ГЛАВА X

РАЗРЫВНЫЕ КОЛЕБАНИЯ [1])

§ 1. Введение

Как уже неоднократно указывалось, при рассмотрении всякой реальной физической системы мы неизбежно должны идеализировать эту систему, должны выбрать из всего многообразия свойств и качеств этой системы основные, определяющие, существенные для рассматриваемого круга вопросов и построить упрощенную динамическую (математическую) модель, уравнения движения которой отображают с той или иной степенью точности поведение реальной системы. Но, отбрасывая те или иные свойства системы, применяя ту или иную идеализацию, мы всегда рискуем тем, что можем отбросить как раз существенные для рассматриваемого вопроса обстоятельства и что сделанные упрощающие допущения как раз не дадут возможности правильно ответить на поставленные вопросы. Мы не можем построить никакой теории, пока не идеализируем свойств рассматриваемой системы, но, с другой стороны, мы не можем решить вопрос о «законности» допущенной идеализации, пока не получим каких-либо результатов из нашего теоретического рассмотрения и не сопоставим этих результатов с экспериментальными данными.

Одним из методов идеализации, всегда применяемым при построении упрощенной (идеализированной) динамической модели реальной физической системы, является пренебрежение так называемыми «малыми» или «паразитными» параметрами системы. Так, например, рассматривая колебания в RC-контуре (рис. 502) с помощью уравнения

$$R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0, \tag{10.1}$$

мы пренебрегали, в частности, малой, паразитной индуктивностью L_0. Как мы видели в § 5 гл. I, этот параметр L_0, если он действительно мал (если $L_0 \ll CR^2$), не является существенным. При

---

[1]) В гл. X Н. А. Железцовым написаны § 1, п. 2 § 2, §§ 3—5, 7, п. 4 § 8, §§ 9—11, п. 2 § 12, § 13 и существенно переработаны §§ 6, 8, 12.

колебаниях, начинающихся из состояний, совместных с уравнением (10.1), это уравнение удовлетворительно и правильно отображает весь процесс изменения токов и напряжений в RC-контуре и учет малой индуктивности L_0, т. е. переход к «более точному» уравнению второго порядка

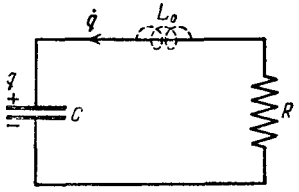

Рис. 502.

$$L_0\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0, \qquad (10.1а)$$

не внесет ничего нового, давая лишь малые поправки к решению уравнения (10.1), тем меньшие, чем меньше L_0/CR^2 [1]).

Аналогично, пренебрегая малыми паразитными параметрами, мы сможем с достаточной степенью точности рассмотреть явления в контуре, состоящем из сопротивления R и индуктивности L, исходя из уравнения

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0, \qquad (10.2)$$

если только эти паразитные параметры малы. Учет, например, малой собственной емкости C_0 катушки индуктивности (рис. 503), что приведет к дифференциальному уравнению второго порядка:

$$C_0RL\frac{d^2i}{dt^2} + L\frac{di}{dt} + Ri = 0, \qquad (10.2а)$$

не изменит существенно результатов нашего рассмотрения, если только емкость C_0 достаточно мала (нужно, чтобы $C_0 \ll L/R^2$).

---

[1]) Здесь, как и всюду в книге, мы будем рассматривать только те движения системы, которые *начинаются из состояний, удовлетворяющих уравнениям принятой динамической модели*. В рассматриваемом сейчас случае уравнения (10.1) мы можем задать произвольно в начальный момент времени (например, при $t=0$) только одну из величин, характеризующих состояние RC-контура (если задано q_0, то в силу уравнения (10.1) $(\dot{q})_0 = -\frac{q_0}{RC}$, $(\ddot{q})_0 = \frac{q_0}{(RC)^2}$, ...). Если же нас интересуют процессы в RC-контуре при начальных условиях, не удовлетворяющих уравнению (10.1) (например, при $q_0 \neq 0$ и $\dot{q}_0 = 0$), то рассмотрение таких процессов не может быть проведено полностью с помощью уравнения (10.1), а требует применения уравнения (10.1а), составленного с учетом паразитной индуктивности L_0. Как мы видели в § 5 гл. I, на начальном этапе (длительность которого имеет порядок величины L_0/R) $R\dot{q} + q/C$ и, следовательно, $L_0\ddot{q}$ не малы, что приводит при малых L_0 к быстрому изменению тока $\dot{q}$ до величины, близкой к $-q_0/RC$. Далее, даже и в этом случае явления удовлетворительно отображаются уравнением (10.1). Уравнение (10.1а) или соответствующим образом сформулированный постулат скачка тока необходимы для рассмотрения движения только на начальном этапе, когда состояния системы «находятся в конфликте» с уравнением (10.1).

Точно так же при исследовании работы лампового генератора с индуктивной обратной связью мы пренебрегали всеми малыми параметрами, в частности паразитными емкостями и индуктивностями монтажа, междуэлектродными емкостями лампы. Учет тех или иных малых паразитных параметров привел бы (кроме значительного усложнения задачи) лишь к малым изменениям в условиях самовозбуждения генератора и выражениях, определяющих амплитуду и период автоколебаний, и т. д.

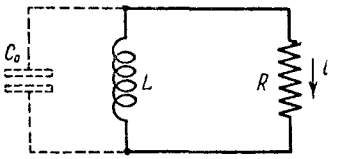

Рис. 503.

Так мы поступали всякий раз при построении динамической модели физической колебательной системы, пренебрегая малыми, паразитными параметрами и рассчитывая на то, что неучтенные малые параметры играют тем меньшую роль, чем меньше их величины. Мы вынуждены это делать хотя бы из-за того, что невозможно учесть все малые параметры.

В рассмотренных выше примерах, равно как и во всех задачах, разобранных нами ранее [1]), такое пренебрежение малыми, паразитными параметрами, наряду с другими упрощающими предположениями давало возможность построить такие динамические модели (такие системы дифференциальных уравнений), которые позволяли проследить за поведением колебательных систем при $0 < t < +\infty$ (конечно, при условии, что начальные состояния (при $t = 0$) не противоречили уравнениям использовавшихся динамических моделей). При этом результаты рассмотрения находились в качественном и удовлетворительном количественном согласии с экспериментальными данными.

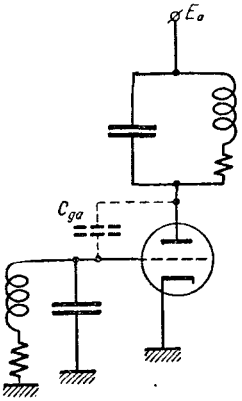

Рис. 504.

Однако далеко не всегда допустимо отбрасывать все малые параметры, так как среди них могут оказаться параметры, существенные для процессов в рассматриваемой колебательной системе. Например, при рассмотрении генератора, схема которого приведена на рис. 504, нельзя пренебречь малой паразитной, так называемой проходной емкостью лампы C_{ga}, так как только через нее осуществляется обратная связь анодного колебательного контура с сеточным, необходимая для возбуждения автоколебаний. Поэтому, пренебрегая малой емкостью C_{ga}, мы не сможем объяснить даже самовозбуждение схемы.

---

[1]) За исключением мультивибратора с одним RC-звеном (§ 8 гл. IV).

В качестве второго примера рассмотрим процесс, происходящий после включения постоянной э. д. с. в контур, состоящий из последовательно соединенных сопротивления R, индуктивности L и большой емкости C (рис. 505). Пусть начальный заряд на конденсаторе (при $t=0$) $q_0=0$, тогда уравнение для силы тока i в контуре мы сможем записать в виде:

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt=E. \tag{10.3}$$

Посмотрим, нельзя ли в этом уравнении пренебречь членом

$$\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt,$$

отображающим напряжение на конденсаторе, на том основании, что

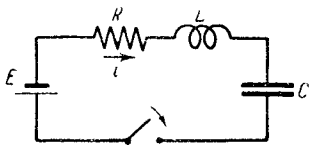

Рис. 505.

$\frac{1}{C}$ «мало» (поскольку C «велико»). Отбрасывая этот член, мы получим уравнение

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E, \tag{10.3а}$$

которое, однако, правильно отображает процесс изменения силы тока только в начальной стадии (в течение промежутка времени порядка RC) [1]). Действительно, согласно упрощенному уравнению (10.3а) в контуре при $t\to+\infty$ должна устанавливаться сила тока, равная E/R, в то время как на самом деле и в согласии с уравнением (10.3) сначала (за промежуток времени порядка L/R) сила тока достигает значения, близкого к E/R, а затем по мере увеличения напряжения на конденсаторе начинает уменьшаться и медленно (как $e^{-\frac{t}{RC}}$) стремится к нулю при $t\to+\infty$ (рис. 506). Таким образом, несмотря на то, что член

$$\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt$$

[1]) Мы считаем, что начальное состояние цепи удовлетворяет уравнению (10.3а); пусть, например, $(i)_0=0$, а $\left(\frac{di}{dt}\right)_0=\frac{E}{L}$.

имеет «малый» коэффициент $\frac{1}{C}$ и сначала мал по сравнению с другими членами уравнения (10.3), им пренебрегать нельзя, если мы хотим проследить весь процесс установления тока в контуре, так как рассматриваемый контур через промежуток времени порядка RC

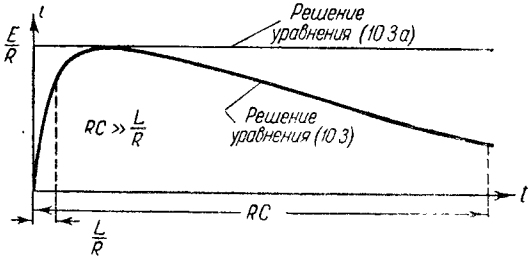

Рис. 506.

обязательно придет в такие состояния, в которых этот член будет уже сравним с э. д. с., включенной в контур.

Наконец, существуют такие колебательные системы, построение теории которых вообще невозможно без учета некоторых малых (паразитных) параметров, так как последние являются существенными для процессов в этих системах. Примерами таких систем могут служить мультивибратор с одним RC-звеном и другие колебательные системы, совершающие так

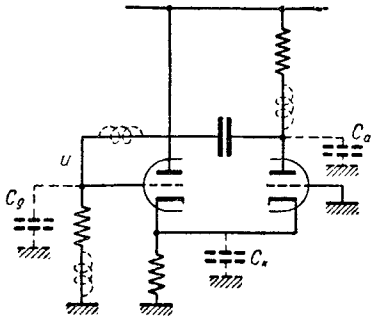

Рис. 507.

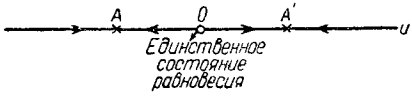

Рис. 508.

называемые *разрывные колебания*, т. е. такие колебания, при которых сравнительно медленные изменения состояния системы чередуются с весьма быстрыми, «скачкообразными» (мультивибратор является типичным примером генератора разрывных колебаний).

При рассмотрении в § 8 гл. IV мультивибратора с одним RC-звеном (рис. 507) мы пренебрегали всеми паразитными параметрами (в том числе паразитными емкостями). Полученная в результате этого динамическая модель первого порядка (ее фазовая прямая приведена на рис. 508) оказалась «дефектной», «вырожденной» в том смысле, что она не дала возможности проследить за поведением системы во все моменты времени после задания ее начального

состояния (совместного, конечно, с уравнением этой модели). Оказывается, при любых начальных условиях уравнение динамической модели первого порядка «приводит» систему в одно из состояний, изображаемых на рис. 508 «точками стыка фазовых траекторий» A и A', которые не являются состояниями равновесия и из которых согласно этому уравнению нет выходящих фазовых траекторий.

Поскольку все «большие» параметры мультивибратора были учтены, причину построения такой неудачной, «дефектной» модели, очевидно, следует искать в том, что мы, пренебрегая всеми паразитными параметрами схемы, пренебрегли среди них и какими-то параметрами, существенными (несмотря на их «малость») для колебательных процессов в мультивибраторе. Такими существенными паразитными параметрами, определяющими (наряду с емкостью C, сопротивлениями R_a и R_g и характеристикой ламповой группы) закономерности колебаний в мультивибраторе, являются, в частности, малые паразитные емкости C_a, C_g или C_k, всегда имеющиеся в схеме (они изображены на рис. 507 пунктиром). Эти емкости играют определяющую роль во время быстрых, «скачкообразных» изменений сеточных напряжений u, которые, как известно, являются характерными для колебаний мультивибратора. При учете паразитных емкостей C_a и C_g или C_k (эти емкости в реальных схемах мультивибратора обычно значительно меньше емкости C) мы придем к вполне «доброкачественной» модели второго порядка, т. е. к такой модели, которая позволяет проследить неограниченно во времени за поведением мультивибратора и объяснить, в частности, периодическое повторение скачков сеточного напряжения u (см. § 5 гл. VIII и § 12 гл. V) [1]). Существенно при этом, что при колебаниях мультивибратор периодически приходит в такие состояния, в которых члены дифференциальных уравнений с малыми паразитными емкостями в качестве их коэффициентов не являются малыми по сравнению с другими членами этих уравнений (несмотря на малость паразитных емкостей по сравнению с емкостью C). Именно поэтому нельзя пренебрегать паразитными емкостями при построении динамической модели мультивибратора при рассмотрении его колебаний [2]).

---

[1]) Не все паразитные параметры являются существенными для колебательных процессов в мультивибраторе. Если мы, к примеру, учтем одну из паразитных индуктивностей, указанных пунктиром на рис. 507, и не будем учитывать паразитных емкостей, то мы получим динамическую модель второго порядка, но по-прежнему «дефектную», «вырожденную», т. е. недостаточную даже для качественного объяснения работы мультивибратора (см. § 8 этой главы).

[2]) В § 8 гл. IV мы рассмотрели автоколебания мультивибратора, пользуясь «дефектной» моделью первого порядка, дополненной постулатом скачка сеточного напряжения u. Этот постулат скачка, по сути дела, является косвенной формой учета существенных паразитных параметров и получается как следствие динамики «доброкачественной» модели второго порядка, построенной с учетом хотя бы одной из указанных выше паразитных емкостей (см. § 4 этой главы, а также § 5 гл. VIII).

Все сказанное о мультивибраторе с одним RC-звеном относится в равной мере и ко всем другим системам, совершающим разрывные колебания. В этих системах, так же как и в мультивибраторе, сам характер колебаний обусловлен существенностью некоторых малых паразитных параметров на определенных этапах колебательного процесса. Поэтому рассмотрение систем с разрывными колебаниями, что является целью настоящей главы, невозможно без учета в той или иной форме по крайней мере некоторых существенных паразитных параметров этих систем.

Прежде чем переходить к изложению приближенных методов рассмотрения систем с разрывными колебаниями (в § 3) и к рассмотрению конкретных примеров таких систем (в последующих параграфах), мы поставим перед собой более частную задачу: попытаемся выяснить влияние малых параметров (членов дифференциальных уравнений с малыми коэффициентами) на устойчивость состояний равновесия.

§ 2. Малые параметры и устойчивость состояний равновесия [127]

Поскольку мы ограничиваемся сейчас рассмотрением вопроса об устойчивости состояний равновесия, мы можем пользоваться линейным приближением. Пусть вблизи состояния равновесия поведение системы (при пренебрежении малыми, паразитными параметрами) может быть описано линеаризованным уравнением n-го порядка:

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n x = 0. \tag{10.4}$$

При подстановке частного решения $x = Ae^{\lambda t}$ мы получим для λ характеристическое уравнение n-й степени:

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \tag{10.5}$$

Как известно, устойчивость состояния равновесия определяется знаками действительных частей корней этого уравнения; именно, состояние равновесия устойчиво, если все n корней отрицательны или имеют отрицательные действительные части.

Пусть введение в рассмотрение нового малого (например, паразитного) параметра приводит к повышению на единицу порядка дифференциального уравнения системы (другие случаи, когда порядок уравнения повышается сразу больше, чем на единицу, могут быть