

ражена на рис. 516 пунктиром). В этом случае характеристическое уравнение получается третьей степени и имеет вид:

$$\lambda^3 C_a L_a R_g + \lambda^2 [L_a (1 - SR_g) + C_a R_a R_g] + \\ + \lambda [R_a (1 - SR_g) + R_g] + \frac{1}{C} = 0$$

(здесь учтено, что  $C_a \ll C$ ). Условие устойчивости состояния равновесия при малых  $L_a$  и  $C_a$  запишется в виде:

$$R_a (1 - SR_g) + R_g > 0 \text{ и } L_a (1 - SR_g) + C_a R_a R_g > 0.$$

Следовательно, самовозбуждение схемы опять возможно и при  $1 < SR_g < 1 + \frac{R_g}{R_a}$ , именно, если паразитная индуктивность  $L_a$  достаточно велика:

$$L_a > \frac{C_a R_a R_g}{SR_g - 1} > C_a R_a^2.$$

Заметим, что при обычных значениях параметров мультивибратора ( $C_a \approx 10 \text{ пкФ}$ ,  $R_a \approx 10^8 \div 10^4 \text{ ом}$ ) величина  $C_a R_a^2 \approx 10 \div 10^3 \text{ микро-генри}$ , т. е. значительно больше обычно встречающихся паразитных индуктивностей анодной цепи. Поэтому такой мультивибратор будет возвращаться только при  $SR_g > 1 + \frac{R_a}{R_g}$ .

Заметим в заключение параграфа, что в том случае, когда под влиянием какого-либо малого параметра состояние равновесия системы является неустойчивым, скорость ухода системы из этого кажущегося устойчивым состояния в двух возможных случаях совершенно различна. Именно, в первом случае (практически наиболее интересном), когда малый параметр входит коэффициентом при старшей производной, новый корень характеристического уравнения  $\lambda_{n+1} = -\frac{a_0}{\mu}$ , т. е. величина корня, а значит и скорость ухода системы от состояния равновесия, тем больше, чем меньше параметр  $\mu$  (в пределе при  $\mu \rightarrow +0$  получаем уход мгновенным скачком).

Наоборот, во втором случае, когда малый параметр входит коэффициентом при интеграле, уход системы от состояния равновесия происходит медленным, «ползущим» движением (скорость ухода тем меньше, чем меньше параметр  $\mu$ ).

### § 3. Малые паразитные параметры и разрывные колебания

Все сказанное ранее относительно роли малых (паразитных) параметров в тех или иных колебательных системах можно перевести на язык фазовых представлений. Во всякой реальной системе, учитывая все новые и новые паразитные параметры, мы будем вводить

все большее и большее число степеней свободы данной системы. Вместе с тем все большим и большим становится число измерений фазового пространства, в котором мы сможем отображать поведение рассматриваемой системы (точнее, ее упрощенной динамической модели). Но так как при этом быстро возрастает и сложность математического рассмотрения поставленной задачи, то при изучении всякой колебательной системы мы не можем неограниченно вводить в рассмотрение эти новые степени свободы и должны ограничиться некоторым, обычно небольшим, числом независимых переменных, характеризующих состояние системы, выбирая их и связи между ними (уравнения) так, чтобы отобразить (качественно и в какой-то мере количественно) колебательные процессы в системе. Таким образом, при рассмотрении колебательной системы как дискретной мы считаем, что она обладает конечным, обычно небольшим, числом степеней свободы и, следовательно, ее состояния могут быть отображены в некотором фазовом пространстве с небольшим числом измерений.

Пусть движение динамической модели, полученной для рассматриваемой колебательной системы при учете некоторых малых (паразитных) параметров, отображается системой дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка:

$$\left. \begin{array}{l} \mu \dot{x}_i = F_i(x_1, \dots, x_s; y_1, \dots, y_{n'}), \\ \dot{y}_j = G_j(x_1, \dots, x_s; y_1, \dots, y_{n'}) \end{array} \right\}$$

( $i = 1, 2, \dots, s$ ;  $j = 1, 2, \dots, n'$ ;  $n = n' + s$ ), или в сокращенной (векторной) форме:

$$\mu \dot{x} = F(x; y), \quad \dot{y} = G(x; y), \quad (10.15)$$

где  $\mu$  — малый положительный параметр, обращающийся в нуль вместе с учтенными паразитными параметрами системы<sup>1)</sup>. Положив  $\mu = 0$ , т. е. пренебрегая этими паразитными параметрами, мы придем к еще более упрощенной динамической модели (порядка  $n'$ ):

$$F(x; y) = 0, \quad \dot{y} = G(x; y), \quad (10.16)$$

множество состояний которой составляет образ с меньшим числом измерений  $n'$  ( $n' < n$ ) и соответствует в «полном» фазовом пространстве  $x, y$  некоторому подпространству  $F$ , определяемому уравнением:

$$F(x; y) = 0.$$

<sup>1)</sup> Мы рассматриваем наиболее интересный случай, когда при учете новых малых (паразитных) параметров эти параметры появляются в уравнениях движения системы в виде малых коэффициентов при старших производных. Именно с этим случаем мы будем иметь дело при изучении систем, совершающих разрывные колебания.

Ниже мы будем считать функции  $F(x; y)$  и  $G(x; y)$  ограниченными и дифференцируемыми во всей интересующей нас области изменения переменных  $x, y$ . Функции  $F$  и  $G$  могут, вообще говоря, зависеть и от  $\mu$ , тогда мы будем полагать, что они стремятся к конечным пределам при  $\mu \rightarrow +0$ .

Очевидно, вопрос о том, являются ли учтенные малые паразитные параметры существенными для процессов в данной колебательной системе, иначе говоря, вопрос о том, можно ли изучать процессы в системе, пренебрегая этими параметрами, на языке фазовых представлений может быть сформулирован следующим образом.

В каких случаях движение изображающей точки системы (10.15) (в «полном»  $n$ -мерном фазовом пространстве  $x, y$ ) при достаточно малых значениях положительного параметра  $\mu$ , т. е. при достаточно малых значениях учтенных паразитных параметров, и в течение интересующих нас интервалов времени (обычно при  $0 < t < +\infty$ ) будет происходить в малой окрестности подпространства  $F$  и, следовательно, может быть удовлетворительно заменено движением изображающей точки в пределах самого подпространства  $F$  — образа с меньшим ( $n'$ ) числом измерений?

**1. Разбиение «полного» фазового пространства на траектории.** Для ответа на поставленный вопрос рассмотрим в общих чертах разбиение «полного» фазового пространства  $x, y$  на траектории системы (10.15) при достаточно малых значениях положительного параметра  $\mu$  [61]. Прежде всего рассмотрим область фазового пространства, которая лежит вне малой  $O(\mu^\alpha)$ -окрестности подпространства  $F$  ( $0 < \alpha < 1$ ), стягивающейся к  $F$  при  $\mu \rightarrow +0^1$ ). В этой области

$$|F(x; y)| \geq O(\mu^\alpha) \quad \text{и} \quad |\dot{x}| \geq O(\mu^{1-\alpha});$$

поэтому в ней при достаточно малых  $\mu$  имеют место «быстрые» движения изображающей точки, — тем более быстрые, чем меньше значение  $\mu$ , т. е. чем меньше значения паразитных параметров (при  $\mu \rightarrow +0$   $\dot{x} \rightarrow \infty$ ); эта область в дальнейшем будет называться *областью «быстрых» движений*<sup>2)</sup>. Так как в области «быстрых» движений  $\dot{y} = G(x; y)$  остаются ограниченными при  $\mu \rightarrow +0$ , а

$$\left| \frac{dy_j}{dx_i} \right| = \mu \left| \frac{G_j(x; y)}{F_j(x; y)} \right| \leq O(\mu^{1-\alpha}) \rightarrow 0 \text{ при } \mu \rightarrow +0,$$

то при быстрых изменениях переменных  $x$  на конечные величины (за малые промежутки времени  $\Delta t \leq O(\mu^{1-\alpha})$ ) переменные  $y$

<sup>1)</sup> Под  $O[g(\mu)]$ -окрестностью подпространства  $F$  мы будем понимать множество всех точек, расстояния которых до подпространства  $F$  не превышают некоторой величины порядка  $g(\mu)$ ; в рассматриваемом случае  $g(\mu) = \mu^\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ).

<sup>2)</sup> Областью «быстрых» движений является также и область, лежащая вне малой  $O(\mu \ln \frac{1}{\mu})$ -окрестности подпространства  $F$ , так как в области вне такой окрестности  $|F(x; y)| \geq O\left(\mu \ln \frac{1}{\mu}\right)$  и  $|\dot{x}| \geq O\left(\ln \frac{1}{\mu}\right) \rightarrow \infty$  при  $\mu \rightarrow +0$ .

изменяются лишь на малые величины порядка не более  $\mu^{1-a}$ , т. е. фазовые траектории в области «быстрых» движений (траектории «быстрых» движений) лежат вблизи  $s$ -мерных подпространств:

$$y = \text{const.}$$

Поэтому при достаточно малых  $\mu$  мы можем с некоторой степенью точности рассматривать движения изображающей точки в этой области (за малые интервалы времени  $\Delta t \leq O(\mu^{1-a})$ ) как *мгновенные скачки*, при которых переменные  $x$  изменяются «быстро», скачкообразно, а переменные  $y$  остаются неизменными. Соответственно, приближенные (но тем более точные, чем меньше  $\mu$ ) дифференциальные уравнения движения системы в области «быстрых» движений можно записать в следующем виде:

$$y \equiv y^0 = \text{const}, \quad \dot{x} = \frac{1}{\mu} F(x; y^0). \quad (10.17)$$

Таким образом, уравнения упрощенной модели (10.16), составленные при пренебрежении паразитными параметрами, здесь заведомо не пригодны для описания поведения системы. Эти уравнения (10.16) могут отображать законы движения системы (конечно, приближенно при достаточно малых  $\mu$ ) только в пределах малой  $O(\mu)$ -окрестности  $n'$ -мерного подпространства  $F$ , где  $|F(x; y)| \leq O(\mu)$  и где, следовательно, скорости изменения состояния системы (т. е. и  $\dot{x}$ , и  $\dot{y}$ ) остаются конечными при сколь угодно малых  $\mu$  (при  $\mu \rightarrow +0$ ).

## 2. Условие несущественности малых (паразитных) параметров.

В зависимости от того, как идут фазовые траектории «быстрых» движений вблизи  $n'$ -мерного подпространства  $F$ , возможны два основных случая.

А) Прежде всего возможно, что все траектории «быстрых» движений идут (при возрастании  $t$ ) внутрь некоторой малой окрестности подпространства  $F$ . Тогда изображающая точка, помещенная в начальный момент времени внутрь этой окрестности, будет в дальнейшем двигаться в ее пределах, т. е. вблизи  $n'$ -мерного подпространства  $F$ , поскольку нет траекторий, выходящих из этой окрестности. При этом движение изображающей точки будет сравнительно медленным (с ограниченными при  $\mu \rightarrow +0$  скоростями  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$ ) и будет подчиняться (с некоторой степенью точности, но тем точнее, чем меньше  $\mu$ ) уравнениям (10.16) [119, 42]; эти движения изображающей точки, для которых  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$  остаются ограниченными в течение конечных (не стремящихся к нулю) интервалов времени при  $\mu \rightarrow +0$ , будем называть ниже ради краткости «*медленными*», а малую  $O(\mu)$ -окрестность подпространства  $F$ , в которой они имеют место, областью «*медленных*» движений (в противоположность области «быстрых» движений). Таким образом, паразитные параметры, учтенные при составлении «полных» уравнений (10.15), в этом случае не явля-

ются существенными для процессов в рассматриваемой системе, начинаяющихся из состояний, совместных с уравнениями (10.16), при условии, конечно, что эти параметры достаточно малы.

Если же в начальный момент времени изображающая точка не находилась вблизи подпространства  $F$ , то она по соответствующей траектории «быстрого» движения придет внутрь области «медленных» движений и в дальнейшем будет двигаться в этой области. Иначе говоря, упрощенные уравнения (10.16), составленные при пренебрежении паразитными параметрами системы, вступят в силу во прошествии некоторого малого интервала времени  $\Delta t$ . Длительность этого интервала времени, очевидно, будет тем меньше, чем меньше начальное расстояние изображающей точки от подпространства  $F$  и чем меньше значение параметра  $\mu$  (т. е. чем меньше паразитные параметры системы), причем  $\Delta t \rightarrow +0$  при  $\mu \rightarrow +0$  (можно показать [42], что  $\Delta t \leq O(\mu \ln \frac{1}{\mu})$ ). В этом случае мы можем совсем отказаться от детального рассмотрения «быстрых» движений системы на начальном этапе с помощью уравнений (10.15) или приближенных уравнений (10.17) и постулировать, что представляющая точка в начальный момент времени сразу, скачком переходит в соответствующую точку  $n'$ -мерного подпространства  $F$ . Такой подход особенно целесообразен, если условия неизменности переменных  $u$  при скачке переменных  $x$  позволяют однозначно определить место, куда должна прийти изображающая точка в результате скачка. Если же последнее не выполняется, то для определения конечной точки скачка (по заданной начальной) требуется, по крайней мере, качественное рассмотрение хода фазовых траекторий «быстрых» движений (хотя бы при помощи приближенных дифференциальных уравнений (10.17)) или же привлечение дополнительных соображений.

Для получения аналитических выражений для условий несущественности малых (паразитных) параметров, учтенных при составлении уравнений (10.15), заметим, что точки  $n'$ -мерного подпространства  $F(x; y) = 0$  являются состояниями равновесия для приближенных уравнений «быстрых» движений (10.17) и поэтому поведение траекторий «быстрых» движений вблизи подпространства  $F$  (например, на расстояниях порядка  $\mu^a$  ( $0 < a < 1$ ) от этого подпространства) полностью определяется характером (устойчивостью) этих состояний равновесия. Введем новое, «быстрое» время

$$t' = \frac{t}{\mu}$$

(напомним еще раз, что параметр  $\mu > 0$ ); тогда приближенные дифференциальные уравнения «быстрых» движений (10.17) запишутся в виде:

$$\frac{dx}{dt'} = F(x; y), \quad y \equiv \text{const.}$$

Линеаризуя эти уравнения в окрестности точки  $(\bar{x}; y)$  подпространства  $F$ , получим систему уравнений первого приближения:

$$\frac{dx_i}{dt'} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \xi_k \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

где  $\xi_i = x_i - \bar{x}_i$ , с характеристическим уравнением

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \lambda & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_s} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \lambda & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_s}{\partial x_1} & \frac{\partial F_s}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_s}{\partial x_s} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (10.18)$$

Если все  $s$  корней характеристического уравнения (10.18) имеют отрицательные действительные части при любых  $x, y$ , удовлетворяющих уравнениям  $F(x; y) = 0$ , то точки подпространства  $F$  являются устойчивыми состояниями равновесия для приближенных уравнений «быстрых» движений (10.17) и все траектории «быстрых» движений вблизи подпространства  $F$  входят при возрастаании  $t$  в малую окрестность последнего. Следовательно, в этом (и только в этом) случае *малые паразитные параметры, учтенные при составлении уравнений (10.15), не являются существенными, по крайней мере, для процессов, начинающихся из состояний, совместных с приближенными уравнениями «медленных» движений (10.16)*<sup>1</sup>). Таким образом, условия несущественности малых (паразитных) параметров могут быть сформулированы, например, в виде условий Раута — Гурвица [95, 99] для уравнения (10.18).

Отметим два частных случая, которые понадобятся нам в дальнейшем:

1) если в «полной» системе уравнений (10.15) имеется только одно уравнение с малым коэффициентом при производной (т. е. если  $s = 1$ ), то уравнение (10.18) будет уравнением первой степени

$$F'_x(x; y) - \lambda = 0$$

и условие несущественности малого параметра сводится к неравенству

$$F'_x(x; y) < 0, \quad (10.19)$$

выполняемому во всех точках подпространства  $F(x; y) = 0$ ;

<sup>1)</sup> Строгое доказательство сформулированного условия несущественности малых параметров в уравнениях (10.15) читатель может найти в работах И. С. Градштейна и А. Н. Тихонова [49, 50, 119].

2) если в системе (10.15) имеются два уравнения с малыми коэффициентами при производных (т. е. если  $s = 2$ ), то характеристическое уравнение (10.18) примет вид:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \lambda & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right) \lambda + \frac{\partial (F_1, F_2)}{\partial (x_1, x_2)} = 0,$$

а условием несущественности малых параметров будет выполнение (во всех точках подпространства  $F$ ) двух неравенств:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} < 0 \quad \text{и} \quad D = \frac{\partial (F_1, F_2)}{\partial (x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} > 0. \quad (10.19a)$$

Нетрудно видеть, что сформулированное условие несущественности малых паразитных параметров (10.19) выполняется, в частности, для рассмотренных выше  $RC$ - и  $RL$ -контуров (рис. 502 и 503) по отношению к паразитной индуктивности  $L_0$  (в  $RC$ -контуре) и к паразитной емкости  $C_0$  (в  $RL$ -контуре). Рассмотрим для примера еще раз  $RC$ -контур (рис. 502) с малой паразитной индуктивностью  $L_0$ . После введения безразмерного времени  $t' = \frac{t}{RC}$  мы приведем уравнение (10.1a) к виду (10.15):

$$\mu \frac{di}{dt'} = -q - i = F(q, i), \quad \frac{dq}{dt'} = i,$$

где  $\mu = \frac{L_0}{CR^2}$  — малый положительный параметр (если паразитная индуктивность  $L_0 \ll CR^2$ ). Следовательно, условие несущественности малой паразитной индуктивности  $L_0$ :  $F'_i < 0$ , выполняется во всех точках фазовой прямой  $q + i = 0$  упрощенной системы (с  $\mu = 0$ ), поскольку  $F'_i = -1 < 0$ .

При малых  $L_0$  (т. е. при  $L_0 \ll CR^2$ ) вне линии  $q + i = 0$  происходят «скачки» силы тока  $i$  при почти неизменном заряде  $q$  конденсатора, причем все траектории «быстрых» движений на фазовой плоскости  $q, i$  идут в малую окрестность прямой  $q + i = 0$ , которая является (на плоскости  $q, i$ ) фазовой линией  $RC$ -контура при пренебрежении малой паразитной индуктивностью  $L_0$  (рис. 518).

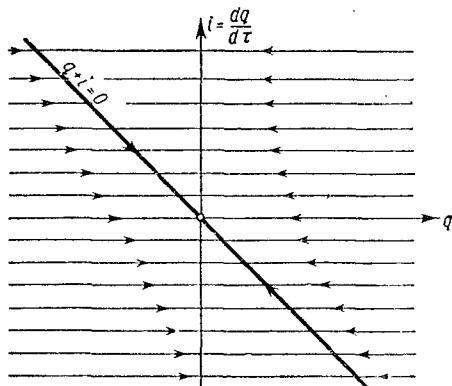


Рис. 518.

Б) Возможен и другой случай, когда условие несущественности малых паразитных параметров не выполняется, по крайней мере, на

некоторой части  $n'$ -мерного подпространства  $F$ ; будем обозначать ее ниже, ради краткости, через  $F^-$ . Тогда среди корней  $\lambda$  характеристического уравнения (10.18), соответствующих точкам подпространства  $F^-$ , имеются корни с положительными действительными частями, сами точки подпространства  $F^-$  являются неустойчивыми состояниями равновесия для приближенных уравнений «быстрых» движений (10.17) и в «полном» фазовом пространстве  $x$ , у имеются траектории «быстрых» движений, уходящие из малой окрестности подпространства  $F^-$  (например, из  $O(\mu^a)$ -окрестности, где  $0 < a < 1$ ). Тогда изображающая точка не будет оставаться вблизи этой части  $F^-$   $n'$ -мерного подпространства  $F$  и будет выходить в область «быстрых» движений (в область «скаков» переменных  $x$ ), где, как мы уже указывали, уравнения (10.16), составленные при пренебрежении паразитными параметрами, совершенно не отображают законов движения системы. Следовательно, в этом случае существуют такие движения системы, которые начинаются из состояний, совместных с уравнениями (10.16), т. е. из состояний, принадлежащих  $n'$ -мерному подпространству  $F$ , и в то же время не могут быть рассмотрены с помощью уравнений (10.16), т. е. без учета паразитных параметров, сколь бы малы они ни были. Таким образом, в рассматриваемом случае сколь угодно малые паразитные параметры, учтенные при составлении «полных» уравнений (10.15), являются *существенными* для процессов в изучаемой физической системе.

Рассмотрим для примера еще раз при малых  $C$  и при малых  $L$  схему с вольтовой дугой (рис. 509), колебания которой описываются при учете емкости  $C$  и индуктивности  $L$  уравнениями (10.11) (см. § 2, п. 1 этой главы). Малая

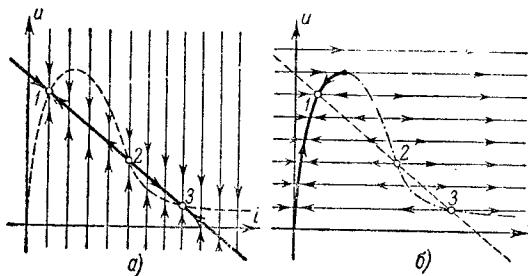


Рис. 519.

емкость  $C$  в схеме вообще не является существенной, так как всюду на фазовой линии схемы с  $C = 0$ , т. е. на прямой

$$F = \frac{E - u}{R} - i = 0,$$

выполнено условие несущественности малой емкости  $C$ :

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -\frac{1}{R} < 0,$$

Разбиение фазовой плоскости  $i$ ,  $u$  на траектории для предельного случая  $C \rightarrow +0$  дано на рис. 519, а: все траектории «быстрых» движений («скаков» напряжения  $u$  при  $i = \text{const}$ ) идут на фазовую прямую  $u = E - Ri$  системы без емкости.

Однако малая индуктивность уже является параметром, существенным для процессов в схеме. В самом деле, фазовой линией схемы без индуктивности является (на плоскости  $i$ ,  $u$ ) характеристика дуги — линия  $u = \psi(i)$ , и условие несущественности сколь угодно малой индуктивности оказывается невыполненным на всем падающем участке этой характеристики, так как там

$$\frac{\partial}{\partial i} [u - \psi(i)] = -\psi'(i) > 0.$$

Состояния схемы на этом участке неустойчивы по отношению к «быстрым» движениям (к скаккам силы тока  $i$  при неизменном напряжении  $u$ , если  $L \rightarrow +0$ ), т. е. траектории «быстрых» движений отходят от этого падающего участка характеристики дуги (рис. 519, б). Таким образом, индуктивность  $L$  (даже сколь угодно малая) является параметром, существенным для колебательных процессов в схеме с вольтовой дугой, и без ее учета (или без учета параметров, ей эквивалентных, например инерционности дугового разряда) рассмотрение поведения схемы не может дать результатов, хотя бы качественно совпадающих с экспериментальными данными.

**3. Разрывные колебания** [61, 94, 105, 114, 158, 159]. Весьма интересным, особенно для теории систем с разрывными колебаниями, является тот случай, когда  $n'$ -мерный образ  $F$ :  $F(x; y) = 0$  — фазовое пространство «вырожденной» модели системы, построенной при пре-небрежении всеми паразитными параметрами, распадается на две части: на часть  $F^+$ , в точках которой условие несущественности тех или иных малых (паразитных) параметров выполняется (все корни характеристического уравнения (10.18) имеют отрицательные действительные части), и на часть  $F^-$ , где это условие не выполнено. Тогда *только малая  $O(\mu)$ -окрестность подпространства  $F^+$*  (в «полном»  $n$ -мерном фазовом пространстве  $x, y$ ) является *областью «медленных» движений изображающей точки*: только там скорости изменения состояния системы (т. е.  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$ ) остаются ограниченными в течение конечных интервалов времени при  $\mu \rightarrow +0$ . Поэтому, если рассматриваемые паразитные параметры достаточно малы (т. е. если  $\mu \ll 1$ ), мы можем пользоваться для описания «медленного» движения изображающей точки вблизи  $F^+$  приближенными уравнениями «медленных» движений системы — уравнениями (10.16), совпадающими с уравнениями «вырожденной» системы, а само движение можем считать происходящим (также приближенно) в пределах этой части  $F^+$  подпространства  $F(x; y) = 0$ .

Прежде чем переходить к рассмотрению разрывных колебаний, сделаем одно замечание о границе подпространств  $F^+$  и  $F^-$  (мы будем обозначать ее через  $\gamma$ ). Координаты  $x, y$  точек подпространства  $F$  являются параметрами характеристического уравнения (10.18), в силу чего корни  $\lambda$  этого уравнения зависят (и притом непрерывно) от координат  $x, y$ . Так как в точках подпространства  $F^+$  уравнение (10.18) не имеет ни одного корня с положительной действительной

частью, то при переходе точки  $(x; y)$  через границу  $\gamma$  из подпространства  $F^+$  в подпространство  $F^-$  среди корней характеристического уравнения (10.18) появляется или один действительный положительный корень или же одна пара комплексно-сопряженных корней с положительной действительной частью (появление при переходе через границу  $\gamma$  более двух корней с положительной действительной частью является случаем особенным, «негрубым» и реализуется только при специальном подборе функций  $F(x; y)$ ).

Ниже мы будем рассматривать только первый случай. Тогда характеристическое уравнение (10.18) для точек граничной поверхности  $\gamma$  будет иметь один нулевой корень (остальные  $s - 1$  корней имеют отрицательные действительные части), вследствие чего свободный член этого уравнения

$$D(x; y) = \frac{\partial (F_1, F_2, \dots, F_s)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_s)}$$

равен нулю, т. е. граница  $\gamma$  подпространств  $F^+$  и  $F^-$  принадлежит  $n' - 1$ -мерной поверхности:

$$F_i(x; y) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad D(x; y) = 0. \quad (10.20)$$

Дифференцируя уравнения  $F_i(x; y) = 0$  по  $t$  и используя уравнения (10.16), мы получим (для «медленных» движений):

$$\sum_{j=1}^s \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \sum_{k=1}^{n'} \frac{\partial F_i}{\partial y_k} G_k = 0$$

или, разрешая относительно  $\dot{x}_j$ ,

$$\dot{x}_j = \frac{D_j(x; y)}{D(x; y)},$$

где  $D_j(x; y)$  — детерминант, образованный из якобиана  $D(x; y)$  заменой элементов столбца с номером  $j$  на  $-\sum_{k=1}^{n'} \frac{\partial F_i}{\partial y_k} G_k$ . Таким образом, точки граничной поверхности  $\gamma$ , на которой  $D(x; y)$  обращается в нуль, являются для уравнений «вырожденной» модели (для уравнений (10.16)) точками бесконечно больших скоростей изменения переменных  $x$  и точками стыка траекторий этих уравнений, так как при переходе через поверхность  $\gamma$   $D(x; y)$ , а следовательно и все  $\dot{x}$ , изменяют знак<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Если при переходе точки  $(x; y)$  из  $F^+$  в  $F^-$  среди корней характеристического уравнения появляется пара комплексно-сопряженных корней с положительной действительной частью (это возможно только при  $s \geq 2$ ), то для точек границы между  $F^+$  и  $F^-$  уравнение (10.18) имеет пару чисто мнимых корней, отличающихся друг от друга знаками; в этом случае, как известно, обращается в нуль предпоследний детерминант Гурвица  $\Delta_{s-1}$ , составленный

Предположим теперь, что в силу динамики «вырожденной» модели, т. е. в силу уравнений (10.16), изображающая точка, двигаясь в пространстве  $F^+$ , придет на граничную поверхность  $\gamma$ . Тогда изображающая точка не сможет двигаться далее в подпространстве  $F$  (точнее, вблизи  $F$  при малых  $\mu$ ), — она «срывается» в область «быстрых» движений, где переменные  $x$  изменяются при малых  $\mu$  «быстро» (сколь угодно быстро при  $\mu \rightarrow +0$ ) по закону, приближенно отображаемому системой уравнений (10.17), но не уравнениями (10.16).

Пусть в  $s$ -мерном подпространстве  $y = \text{const}$ , включая бесконечно удаленные точки, нет других «элементов притяжения» ( $\omega$ -предельных траекторий), кроме устойчивых состояний равновесия, принадлежащих, как мы видели, подпространству  $F^+$ . Тогда траектории «быстрых» движений «быстро» (т. е. через интервалы времени  $\Delta t \ll O(\mu \ln \frac{1}{\mu}) \rightarrow +0$  при  $\mu \rightarrow +0$ ) возвращаются снова в область «медленных» движений — в малую  $O(\mu)$ -окрестность подпространства  $F^+$  и в «полном» фазовом пространстве существуют траектории, проходящие через области «медленных» и «быстрых» движений. В пределе, при  $\mu \rightarrow +0$ , каждая такая траектория будет состоять из чередующихся кусков двух типов: из отрезков траекторий «мёдленных» движений, лежащих в  $n'$ -мерном подпространстве  $F^+$  и проходимых изображающей точкой в соответствии с уравнениями (10.16) за конечные интервалы времени, и из отрезков траекторий «быстрых» движений, каждый из которых лежит в  $s$ -мерном подпространстве  $y = \text{const}$  и пробегается в соответствии с уравнениями (10.17) мгновенно. «Медленное» движение системы переходит в «быстрое» на граничной поверхности  $\gamma$ :

$$F(x; y) = 0, \quad D(x; y) = 0,$$

причем ниже мы будем полагать, что из каждой точки этой поверхности в область «быстрых» движений выходит единственная траектория уравнений (10.17) с соответствующими значениями переменных  $y$ , т. е. единственная траектория «быстрого» движения системы<sup>1)</sup>.

из коэффициентов уравнения (10.18). Таким образом, в этом случае граница между подпространствами  $F^+$  и  $F^-$  будет принадлежать другой  $n' - 1$ -мерной поверхности:

$$F(x; y) = 0, \quad \Delta_{s-1} = 0.$$

Точки этой границы, очевидно, не являются для уравнений «вырожденной» модели (для уравнений (10.16)) ни точками бесконечно больших скоростей изменения переменных  $x$ , ни точками стыка фазовых траекторий.

<sup>1)</sup> Для приближенных уравнений (10.17) точки граничной поверхности  $\gamma$  являются сложными особыми точками: для них один корень характеристического уравнения (10.18) равен нулю, а остальные корни имеют отрицательные действительные части. В основном случае (в случае «первой степени негрубости») эти точки аналогичны особым точкам типа седло-узел на фазовой плоскости и из каждой из них (или, точнее, из сколь угодно малой окрестности каждой из них) выходит единственная траектория уравнений (10.17).

Это дает нам возможность однозначного построения фазовых траекторий системы в «полном» фазовом пространстве с помощью более простых, приближенных уравнений (10.16) и (10.17). При этом можно доказать, что *траектории системы уравнений* (10.15) при достаточно малых значениях положительного параметра  $\mu$  действительно идут вблизи траекторий, построенных при помощи приближенных уравнений (10.16) и (10.17) указанным выше способом<sup>1)</sup>.

Рассмотренные выше траектории и являются математическими образами *разрывных колебаний*, к которым близки колебания в изучаемых системах при достаточно малых значениях паразитных параметров. Среди этих траекторий возможны и замкнутые траектории — *разрывные предельные циклы*, которые, очевидно, соответствуют периодическим разрывным колебаниям (*разрывным автоколебаниям*).

Таким образом, исследование разрывных колебаний (точнее, колебаний, близких к разрывным при достаточно малых значениях паразитных параметров системы, т. е. при  $0 < \mu \ll 1$ ) можно проводить, и тем точнее, чем меньше  $\mu$ , при помощи приближенных уравнений «медленных» движений системы

$$F(x; y) = 0, \quad \dot{y} = G(x; y) \quad (10.16)$$

в области «медленных» движений, т. е. в той части  $F^+$  подпространства  $F(x; y) = 0$ , в которой выполнено условие несущественности учтенных паразитных параметров, и при помощи приближенных уравнений кратковременных «быстрых» движений (мгновенных скачков переменных  $x$ )

$$y = \text{const}, \quad \mu \dot{x} = F(x; y) \quad (10.17)$$

в остальной части «полного» фазового пространства  $x, y$ .

Сделаем одно небольшое замечание по поводу так называемых «условий скачка». Так как при мгновенном скачке переменных  $x$  (при  $\mu \rightarrow +0$ ) переменные  $y$  не изменяются и так как и начальная точка скачка  $(x^-, y^-)$  (точка граничной поверхности  $\gamma$ ) и концевая точка скачка  $(x^+, y^+)$  лежат в одном и том же подпространстве  $F$ , то их координаты, очевидно, связаны между собой следующими уравнениями:

$$\left. \begin{array}{l} F(x^-, y^-) = 0, \quad D(x^-, y^-) = 0, \\ y^+ = y^-, \quad F(x^+, y^+) = 0, \end{array} \right\} \quad (10.21)$$

которые обычно и называются условиями скачка. Во многих задачах мы знаем заранее (например, на основании тех или иных экспери-

<sup>1)</sup> Доказательство этого утверждения (см., например, [105]) выходит за рамки настоящей книги. Для периодических движений систем второго порядка доказательство будет дано в § 4 этой главы.

ментальных данных), что «быстрые» движения системы «быстро» переходят снова в «медленные», а уравнений (10.21) достаточно для однозначного определения той точки  $(x^+, y^+)$  области «медленного» движения, куда изображающая точка придет в результате мгновенного скачка из заданной точки  $(x^-, y^-)$ . В таких задачах мы можем заменить детальное рассмотрение хода траекторий «быстрых» движений (траекторий приближенных уравнений (10.17)) введением постулата скачка: указанием точек  $n'$ -мерного фазового пространства «вырожденной» системы, где «медленные» движения системы невозможны и откуда, следовательно, начинаются скачки изображающей точки (т. е. указанием области  $F^-$  и ее границы  $\gamma$ ), и указанием «закона скачка»

$$y^+ = y^-, \quad F(x^-, y^-) = 0, \quad F(x^+, y^+) = 0,$$

позволяющего однозначно определить концевую точку скачка по заданной начальной<sup>1)</sup>). Этим приемом мы будем часто пользоваться при рассмотрении разрывных колебаний в конкретных физических системах.

Обычно условия неизменности переменных  $y$  при мгновенном скачке переменных  $x$  имеют ясный физический смысл и могут быть получены без составления уравнений движения системы с учетом тех или иных существенных паразитных параметров. Например, в электрических системах эти условия обычно имеют смысл неизменности при мгновенных скачках состояния системы — напряжений на конденсаторах или силы тока в индуктивностях схемы — и легко получаются из дополнительного предположения об ограниченности токов и напряжений в электрических системах. Однако определение (теоретическое, без обращения к экспериментальным данным) множества точек фазового пространства, из которых начинаются скачки, а также выяснения вопроса, являются ли «быстрые» движения кратковременными и переходят ли они снова в «медленные» движения, требует составления дифференциальных уравнений системы с учетом хотя бы некоторых малых (паразитных) параметров, существенных во время «быстрых» движений системы, требует обращения к уравнению (10.17).

Рассмотрение дифференциальных уравнений скачков (10.17) особенно необходимо в тех задачах о разрывных колебаниях, в которых условия скачка (10.21) допускают несколько концевых точек скачка (такова, например, задача о разрывных колебаниях связанных мультивибраторов [37]). В таких задачах рассмотрение хода траекторий скачков на основании приближенных уравнений (10.17) снимает эту неоднозначность без введения каких-либо дополнительных (и часто весьма искусственных) предположений и гипотез.

---

<sup>1)</sup> Напомним, что начальные точки скачков — точки граничной поверхности  $\gamma$  — в рассматриваемом нами случае являются точками стыка фазовых траекторий уравнений (10.16).

В заключение параграфа остановимся кратко на том случае, когда приближенные уравнения (10.17) (при  $y = \text{const}$ ) имеют  $\omega$ -предельные траектории, отличные от устойчивых состояний равновесия, имеют, например, устойчивое периодическое или квазипериодическое решение

$$x = x^* \left( \frac{t}{\mu}, y \right) \quad (10.22)$$

(переменные  $y$  в этом решении, как и в уравнениях (10.17), рассматриваются как постоянные параметры); очевидно, этот случай может иметь место только при  $s \geq 2$ , т. е. при условии, что малый параметр при производных имеется не менее чем в двух уравнениях системы (10.15). Теперь в отличие от случая разрывных колебаний, рассмотренного выше, «быстрые» движения системы существуют не кратковременно, а в течение конечных, не стремящихся к нулю при  $\mu \rightarrow +0$  интервалов времени  $t$  или даже сколько угодно долго. Поэтому утверждение, что переменные  $y$  не изменяются (или, точнее, изменяются мало) за время «быстрого» движения системы, уже не является правильным. Для получения (приближенного) закона изменения переменных  $y$  во время «быстрого» периодического (или квазипериодического) движения (10.22) подставим это решение уравнений (10.17) во вторые уравнения (10.15); тогда получим:

$$\dot{y} = G \left[ x^* \left( \frac{t}{\mu}, y \right); y \right] \quad (10.23)$$

или после введения «быстрого» времени  $t' = \frac{t}{\mu}$ :

$$\frac{dy}{dt'} = \mu G [x^*(t', y); y]. \quad (10.23a)$$

Так как переменные  $y$  являются медленно меняющимися функциями «быстрого» времени  $t'$   $\left[ \frac{dy}{dt'} = O(\mu) \right]$ , то для приближенного решения полученной неавтономной системы уравнений (10.23a) можно применить «метод усреднения», использованный нами в методе Ван-дер-Поля (см. § 2 и 3 гл. IX). Именно, решение уравнений (10.23a) при малых  $\mu$  близко к решению «укороченных» уравнений, получаемых путем усреднения правых частей по явно входящему времени:

$$\frac{dy}{dt'} = \mu \bar{G}(y) \quad (10.24)$$

или

$$\dot{y} = \bar{G}(y), \quad (10.24a)$$

где  $\bar{G}(y)$  — усредненные по  $t'$  функции  $G[x^*(t', y); y]$  или, что то же самое, постоянные составляющие разложений Фурье этих функций по явно входящему  $t'$ . Интегрируя эти «укороченные» уравнения, мы и получим приближенный (но тем более точный, чем меньше  $\mu$ ) закон изменения переменных  $y$ :

$$y = y^*(t),$$

и уточненный закон изменения переменных  $x$ :

$$x = x^* \left[ \frac{t}{\mu}, y^*(t) \right] \quad (10.22a)$$

во время «быстрого» движения системы («медленное» изменение переменных  $y$  во время «быстрого» движения может привести, в частности, к его прекращению).

«Быстрые» движения, продолжающиеся конечные (или бесконечно большие) интервалы времени  $t$ , очевидно, отображают высокочастотное (в частности,

паразитное) возбуждение тех или иных систем. Они могут получаться также и в том случае, когда при переходе точки  $(x; y)$  из подпространства  $F^+$  в подпространство  $F^-$  среди корней характеристического уравнения (10.18) появляется пара комплексно-сопряженных корней с положительной действительной частью (см. примечание на стр. 754). Примером такой системы может служить ламповый генератор с автоматическим смещением, в котором при больших постоянных временах цепи автоматического смещения получается прерывистая генерация [48, 53, 57, 109].

Затем, что рассмотренный сейчас метод, очевидно, включает в себя как частный случай приближенный метод изучения разрывных колебаний, изложенный выше.

#### § 4. Разрывные колебания в системах второго порядка

Для иллюстрации сказанного в § 3 рассмотрим более подробно разрывные колебания в динамической системе, движение которой описывается двумя дифференциальными уравнениями первого порядка вида:

$$\begin{cases} \mu \dot{x} = F(x, y), \\ \dot{y} = G(x, y), \end{cases} \quad (10.15a)$$

где  $F(x, y)$  и  $G(x, y)$  — однозначные непрерывные функции, имеющие непрерывные частные производные, а  $\mu$  — малый положительный параметр (в такой системе, как указывалось выше, «быстрые» движения, продолжающиеся конечные или бесконечно большие интервалы времени, невозможны). Ниже мы будем считать, что фазовой поверхностью рассматриваемой системы является обычная (декартова) плоскость  $x, y$ .

Фазовым пространством «вырожденной» системы (с  $\mu = 0$ ) будет непрерывная линия  $F$ , определяемая на плоскости  $x, y$  уравнением

$$F(x, y) = 0.$$

Только в ее малой окрестности (с размерами порядка  $\mu$ ) фазовая скорость изображающей точки будет ограниченной при  $\mu \rightarrow +0$ . Наоборот, вне малой окрестности линии  $F$   $\dot{x} \rightarrow \infty$  при  $\mu \rightarrow +0$  (а  $\dot{y}$  остается ограниченной) и  $\frac{dy}{dx} = \mu \frac{G(x, y)}{F(x, y)} \rightarrow 0^1$ , т. е. там фазовые траектории системы близки при малых  $\mu$  к прямым  $y = \text{const}$  и по ним изображающая точка движется с большими скоростями изменения  $x$ . Приближенными (тем более точными, чем меньше  $\mu$ )

---

<sup>1)</sup> Например, вне  $\sqrt{\mu}$ -окрестности линии  $F$   $|\dot{x}| \geq O(\mu^{-\frac{1}{2}}) \rightarrow \infty$  и  $\left| \frac{dy}{dx} \right| \leq O\left(\mu^{-\frac{1}{2}}\right) \rightarrow 0$  при  $\mu \rightarrow +0$ .