

ряд, расположенный *над* этой областью, соответствует устойчивым стационарным движениям, а ряд, расположенный *под* областью $\Phi(K; \lambda) > 0$, — неустойчивым стационарным движениям (периодическим движениям или состояниям равновесия).

Как мы увидим дальше, точки бифуркации имеют важное физическое значение: это те значения параметра, при которых происходят качественные изменения происходящих в системе процессов, например возникновение колебаний, срыв колебаний и т. п.

Стационарные движения, о которых мы сейчас говорили, подобно состояниям равновесия консервативных систем образуют замкнутую систему элементов, между которыми происходит «обмен устойчивостью».

Прежде чем перейти к рассмотрению какого-либо конкретного примера с точки зрения теории бифуркаций, заметим, что в ряде задач исследование зависимости характера движения системы от параметра λ удобно проводить не на плоскости λ, K , а на плоскости λ, ρ , где

$$\rho = K^2$$

— квадрат амплитуды стационарного движения, если вместо функции $\Phi(K; \lambda)$ рассматривать функцию

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\rho; \lambda) &= 2\sqrt{\rho} \Phi(\sqrt{\rho}; \lambda) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\sqrt{\rho} \cos u, -\sqrt{\rho} \sin u; \lambda) \sqrt{\rho} \sin u du; \end{aligned} \quad (9.94)$$

тогда линейные ряды стационарных движений определяются уравнением

$$\bar{\Phi}(\rho; \lambda) = 0, \quad (9.92a)$$

а их устойчивость — условием

$$\bar{\Phi}'_\rho(\rho; \lambda) < 0^1). \quad (9.93a)$$

§ 10. Применение теории бифуркаций к исследованию режимов лампового генератора [14]

Рассмотрим в виде примера случай мягкого и жесткого возбуждения лампового генератора. Возьмем, чтобы не повторяться, ламповый генератор с колебательным контуром в цепи анода (рис. 465, б; см. стр. 651) при обычных упрощающих предположениях, т. е.

¹⁾ Такое исследование зависимости стационарных движений от параметра λ путем построения «бифуркационной диаграммы» на плоскости λ, ρ целесообразно проводить, в частности, при $f(x, \dot{x}, \lambda) = F(x, \lambda) \dot{x}$ или при $f(x, \dot{x}, \lambda) = F_1(\dot{x}, \lambda)$, где $F(x, \lambda)$, $F_1(\dot{x}, \lambda)$ — полиномы (соответственно по x и \dot{x}).

пренебрегая сеточным током и анодной реакцией. Уравнение тока в колебательном контуре может быть записано в виде:

$$LC \frac{d^2i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = i_a. \quad (9.95)$$

Здесь $i_a = \varphi(u_g)$ — анодный ток, зависящий только от сеточного напряжения $u_g = E_g + u$, где $u = M \frac{di}{dt}$ — э. д. с. взаимоиндукции.

Характеристику лампы мы аппроксимируем степенным рядом; ограничиваясь этого будет достаточно для нашей цели — членами до 5-й степени включительно, можно положить (см. § 4 этой главы):

$$i_a = \varphi(E_g + u) = i_{a0} + S_0 u + S_1 u^2 + S_2 u^3 + S_3 u^4 - S_4 u^5.$$

Введем новые, безразмерные переменные

$$t_{\text{нов}} = \frac{t}{\sqrt{LC}} \quad \text{и} \quad x = \frac{M}{\Phi_0} (i - i_{a0}),$$

где Φ_0 — некоторая неизменная для данной схемы величина, имеющая размерность магнитного потока (величина $I_0 = \Phi_0/M$ является масштабом тока). Выбрав за малый параметр $\mu = \omega_0 MS_0$, мы приведем уравнение колебаний (9.95) к требуемому виду:

$$\ddot{x} + x = \mu [\alpha \dot{x} + \beta (\dot{x})^2 + \gamma (\dot{x})^3 + \delta (\dot{x})^4 - \varepsilon (\dot{x})^5], \quad (9.95a)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{MS_0 - RC}{MS_0}, \quad \beta = \frac{\omega_0 \Phi_0 S_1}{S_0}, \quad \gamma = \frac{\omega_0^2 \Phi_0^2 S_2}{S_0}, \quad \delta = \frac{\omega_0^3 \Phi_0^3 S_3}{S_0}, \\ \varepsilon &= \frac{\omega_0^4 \Phi_0^4 S_4}{S_0}. \end{aligned}$$

— также безразмерные параметры, но уже не малые, а порядка единицы ²⁾.

В соответствии с (9.92a) и (9.93a) мы можем записать условия для амплитуд и устойчивости (с точностью до положительного множителя) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Phi}(\rho, \lambda) &\equiv (MS_0 - RC)\rho + \frac{3}{4} MS_0 \gamma \rho^2 - \frac{5}{8} MS_0 \varepsilon \rho^3 = 0, \\ \bar{\Phi}'(\rho, \lambda) &\equiv (MS_0 - RC) + \frac{3}{2} MS_0 \gamma \rho - \frac{15}{8} MS_0 \varepsilon \rho^2 < 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.96)$$

¹⁾ В этом полиноме мы будем считать, как и в § 4 этой главы, что $S_0 > 0$ и что коэффициент при старшем нечетном члене является отрицательным, так как только при выполнении этих условий будут существовать устойчивые автоколебания.

²⁾ Для разнообразия, в отличие от § 4 настоящей главы, мы взяли за зависимую переменную x величину, пропорциональную переменной составляющей силы тока в колебательном контуре, а не переменной составляющей сеточного напряжения. Заметим, что один из коэффициентов β, γ, δ или ε может быть сделан равным любому заданному числу (например, единице) путем выбора масштаба Φ_0 .

Пусть параметром, влиянием изменения которого на рассматриваемую систему мы интересуемся, будет коэффициент взаимоиндукции M . Следовательно, нам нужно построить бифуркационные диаграммы M , ρ для мягкого и для жесткого случая возникновения колебаний. Мы ограничимся рассмотрением области $M > 0$, соответствующей нормальному для лампового генератора направлению витков в катушке обратной связи. Не следует также забывать, что физический смысл имеют лишь значения $\rho \geq 0$, так как лишь они соответствуют действительным амплитудам стационарных решений.

Чтобы упростить выкладки, мы будем каждый раз выбирать возможно более простую математическую идеализацию, делая те или иные предположения относительно коэффициентов ряда, представляющего характеристику лампы¹⁾.

1. Мягкое возникновение колебаний. Как известно, мягкое возникновение колебаний получается при $S_3 < 0$ (см. § 4 этой главы), причем наличие в этом случае члена 5-й степени в выражении для характеристики лампы не приводит к появлению каких-либо новых качественных особенностей в поведении системы. Поэтому, положив $S_2 < 0$, $S_4 = 0$ (т. е. $\gamma < 0$, $\epsilon = 0$), мы сможем, максимально упростив выкладки, отобразить существенные черты мягкого возникновения колебаний. Вводя обозначение: $\frac{3}{4}S_0\gamma = \frac{3}{4}\omega_0^2\Phi_0^2S_2 = -a$ ($a > 0$), запишем $\bar{\Phi}(\rho, M)$ в виде:

$$\bar{\Phi}(\rho, M) = \{MS_0 - RC - aM\rho\} \rho. \quad (9.97)$$

Отсюда видно, что на плоскости M, ρ кривая $\bar{\Phi}(\rho, M) = 0$ распадается на прямую $\rho = 0$ и гиперболу:

$$MS_0 - RC - aM\rho = 0.$$

Выделив на плоскости M, ρ область $\bar{\Phi}(\rho, M) > 0$, мы сможем, пользуясь общими правилами, изложенными в гл. II, § 5, наметить устойчивые (светлые кружки) и неустойчивые (черные кружки) части линейных рядов (рис. 491).

Бифуркационным значением параметра M служит значение $M_1 = \frac{RC}{S_0}$, где пересекаются линейные ряды, соответствующие вышеупомянутым прямой и гиперболе. Прямая устойчива до значения

¹⁾ Мы еще раз обращаем внимание читателя на то, что в выражения (9.96) входят лишь те коэффициенты ряда, изображающего характеристику, которые стоят при нечетных степенях. Остальные коэффициенты, не влияя, таким образом, в первом приближении на величину амплитуд и на устойчивость стационарных режимов, могут играть существенную роль при действии внешней силы (например, в случае детектирования, резонанса n -го рода).

параметра $M = M_1$, затем после смены устойчивости в точке бифуркации устойчивой становится гипербола.

Теперь перейдем от бифуркационной диаграммы M , ρ к фазовой плоскости x , \dot{x} и будем исследовать эту фазовую плоскость при

различных M . На фазовой плоскости для $M < M_1$ мы имеем только одно устойчивое стационарное состояние — устойчивый фокус (рис. 492). Где бы ни находилась изображающая точка, она, двигаясь по одной из спиралей, в конце концов окажется в ближайшем соседстве с устойчивой особой точкой.

При переходе M через бифуркационное значение $M = M_1$ от

особой точки отделяется устойчивый предельный цикл (рис. 493). Изображающая точка, находившаяся раньше в состоянии равновесия, перейдет теперь на предельный цикл, так как при $M > M_1$ состояние равновесия неустойчиво¹⁾. На физическом языке это значит, что

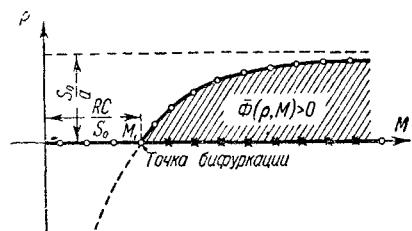


Рис. 491.

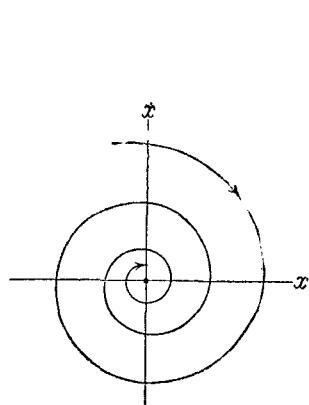


Рис. 492.

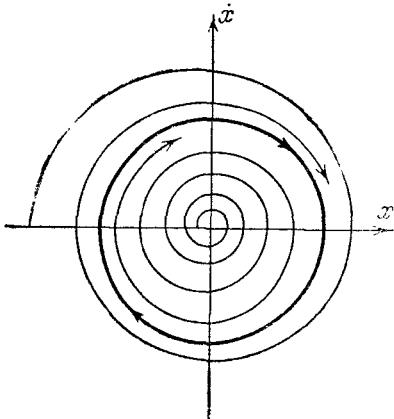


Рис. 493.

в системе происходят колебания и имеет место самовозбуждение. При увеличении M радиус предельного цикла увеличивается и стремится к асимптотическому значению, соответствующему $\rho = \frac{S_0}{a}$.

¹⁾ Мы будем предполагать, что изменения параметра M достаточно медленны. Так как всякое движение в автоколебательных системах приближается к стационарному, то при достаточно медленных изменениях параметра мы можем считать, что изображающая точка находится в окрестности стационарных движений.

При уменьшении M система ведет себя обратимо, предельный цикл сжимается, изображающая точка двигается по предельному циклу и при $M = M_1$, когда предельный цикл сожмется в точку, изображающая точка снова вернется в начало координат, которое в этот момент превращается в устойчивый фокус.

Прибор, измеряющий амплитуду колебаний генератора K , при изменении M покажет плавный («мягкий») переход с постепенно (без скачков) меняющейся амплитудой от состояния покоя к стационарным колебаниям, и обратно (рис. 494).

2. Жесткое возникновение колебаний. Предположения $S_3 > 0$ и $S_4 > 0$ отображают, как мы уже видели, существенные черты жесткого возникновения колебаний. Вводя обозначения:

$$\frac{3}{4} S_0 \gamma = a \quad (a > 0), \quad \frac{5}{8} S_0 \varepsilon = b \quad (b > 0),$$

получим:

$$\bar{\Phi}(\rho, M) = \{MS_0 - RC + aM\rho - bM\rho^3\}\rho. \quad (9.98)$$

На плоскости M, ρ бифуркационная диаграмма распадается на прямую $\rho = 0$ и кривую третьего порядка

$$MS_0 - RC + aM\rho - bM\rho^3 = 0.$$

На рис. 495 указано примерное расположение этих кривых, указаны области, где $\bar{\Phi}(\rho, M) > 0$, и намечены устойчивые (светлые кружки) и неустойчивые (черные кружки) части линейных рядов.

Для $M > 0$ существуют два бифуркационных значения параметра:

$$M_0 = \frac{RC}{S_0 + \frac{a^2}{4b}} \quad \text{и} \quad M_1 = \frac{RC}{S_0}.$$

M_0 соответствует слиянию двух линейных рядов ¹⁾, M_1 — пересечению двух линейных рядов.

Перейдем теперь к фазовой плоскости. Для $0 < M < M_1$ на нашей фазовой плоскости имеется, так же как и в предыдущем случае, только одно стационарное движение — устойчивый фокус в начале

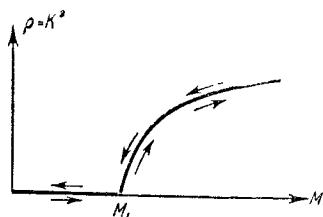


Рис. 494.

¹⁾ Соответствующая точка бифуркации на плоскости M, ρ отвечает так называемому «предельному» стационарному движению.

координат (рис. 492). При переходе M через бифуркационное значение параметра M_0 у нас сразу появляется пара предельных циклов, имеющих конечный радиус (рис. 496). Один из этих циклов — больший — устойчивый; меньший — неустойчивый; характер особой точки в начале координат при этом не меняется, она остается устойчивой.

При дальнейшем увеличении M устойчивый цикл растет, а неустойчивый уменьшается (рис. 497), и при $M = M_1$ неустойчивый цикл исчезает, сливвшись с особой точкой, которая при $M = M_1$ становится уже неустойчивой (рис. 498).

Устойчивый цикл при увеличении M монотонно растет, и его радиус асимптотически стремится к значению, соответствующему

$$\rho = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bS_0}}{2b}.$$

Что же отметит прибор, измеряющий амплитуду колебаний генератора K ? Для того, чтобы это выяснить, проследим поведение изображающей точки, находившейся при малых M вблизи состояния равновесия. Очевидно, что изображающая точка будет находиться вблизи состояния равновесия до тех пор, пока это состояние равновесия не сделается неустойчивым, т. е. вплоть до $M = M_1$; то, что при $M = M_0$ появилась пара предельных циклов (из них один устойчивый), это «не касается» нашей изображающей точки, так как устойчивый характер состояния равновесия при этом не изменяется.

При $M > M_1$ особая точка уже неустойчива; изображающая точка «срывается» при переходе M через $M = M_1$, затем двигается так, как ей «велят» интегральные кривые, и, значит, приходит к устойчивому предельному циклу и уже не покидает его при дальнейшем

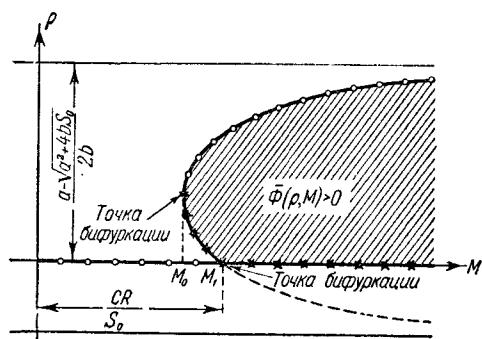


Рис. 495.

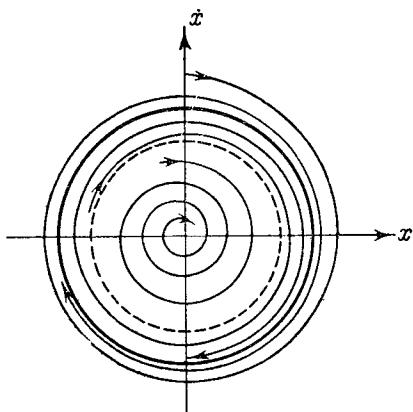


Рис. 496.

увеличении M . При уменьшении параметра M получится иная картина. При уменьшении M изображающая точка останется на предельном цикле вплоть до $M = M_0$, когда устойчивый цикл сольется с неустойчивым и исчезнет; изображающая точка не будет реагировать на то

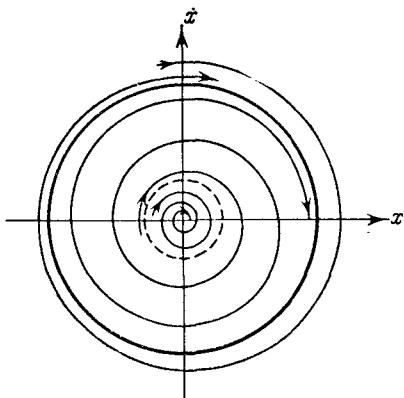


Рис. 497.

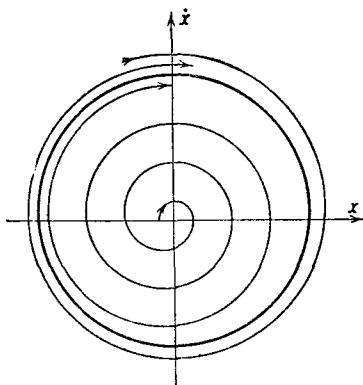


Рис. 498.

обстоятельство, что при $M = M_1$ состояние равновесия делается устойчивым, так как это не изменяет характера того предельного цикла, по которому она движется. При переходе M через значение $M = M_0$ изображающая точка, следуя интегральным кривым, перейдет к состоянию равновесия и останется там при дальнейшем уменьшении.

Прибор, измеряющий амплитуду колебаний тока в колебательном контуре (или напряжения на сетке), обнаружит скачки — резкое («жесткое») изменение амплитуды для $M = M_1$ при увеличении M и для $M = M_0$ при уменьшении M . Мы видим, что явление протекает иначе при увеличении, чем при уменьшении M ; мы имеем дело с процессом, носящим необратимый «гистерезисный» характер (рис. 499).

Мы получили, таким образом, бифуркационные диаграммы для мягкого и жесткого возникновения колебаний, принимая за параметр, влиянием изменений которого на рассматриваемую систему мы интересуемся, коэффициент взаимоиндукции M . Аналогичные диаграммы мы могли бы получить и для других параметров, характеризующих нашу систему.

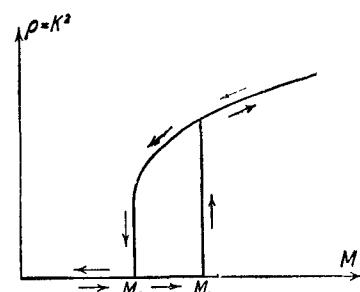


Рис. 499.

На рис. 500 и 501 приведены бифуркационные диаграммы R, ρ , где R — омическое сопротивление, опять для случая мягкого и жесткого режима.

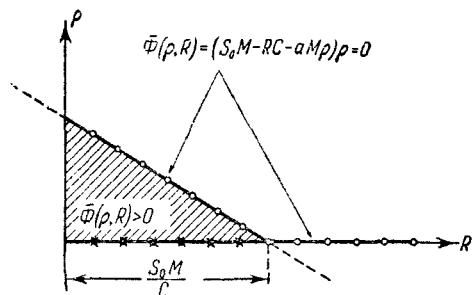


Рис. 500.

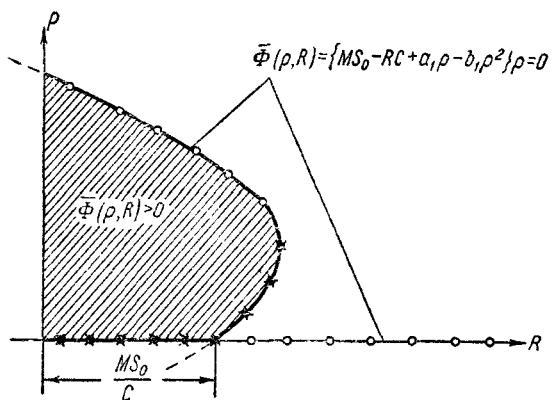


Рис. 501.

сткого режима; соответствующие соотношения легко могут быть получены из выражений (9.97) и (9.98).