Следовательно, частота равна:

$$\Omega^2 = \frac{1}{LC} + \frac{Rp_1}{LC} + \frac{m\alpha_1}{\gamma_1}.$$

Мы видим, что в рассматриваемой схеме при учете сеточного тока получается поправка на частоту уже в первом приближении [1]). Чтобы процесс $u = K \sin \Omega t$ был устойчив, нужно, чтобы постоянный член ряда Фурье, изображающего производную правой части уравнения (9.88а) по u, был меньше нуля, т. е. чтобы постоянный член разложения в ряд Фурье выражения $\alpha_1 + 2\beta_1 u - 3\gamma_1 u^2$ был меньше нуля. Из этого условия получаем:

$$\alpha_1 - \frac{3}{2}\gamma_1 K^2 < 0$$

или

$$K^2 > \frac{1}{2}\frac{\alpha_1}{\frac{3}{4}\gamma_1},$$

что в силу (9.90) всегда имеет место; следовательно, найденное нами периодическое движение всегда устойчиво.

Наконец, условие самовозбуждения схемы есть $\alpha_1 > 0$ или

$$\frac{R}{L} + \frac{p_1}{C} - \frac{MS_1}{LC} < 0,$$

т. е. с точки зрения условий самовозбуждения ток в цепи сетки действует как некоторая добавочная нагрузка на контур, ухудшающая условия самовозбуждения.

§ 9. Теория бифуркаций в случае автоколебательной системы, близкой к линейной консервативной системе [89]

Мы рассматриваем по-прежнему автоколебательную систему с одной степенью свободы, близкую к линейной консервативной системе, и полагаем, что поведение этой автоколебательной системы существенно зависит от какого-нибудь параметра, которому мы можем придавать различные фиксированные значения. Уравнение движения системы в таком случае может быть записано в виде:

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}; \lambda), \tag{9.91}$$

---

[1]) При нашем рассмотрении мы не считали сопротивление колебательного контура R малой величиной, но считали малыми (порядка μ) коэффициенты α_1, β_1, γ_1, m и n, т. е. полагали, что генератор близок к порогу самовозбуждения, а нелинейности характеристик анодного и сеточного токов малы.

Если же считать малым также и сопротивление контура R ($\omega_0 RC$ полагать величиной порядка μ), то поправка на период и при наличии сеточных токов будет величиной порядка μ^2.

где x — координата системы (например, смещение, напряжение и т. д.), μ — малый параметр, который характеризует степень близости рассматриваемой автоколебательной системы к линейной консервативной системе, λ — тот параметр (например, коэффициент взаимоиндукции и т. д.), влиянием изменений которого на рассматриваемую систему мы интересуемся, $f(x, \dot{x}; \lambda)$ — нелинейная функция, определяемая физической природой сопротивлений и устройств, доставляющих энергию системе. Перейдем к исследованию уравнения (9.91), предполагая μ достаточно малым.

Пользуясь методами малого параметра (методом Ван-дер-Поля или методом Пуанкаре), мы показали, что при $\mu \neq 0$, но достаточно малом на плоскости останутся, вообще говоря, только изолированные замкнутые кривые, близкие к окружностям, радиусы которых K определяются уравнением

$$\Phi(K; \lambda) = 0, \tag{9.92}$$

где

$$\Phi(K; \lambda) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u; \lambda) \sin u \, du.$$

Остальные интегральные кривые не будут замкнутыми — это будут спирали, мало отличающиеся от окружностей, если μ достаточно мало. Как мы видели, периодические движения, соответствующие изолированным замкнутым интегральным кривым — предельным циклам Пуанкаре, — будут устойчивы (и орбитно и по Ляпунову), если выполнено неравенство

$$\Phi'_K(K; \lambda) < 0. \tag{9.93}$$

Таким образом, условия (9.92) и (9.93) представляют полную аналогию с условиями, которые мы имели для состояния равновесия консервативной системы (гл. II, § 5), только вместо координат особых точек $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_s$ мы должны рассматривать $K_1, K_2, \ldots, K_s$ — амплитуды стационарных движений, к которым относятся как предельные циклы, близкие в этом случае к кругам, так и особая точка $K = 0$.

Итак, для зависимости стационарных движений от параметра мы действительно получаем ту же самую картину, которую мы имели в гл. II, § 5 для зависимости состояний равновесия от параметра. Мы здесь получаем снова «линейные ряды», теперь уже не состояний равновесия, а стационарных движений, которые сохраняют свою устойчивость или неустойчивость до слияния с другими линейными рядами, т. е. до точек бифуркации. «Линейные ряды» стационарных движений задаются уравнением (9.92). Их устойчивость может быть определена так же, как и в § 5 гл. II: на плоскости λ, K отмечается область, где $\Phi(K; \lambda) > 0$; тогда линейный

ряд, расположенный *над* этой областью, соответствует устойчивым стационарным движениям, а ряд, расположенный *под* областью $\Phi(K; \lambda) > 0$, — неустойчивым стационарным движениям (периодическим движениям или состояниям равновесия).

Как мы увидим дальше, точки бифуркации имеют важное физическое значение: это те значения параметра, при которых происходят качественные изменения происходящих в системе процессов, например возникновение колебаний, срыв колебаний и т. п.

Стационарные движения, о которых мы сейчас говорили, подобно состояниям равновесия консервативных систем образуют замкнутую систему элементов, между которыми происходит «обмен устойчивостью».

Прежде чем перейти к рассмотрению какого-либо конкретного примера с точки зрения теории бифуркаций, заметим, что в ряде задач исследование зависимости характера движения системы от параметра λ удобно проводить не на плоскости λ, K, а на плоскости λ, ρ, где

$$\rho = K^2$$

— квадрат амплитуды стационарного движения, если вместо функции $\Phi(K; \lambda)$ рассматривать функцию

$$\overline{\Phi}(\rho; \lambda) = 2\sqrt{\rho}\,\Phi(\sqrt{\rho}; \lambda) = \\ = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\sqrt{\rho}\cos u, -\sqrt{\rho}\sin u; \lambda)\sqrt{\rho}\sin u\,du; \qquad (9.94)$$

тогда линейные ряды стационарных движений определятся уравнением

$$\overline{\Phi}(\rho; \lambda) = 0, \qquad (9.92а)$$

а их устойчивость — условием

$$\overline{\Phi}'_\rho(\rho; \lambda) < 0\,^{1)}. \qquad (9.93а)$$

§ 10. Применение теории бифуркаций к исследованию режимов лампового генератора [14]

Рассмотрим в виде примера случай мягкого и жесткого возбуждения лампового генератора. Возьмем, чтобы не повторяться, ламповый генератор с колебательным контуром в цепи анода (рис. 465, *б*; см. стр. 651) при обычных упрощающих предположениях, т. е.

---

[1]) Такое исследование зависимости стационарных движений от параметра λ путем построения «бифуркационной диаграммы» на плоскости λ, ρ целесообразно проводить, в частности, при $f(x, \dot{x}, \lambda) = F(x, \lambda)\dot{x}$ или при $f(x, \dot{x}, \lambda) = F_1(\dot{x}, \lambda)$, где $F(x, \lambda)$, $F_1(\dot{x}, \lambda)$ — полиномы (соответственно по x и $\dot{x}$).