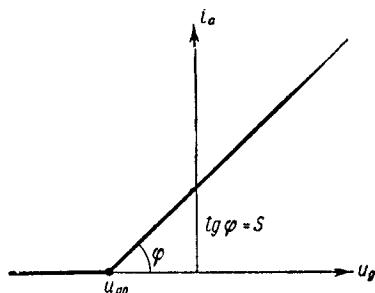


Рис. 482.

¹⁾ В обычных единицах период равен $2\pi \sqrt{LC}$, а амплитуда колебаний тока в колебательном контуре

$$I = I_0 K = \frac{2}{\pi} \frac{I_s}{\omega_0 RC}$$

в полном согласии с результатами § 3 гл. III (для случая $\mu = \omega_0 RC \ll 1$).

где

$$x = \frac{u}{u_0} = \frac{u_g - E_g}{u_0} \quad (u_0 \text{ --- некоторый масштаб напряжения}),$$

$$\mu = \omega_0 RC \quad (0 < \mu \ll 1),$$

$$\alpha = \frac{MS}{RC} \quad (\alpha \text{ является величиной порядка единицы}),$$

$$s(x) = \frac{S(E_g + u_0 x)}{S} = 1(x - b) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > b, \\ 0 & \text{при } x < b, \end{cases}$$

$b = \frac{u_{g0} - E_g}{u_0}$ --- приведенное напряжение запирания лампы и дифференцирование ведется по безразмерному времени $t' = \omega_0 t$ ($\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$).

Очевидно, при $b > 0$, т. е. при $E_g < u_{g0}$, самовозбуждения нет, а при $b < 0$ (при $E_g > u_{g0}$) $\begin{cases} \text{самовозбуждения нет, если } \alpha < 1; \\ \text{самовозбуждение есть, если } \alpha > 1. \end{cases}$

В качестве периодического решения (в нулевом приближении) можно взять:

$$x = \varphi_0(t) = K \cos t.$$

K мы будем считать положительным; так как фаза произвольна, то это не нарушает общности. Амплитуда автоколебаний K определится из условия, что $C(2\pi) = 0$, или иначе

$$\begin{aligned} C(2\pi) &= K \int_0^{2\pi} [-1 + \alpha \cdot 1(K \cos u - b)] \sin^2 u du = \\ &= K [-\pi + 2\alpha \int_0^\xi \sin^2 u du] = 0, \end{aligned} \quad (9.85)$$

где ξ есть то значение u , при котором $K \cos u - b = 0$, т. е.

$$\xi = \arccos \frac{b}{K} \quad (0 < \xi < \pi)^1).$$

Амплитуда автоколебаний K не входит явно в уравнение (9.85), но она не произвольна, а определяется из соотношения

$$K = \frac{b}{\cos \xi}, \quad (9.85a)$$

¹⁾ Только при $-\xi < u < \xi$ $K \cos u - b > 0$ и $1(K \cos u - b) = 1$; ξ существует только при $K \geq |b|$. Так как K положительно, то $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$ при $b > 0$ и $\frac{\pi}{2} < \xi < \pi$ при $b < 0$.

где ξ в свою очередь определено уравнением (9.85). Последнее после проведения интегрирования принимает такой вид:

$$-2\pi + \alpha(2\xi - \sin 2\xi) = 0 \quad (9.85b)$$

или

$$\alpha = \frac{2\pi}{2\xi - \sin 2\xi}. \quad (9.85b)$$

Соотношения (9.85a) и (9.85b) дают зависимость амплитуды K от параметра генератора α , выраженную в параметрической форме (через вспомогательный параметр ξ): $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$ при $b > 0$ и $\frac{\pi}{2} < \xi < \pi$ при $b < 0$.

Так как знаменатель выражения (9.85b) является монотонно возрастающей функцией ξ ¹⁾, причем $0 < 2\xi - \sin 2\xi < \pi$ при $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$ и $\pi < 2\xi - \sin 2\xi < 2\pi$ при $\frac{\pi}{2} < \xi < \pi$, то согласно (9.85b) $\alpha > 2$ при $b > 0$ (т. е. при $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$) и $1 < \alpha < 2$ при $b < 0$, когда $\frac{\pi}{2} < \xi < \pi$. Таким образом, каждое значение параметра α :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha > 2 \text{ при } b > 0, \\ 1 < \alpha < 2 \text{ при } b < 0 \end{array} \right\} \quad (9.86)$$

однозначно определяет ξ (с помощью уравнения (9.85b)) и, следовательно, амплитуду автоколебаний K . Если же неравенства (9.86) не выполнены, то уравнение (9.85b) не имеет решения, а исходное уравнение (9.3) не имеет периодических решений. Итак, только при выполнении условий (9.86) существует предельный цикл, и притом единственный.

Перейдем к исследованию устойчивости найденного периодического решения. Как известно, условие устойчивости заключается в том, чтобы постоянный член Фурье разложения функции

$$f'_{\dot{x}}(K \cos t, -K \sin t) = -1 + \alpha \cdot 1(K \cos t - b)$$

был меньше нуля, т. е. чтобы

$$-2\pi + 2\alpha \int_0^\xi dt < 0,$$

или, используя (9.85b):

$$2\pi\xi - 2\pi = \sin 2\xi < 0. \quad (9.87)$$

Это условие выполнено при $\frac{\pi}{2} < \xi < \pi$, т. е. при $b < 0$, и не выполнено при $b > 0$, когда $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$.

¹⁾ В самом деле, $\frac{d}{d\xi}(2\xi - \sin 2\xi) = 2(1 - \cos 2\xi) \geqslant 0$.

Таким образом, при $b < 0$, т. е. при $E_g > u_{g0}$, мы в зависимости от значения параметра $\alpha = \frac{MS}{RC}$ имеем три качественно различных

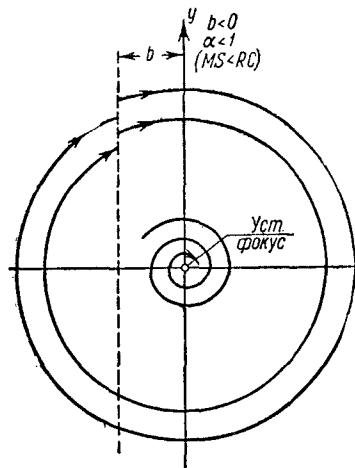


Рис. 483.

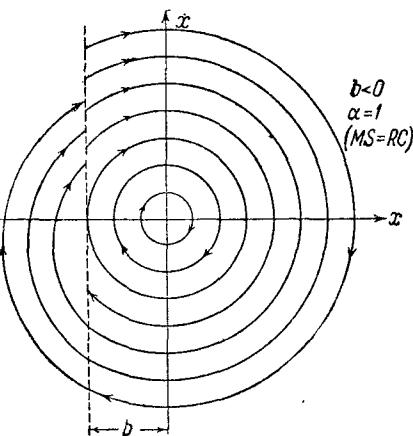


Рис. 484.

разбиения фазовой плоскости на траектории (рис. 483 — 486): при $\alpha < 1$ все траектории идут при $t \rightarrow +\infty$ к устойчивому состоянию

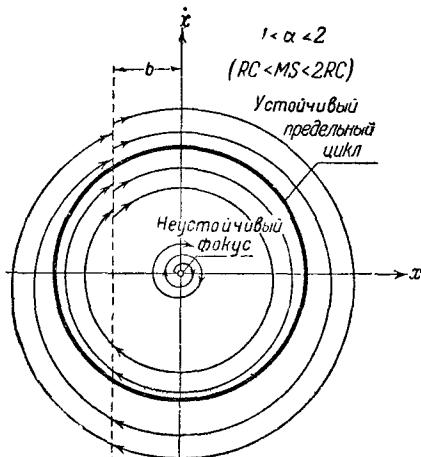


Рис. 485.

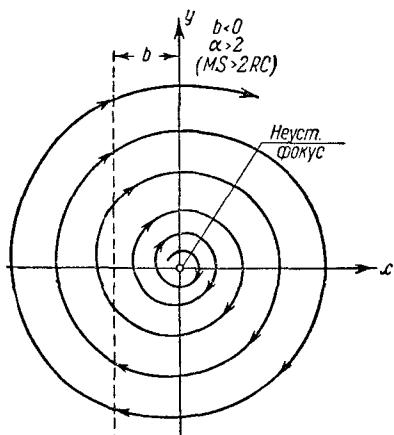


Рис. 486.

равновесия (рис. 483); при $1 < \alpha < 2$ существует устойчивый предельный цикл, к которому при $t \rightarrow +\infty$ стремятся все траектории (рис. 485); радиус этого предельного цикла $K \rightarrow +\infty$ при $\alpha \rightarrow 2$

(т. е. предельный цикл уходит в бесконечность при $\alpha=2$), и при $\alpha>2$ все траектории уходят в бесконечность (рис. 486). Минимальная величина K равна $|b|$ и соответствует $\xi=\pi$ (т. е. $\alpha=1$). Поэтому при переходе α через значение $\alpha=1$ сразу появляется предельный цикл конечных размеров. В момент появления предельного цикла (т. е. при $\alpha=1$ или при $MS=RC$) возможны периодические колебания с любыми амплитудами $K<|b|$, т. е.

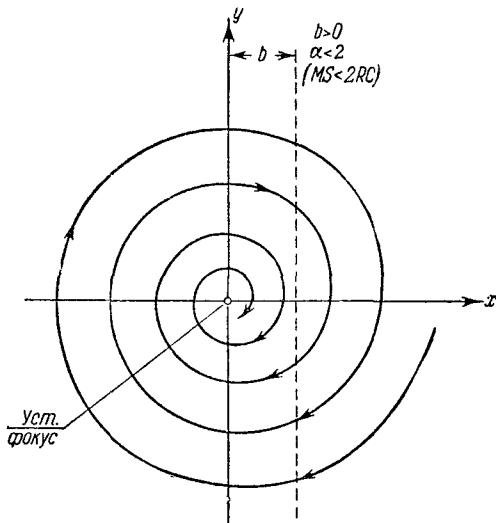


Рис. 487.

в этом случае генератор имеет состояние равновесия типа центра (рис. 484).

При $b>0$ (при $E_g < u_{g0}$) состояние равновесия всегда устойчиво (устойчивый фокус). К этому состоянию равновесия приближаются все траектории, если $\alpha<2$ (рис. 487). Если же $\alpha>2$, то существует неустойчивый предельный цикл (его радиус тем меньше, чем больше α), вне которого траектории уходят в бесконечность (рис. 488) ¹⁾.

Уход фазовых траекторий в бесконечность при $\alpha>2$ (при $MS>2RC$), очевидно, означает неудовлетворительность использованной нами идеализированной характеристики лампы (мы пренебрегали

¹⁾ Как нетрудно убедиться, все полученные результаты находятся в полном согласии с результатами § 2 гл. VII для случая $h_1, h_2 \ll 1$, когда колебания генератора близки к синусоидальным.

сеточными токами и анодной реакцией, которые заведомо играют существенную роль при больших положительных напряжениях на

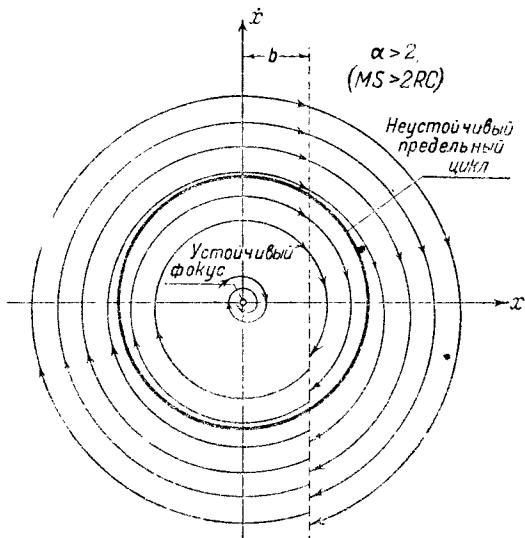


Рис. 488.

сетке лампы, получающихся при достаточно большой обратной связи).

§ 8. Влияние сеточного тока на работу лампового генератора

Рассматривая различные ламповые схемы, мы всегда предполагали, что в цепи сетки лампы ток отсутствует. Это предположение существенно упрощает задачу, и вместе с тем довольно часто можно считать, что оно с достаточной точностью оправдывается на опыте. Однако в других случаях, также имеющих практический интерес, во время работы генератора в цепи сетки течет ток, имеющий значительную величину. Поэтому интересно проследить, какое влияние на работу лампового генератора может оказывать ток в цепи сетки. Однако учет сеточных токов, вообще говоря, очень существенно усложняет задачу, именно, приводит к повышению порядка дифференциального уравнения, описывающего данную ламповую схему. Поэтому, ограничив свою задачу рассмотрением схем, описываемых одним дифференциальным уравнением второго порядка, мы лишены возможности поставить вопрос об учете сеточного тока в общем виде (в частности, в схемах генераторов с автоматическим смещением в цепи сетки). Но в некоторых частных случаях оказывается возможным ввести в рассмотрение сеточный ток, не повышая при этом