

паразитное) возбуждение тех или иных систем. Они могут получаться также и в том случае, когда при переходе точки  $(x; y)$  из подпространства  $F^+$  в подпространство  $F^-$  среди корней характеристического уравнения (10.18) появляется пара комплексно-сопряженных корней с положительной действительной частью (см. примечание на стр. 754). Примером такой системы может служить ламповый генератор с автоматическим смещением, в котором при больших постоянных временах цепи автоматического смещения получается прерывистая генерация [48, 53, 57, 109].

Затем, что рассмотренный сейчас метод, очевидно, включает в себя как частный случай приближенный метод изучения разрывных колебаний, изложенный выше.

#### § 4. Разрывные колебания в системах второго порядка

Для иллюстрации сказанного в § 3 рассмотрим более подробно разрывные колебания в динамической системе, движение которой описывается двумя дифференциальными уравнениями первого порядка вида:

$$\begin{cases} \mu \dot{x} = F(x, y), \\ \dot{y} = G(x, y), \end{cases} \quad (10.15a)$$

где  $F(x, y)$  и  $G(x, y)$  — однозначные непрерывные функции, имеющие непрерывные частные производные, а  $\mu$  — малый положительный параметр (в такой системе, как указывалось выше, «быстрые» движения, продолжающиеся конечные или бесконечно большие интервалы времени, невозможны). Ниже мы будем считать, что фазовой поверхностью рассматриваемой системы является обычная (декартова) плоскость  $x, y$ .

Фазовым пространством «вырожденной» системы (с  $\mu = 0$ ) будет непрерывная линия  $F$ , определяемая на плоскости  $x, y$  уравнением

$$F(x, y) = 0.$$

Только в ее малой окрестности (с размерами порядка  $\mu$ ) фазовая скорость изображающей точки будет ограниченной при  $\mu \rightarrow +0$ . Наоборот, вне малой окрестности линии  $F$   $\dot{x} \rightarrow \infty$  при  $\mu \rightarrow +0$  (а  $\dot{y}$  остается ограниченной) и  $\frac{dy}{dx} = \mu \frac{G(x, y)}{F(x, y)} \rightarrow 0^1$ , т. е. там фазовые траектории системы близки при малых  $\mu$  к прямым  $y = \text{const}$  и по ним изображающая точка движется с большими скоростями изменения  $x$ . Приближенными (тем более точными, чем меньше  $\mu$ )

<sup>1)</sup> Например, вне  $\sqrt{\mu}$ -окрестности линии  $F$   $|\dot{x}| \geq O(\mu^{-\frac{1}{2}}) \rightarrow \infty$  и  $\left| \frac{dy}{dx} \right| \leq O\left(\mu^{-\frac{1}{2}}\right) \rightarrow 0$  при  $\mu \rightarrow +0$ .

уравнениями этих «быстрых» движений системы по траектории, близкой к прямой  $y \equiv y^0 = \text{const}$ , будут:

$$y \equiv y^0 = \text{const}, \quad \mu \dot{x} = F(x, y^0) \quad (10.17a)$$

(эти уравнения отображают динамику «быстрых» движений системы только в области «быстрых» движений, т. е. только вне малой окрестности линии  $F$ ). Для этих приближенных уравнений точки пересечения прямой  $y \equiv y^0 = \text{const}$  и линии  $F$  являются особыми точками (устойчивыми, если  $F'_x < 0$ , и неустойчивыми, если  $F'_x > 0$ ) и определяют поэтому разбиение прямой  $y \equiv y^0 = \text{const}$  на траектории уравнения (10.17a). Если при достаточно больших  $|x|$  знак функции  $F(x, y)$  противоположен знаку  $x$ , то траектории «быстрых» движений идут из бесконечности и от участков  $F^-$  линии  $F(x, y) = 0$ , на которых  $F'_x(x, y) > 0$ , к тем участкам  $F^+$  той же линии, на которых  $F'_x(x, y) < 0$ . Поэтому «медленные» движения системы (с ограниченными  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$  в течение конечных интервалов времени при  $\mu \rightarrow +0$ ) будут происходить только в малых окрестностях (с размерами порядка  $\mu$ ) участков  $F^+$ :

$$F(x, y) = 0, \quad F'_x(x, y) < 0$$

и будут приближенно отображаться уравнениями:

$$F(x, y) = 0, \quad \dot{y} = G(x, y), \quad (10.16a)$$

т. е. уравнениями «вырожденной» системы (с  $\mu = 0$ ).

В предельном случае  $\mu \rightarrow +0$  мы получим следующее разбиение плоскости  $x, y$  на траектории: вся плоскость (вне линии  $F$ ) заполнена траекториями «быстрых», скачкообразных движений системы — траекториями  $y = \text{const}$ , идущими к линии  $F^+$  (согласно уравнению (10.17a) изображающая точка «скачет» вправо, т. е.  $\dot{x} \rightarrow +\infty$ , в области  $F(x, y) > 0$  и влево, т. е.  $\dot{x} \rightarrow -\infty$ , в области  $F(x, y) < 0$ ), а сама линия  $F^+$  является траекториями «медленных» движений, вдоль которых изображающая точка двигается с ограниченной фазовой скоростью (с ограниченными  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$  и в соответствии с уравнением (10.16a)).

Пусть на линии  $F$  имеются как участки  $F^+$  (на них  $F'_x(x, y) < 0$ ), так и участки  $F^-$  (на последних  $F'_x(x, y) > 0$ ). Обозначим через  $\gamma$  граничные точки этих участков линии  $F$ ; в этих точках, очевидно,

$$F'_x(x, y) = 0$$

и касательная к линии  $F$  горизонтальна<sup>1)</sup>. Если изображающая точка системы, «медленно» двигаясь по траектории  $F^+$ , приходит в одну

<sup>1)</sup> Здесь и ниже мы считаем, что в точках  $\gamma$   $F'_y(x, y) \neq 0$ , т. е. что эти точки не являются особыми точками кривой  $F$ .

Дифференцируя  $F(x, y) = 0$  по  $t$  и используя дифференциальное уравнение (10.16a), мы получим, что во время «медленного» движения  $F'_x \dot{x} + F'_y \dot{G} = 0$ ,

из точек  $\gamma$ , то далее она выходит в область «быстрых» движений и двигается («быстро», скачком) по выходящей из этой точки траектории «быстрого» движения  $y = \text{const}$ , пока не придет снова на линию «медленного» движения  $F^+$ . В этом случае в системе будут происходить разрывные колебания, т. е. колебания, состоящие из чередующихся «медленных» (с ограниченными  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$  при  $\mu \rightarrow +0$ ) и «быстрых», скачкообразных (с  $\dot{x} \rightarrow \infty$  при  $\mu \rightarrow +0$ ) движений.

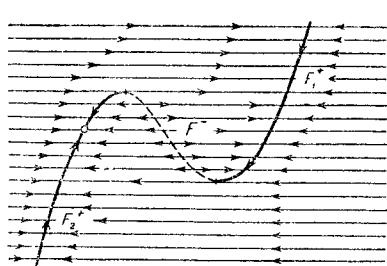


Рис. 520.

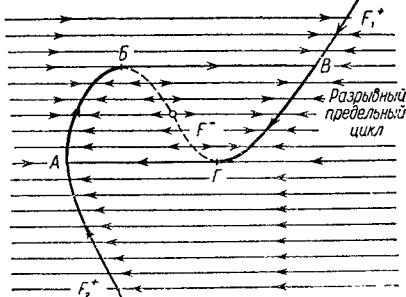


Рис. 521.

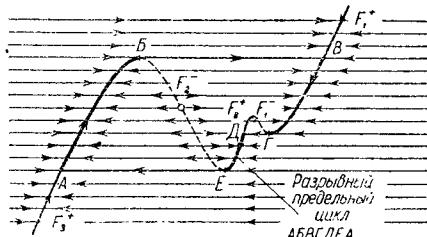


Рис. 522.

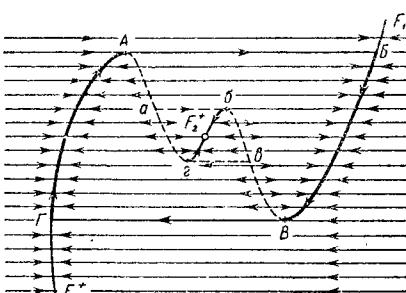


Рис. 523.

Несколько примеров разбиений фазовой плоскости системы уравнений (10.15а) на траектории в предельном случае  $\mu \rightarrow +0$  приведено на рис. 520—523. На рис. 520 изображен тот случай, когда на линии «медленных» движений (на линии  $F_2^+$ ) имеется устойчивое состояние равновесия системы, которое и устанавливается после

т. е.  $\dot{x} = -\frac{F'_y G}{F'_x}$ . Поэтому для уравнений «вырожденной» модели (для уравнений (10.16а)) точки  $\gamma$  являются точками, в которых  $\dot{x}$  обращается в бесконечность и которые являются точками стыка траекторий (при переходе через эти точки  $\dot{x}$  изменит знак). Последнее справедливо и в тех случаях, когда  $F'_x(x, y)$  имеет разрыв непрерывности в точках  $\gamma$ , что обычно получается при кусочно-линейных уравнениях системы.

нескольких колебаний. Фазовые портреты, изображенные на рис. 521, 522 и 523, содержат *разрывные предельные циклы*, т. е. такие замкнутые кривые, которые состоят из кусков траекторий «медленных» движений (на линии  $F^+$ ) и кусков траекторий «быстрых» движений (скачков)  $y = \text{const}$ , пробегаются изображающей точкой (в соответствии с уравнениями (10.16а) и (10.17а)) периодически и соответствуют поэтому периодическим разрывным колебаниям системы (разрывным автоколебаниям).

На рис. 523 изображено разбиение фазовой плоскости на траектории для случая жесткого режима возбуждения разрывных автоколебаний, когда на фазовой плоскости наряду с (устойчивым) разрывным предельным циклом  $AB\Gamma A$  имеется еще и устойчивое состояние равновесия (на участке  $F_2^+$  линии «медленных» движений). Замкнутая линия  $ab\varphi a$  является неустойчивым предельным циклом и делит фазовую плоскость на области «притяжения» состояния равновесия и предельного цикла  $AB\Gamma A$ . Именно, в системе установится состояние равновесия, если изображающая точка находилась в начальный момент времени в области, лежащей внутри кривой  $ab\varphi a$ ; если же в начальный момент времени изображающая точка находилась вне этой области, то она придет на разрывный предельный цикл  $AB\Gamma A$ , т. е. в системе установятся разрывные автоколебания.

Пусть на фазовой плоскости  $x, y$  системы уравнений

$$\mu \dot{x} = F(x, y), \quad \dot{y} = G(x, y), \quad (10.15a)$$

где, как и раньше,  $F(x, y)$ ,  $G(x, y)$  — однозначные непрерывные функции, имеющие непрерывные частные производные, и  $\mu$  — малый положительный параметр, имеется (в предельном случае  $\mu \rightarrow +0$ ) разрывный предельный цикл  $C_0$ :  $A_1B_1A_2B_2\dots A_mB_mA_1$ , состоящий из чередующихся  $m$  отрезков траекторий «медленных» движений (на линии  $F^+$ ):  $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_mB_m$ , и  $m$  отрезков траекторий «быстрых» движений ( $y = \text{const}$ ):  $B_1A_2, B_2A_3, \dots, B_{m-1}A_m, B_mA_1$ . В силу определения разрывного предельного цикла на каждом из его участков «медленного» движения  $A_kB_k$  (за исключением точки  $B_k$ ):

$$F(x, y) = 0, \quad F'_x(x; y) < 0, \quad G(x, y) \neq 0,$$

причем знак функции  $G(x, y) = \dot{y}$  на участке  $A_kB_k$  таков, что изображающая точка движется из точки  $A_k$  в точку  $B_k$ , и на каждом из отрезков траекторий «быстрых» движений  $B_{k-1}A_k$  (точки  $B_{k-1}$  и  $A_k$  исключаются)

$$F(x, y) \neq 0$$

(знак  $F(x, y) = \mu \dot{x}$  на интервале  $B_{k-1}A_k$  таков, что изображающая точка «перепрыгивает» из точки  $B_{k-1}$  в точку  $A_k$ ). В точках  $B_k$  (т. е. в точках перехода «медленных» движений изображающей точки в «быстрые», скачкообразные)

$$F(x, y) = 0, \quad F'_x(x, y) = 0, \quad G(x, y) \neq 0;$$

мы будем полагать дополнительно, что в них  $F'_y(x, y)$  и  $F''_{xx}(x, y)$  отличны от нуля. Тогда в каждой точке  $B_k$  касательная к линии  $F$   $F(x, y)=0$  горизонтальна, а переменная  $y$  (в точках кривой  $F$ ) имеет максимальное или минимальное значение.

В точке  $B_k$  ордината  $y$  достигает максимума, если  $G(x, y) > 0$  на  $A_kB_k$ , и минимума, если на  $A_kB_k$   $G(x, y) < 0$ . Поэтому знак  $\frac{F''_{xx}}{F'_y}$  в точке  $B_k$  совпадает со знаком функции  $G(x, y)$  на отрезке  $A_kB_k$ . Далее, так как знак  $\dot{x}$  не изменяется при переходе изображающей точки через точку  $B_k$  (при переходе «медленного» ее движения в «быстрое»),  $\dot{x} = -\frac{F'_y G}{F'_x}$  и  $F'_x < 0$  во время движения изображающей точки по участку  $A_kB_k$  разрывного предельного цикла и  $\dot{x} = \frac{F}{\mu}$  во время движения по участку  $B_kA_{k+1}$ , то знак  $F'_y G$  в точке  $B_k$  совпадает со знаком функции  $F(x, y)$  на последующем интервале «быстрого» движения  $B_kA_{k+1}$ .

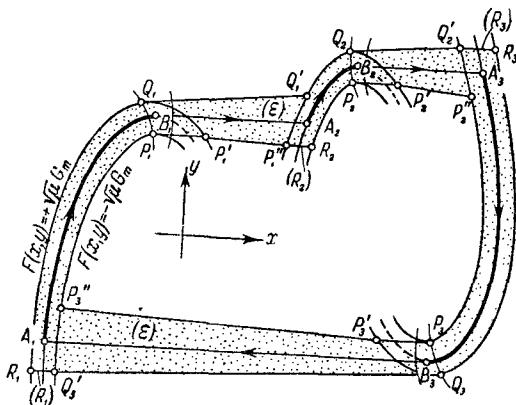


Рис. 524.

Таким образом, знаки  $F''_{xx}$  и  $F'_y G$  в точке  $B_k$  совпадают со знаком функции  $F(x, y)$  на интервале  $B_kA_{k+1}$ ; знак функции  $G(x, y)$  в точке  $B_k$ , разумеется, совпадает со знаком этой функции на отрезке  $A_kB_k$ .

Для примера на рис. 524 изображен разрывный предельный цикл  $A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_1$ , для которого  $G(x, y) > 0$  (т. е.  $\dot{y} > 0$ ) на участке «медленного» движения  $A_1B_1$ ,  $F(x, y) > 0$  (т. е.  $\dot{x} \rightarrow +\infty$  при  $\mu \rightarrow +0$ ) на участке «быстрого» движения  $B_1A_2$ ,  $G(x, y) > 0$  на  $A_2B_2$ ,  $F(x, y) > 0$  на  $B_2A_3$ ,  $G(x, y) < 0$  на  $A_3B_3$ ,  $F(x, y) < 0$  на  $B_3A_1$ ,  $F''_{xx} > 0$ ,  $F'_y > 0$  в точке  $B_1$ ,  $F''_{xx} > 0$ ,  $F'_y > 0$  в точке  $B_2$  и  $F''_{xx} < 0$ ,  $F'_y > 0$  в точке  $B_3$ .

Докажем при сделанных предположениях относительно системы уравнений (10.15а), что в достаточно малой окрестности разрывного предельного цикла  $C_0$  (эта окрестность может быть выбрана сколь угодно малой) лежит единственный и устойчивый предельный цикл системы (10.15а), если только положительный параметр  $\mu$  достаточно мал. Иначе говоря, докажем, что *каждый разрывной предельный цикл является предельным положением только одного и притом устойчивого предельного цикла системы (10.15а) при  $\mu \rightarrow +0$*  [60]<sup>1</sup>.

Первый этап доказательства сформулированной теоремы, существенной для теории разрывных колебаний в системах второго порядка, будет состоять, как и в § 5 гл. VIII, в построении по заданному достаточно малому  $\mu > 0$  замкнутой двусвязной области  $(\varepsilon)$  со следующими свойствами: 1) в области  $(\varepsilon)$  нет состояний равновесия системы (10.15а); 2) разрывный предельный цикл  $C_0$  лежит внутри этой области, причем область  $(\varepsilon)$  стягивается к  $C_0$  при  $\mu \rightarrow +0$ , и 3) траектории системы (10.15а) при заданном значении параметра  $\mu$  входят (при возрастании  $t$ ) в область  $(\varepsilon)$ . Очевидно, эта область (согласно теореме V § 2 гл. VI) будет содержать внутри себя по крайней мере один устойчивый предельный цикл системы уравнений (10.15а) при заданном значении параметра  $\mu$ .

Прежде всего выделим на плоскости  $x, y$  некоторую ограниченную односвязную замкнутую область  $D$ , которая содержит внутри себя разрывный предельный цикл  $C_0$  и в которой функции  $F(x, y)$ ,  $G(x, y)$  и их производные (до нужного нам порядка) непрерывны и, следовательно, ограничены. Ниже мы будем полагать  $\mu$  выбранным настолько малым, чтобы строящаяся нами область  $(\varepsilon)$  лежала целиком внутри области  $D$ .

Для построения области  $(\varepsilon)$  проведем на плоскости  $x, y$  (в области  $D$ ) линии

$$F(x, y) = +\sqrt{\mu} G_m \text{ и } F(x, y) = -\sqrt{\mu} G_m,$$

где  $G_m$  — наибольшее абсолютное значение функции  $G(x, y)$  в области  $D$ , и притом такие, что в (открытой) области  $(\alpha)$ , заключенной между ними и содержащей линию  $F(x, y) = 0$ ,

$$|F(x, y)| < \sqrt{\mu} G_m,$$

а в остальной части области  $D$

$$|F(x, y)| \geq \sqrt{\mu} G_m^2.$$

<sup>1)</sup> Эта теорема для частного вида уравнений (10.15а) (для  $G(x, y) = x$ ,  $F(x, y) = G(x) - y$ ) доказана в [196].

<sup>2)</sup> Заметим, что линия  $F(x, y) = +\sqrt{\mu} G_m$  лежит слева от участков «медленных» движений  $A_k B_k$  разрывного предельного цикла  $C_0$ , а линия  $F(x, y) = -\sqrt{\mu} G_m$  — справа от них, так как на участках  $A_k B_k$   $F(x, y) = 0$  и  $F'_x(x, y) < 0$ .

Проведем также линии

$$\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = \pm \sqrt{\mu},$$

на которых угловой коэффициент касательной к кривой  $F(x, y) = \text{const}$  обращается в  $\pm \sqrt{\mu}$  и которые выделяют в области  $(\alpha)$  такие (открытые) области  $(\beta_k)$ , заключенные между ними и содержащие точки  $B_k$ , что в областях  $(\beta_k)$

$$\left| \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \right| < \sqrt{\mu}$$

и в остальной части области  $(\alpha)$

$$\left| \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \right| \geq \sqrt{\mu}.$$

Линии с указанными свойствами можно построить (по крайней мере в пределах области  $D$ ), выбрав достаточно малое значение параметра  $\mu$ . При этом область  $(\alpha)$  будет лежать внутри некоторой  $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности линии  $F(x, y) = 0$ , а области  $(\beta_k)$  — внутри некоторых  $O(\sqrt{\mu})$ -окрестностей точек  $B_k$ <sup>1)</sup>. Отметим, наконец, точки  $P_k$  и  $Q_k$  — точки пересечения (в  $O(\sqrt{\mu})$ -окрестностях точек  $B_k$ ) линии  $F'_x(x, y) = -\sqrt{\mu} |F'_y(x, y)|$ , являющейся одной из границ областей  $(\beta_k)$ , с линиями  $F(x, y) = \pm \sqrt{\mu} G_m$ , причем точкой  $P_k$  мы будем называть ту из двух точек пересечения, которая имеет меньшую ординату, если  $G(x, y) > 0$  на отрезке  $A_k B_k$ , и большую ординату, если  $G(x, y) < 0$  на том же отрезке.

Построение границ области  $(\varepsilon)$  в малой  $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности участка  $B_k A_{k+1} B_{k+1}$  разрывного предельного цикла мы проведем сначала для случая, изображенного на рис. 525, когда  $G(x, y) > 0$  на отрезках  $A_k B_k$  и  $A_{k+1} B_{k+1}$  и  $F(x, y) > 0$  на интервале  $B_k A_{k+1}$  (затем мы укажем, как это построение прозодится в других случаях).

<sup>1)</sup> Мы пользуемся здесь следующей простой леммой: пусть в некоторой ограниченной области  $A$  имеется линия  $\Phi(x, y) = 0$ , в точках которой существуют непрерывные производные  $\Phi'_x$  и  $\Phi'_y$ , не обращающиеся одновременно в нуль; тогда имеется такое положительное число  $\delta_0$ , что при любом  $0 < \delta \leq \delta_0$ : 1) в области  $A$  существуют линии  $\Phi(x, y) = +\delta$  и  $\Phi(x, y) = -\delta$ , лежащие в некоторой  $O(\delta)$ -окрестности линии  $\Phi(x, y) = 0$ , и 2) в открытой области, заключенной между этими линиями и содержащей линию  $\Phi(x, y) = 0$ ,  $|\Phi(x, y)| < \delta$ , а в остальной части области  $A$   $|\Phi(x, y)| \geq \delta$ . Очевидно, функции  $F(x, y)$

в области  $D$  и  $\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$  в области  $(\alpha)$  удовлетворяют условиям этой леммы.

1) Проведем горизонтальный прямолинейный отрезок  $P_k P'_k$  из точки  $P_k$  в точку  $P'_k$ , лежащую на линии  $F(x, y) = +\sqrt{\mu} G_m$  в области  $F'_x(x, y) > 0$  и в  $O(\mu^{\frac{1}{4}})$ -окрестности точки  $B_{k+1}$ ). Так как в точ-

ке  $B_k$  функция  $G(x, y) > 0$  и непрерывна, а отрезок  $P_k P'_k$  лежит в некоторой  $O(\mu^{\frac{1}{4}})$ -окрестности этой точки, то путем выбора достаточно малого значения параметра  $\mu$  мы всегда сможем добиться, чтобы на построенном отрезке  $P_k P'_k$  функция  $G(x, y)$  была также положительной. Тогда при выбранном достаточно малом  $\mu$  траектории системы (10.15a), пер-

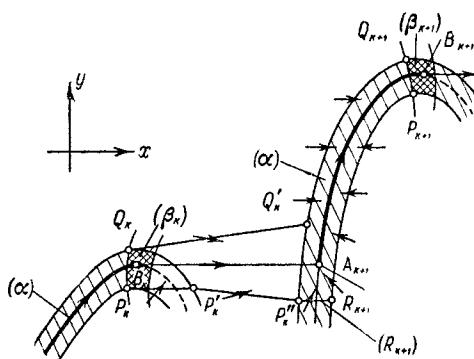


Рис. 525.

секающие этот отрезок, будут проходить через него снизу вверх ( $y > 0$  на отрезке  $P_k P'_k$ ).

2) Проведем отрезок прямой  $P'_k P''_k$  с угловым коэффициентом  $-\sqrt{\mu}$  и отрезок прямой  $Q'_k Q''_k$  с угловым коэффициентом  $+\sqrt{\mu}$  из точек  $P'_k$  и  $Q_k$  вправо до пересечения с левой границей области  $(\alpha)$  в  $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности точки  $A_{k+1}$ . Если  $\mu$  выбрать достаточно малым, то оба отрезка будут лежать вне области  $(\alpha)$ ; поэтому на них

$$F(x, y) \geq \sqrt{\mu} G_m \geq \sqrt{\mu} |G(x, y)|$$

1) Такая точка  $P'_k$  существует в  $O(\mu^{\frac{1}{4}})$ -окрестности точки  $B_k$ , так как в точке  $B_k F''_{xx} \neq 0$ . Действительно, разложим функцию  $F = F(x, y)$  в степенной ряд в окрестности точки  $B_k(x_k^*, y_k^*)$ :

$$F = F'_y \eta + F''_{xx} \xi^2 + 2F''_{xy} \xi \eta + F''_{yy} \eta^2 + \dots,$$

где  $\xi = x - x_k^*$ ,  $\eta = y - y_k^*$  и  $F'_y$ ,  $F''_{xx}$ ,  $F''_{xy}$ ,  $\dots$  — значения соответствующих производных в точке  $B_k$ . Так как точки  $P_k$  и  $P'_k$  имеют одинаковые ординаты, а точка  $P_k$  лежит в  $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности точки  $B_k$ , то для точки  $P'_k$   $|\eta| \leq O(\sqrt{\mu})$ , а ее абсцисса  $\xi$  определяется уравнением

$$F''_{xx} \xi^2 + b\xi + c + \dots = 0,$$

где  $b$  и  $c$  — величины порядка  $\sqrt{\mu}$ . Так как  $F''_{xx} \neq 0$  в точке  $B_k$ , то  $|\xi| = O(\mu^{\frac{1}{4}})$ , т. е. точка  $P'_k$  действительно лежит в  $O(\mu^{\frac{1}{4}})$ -окрестности точки  $B_k$ .

$(F(x, y) > 0)$  на отрезках  $P'_k P''_k$  и  $Q'_k Q''_k$ , так как эти отрезки лежат в малой  $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности интервала  $B_k A_{k+1}$ , на котором непрерывная функция  $F(x, y) > 0$ ). Рассматривая пересечение фазовых траекторий системы (10.15а) с прямыми  $\sqrt{\mu} x \pm y = \text{const}$  (на двух из этих прямых лежат построенные нами отрезки  $P'_k P''_k$  и  $Q'_k Q''_k$ ), нетрудно видеть, что при выбранном малом  $\mu$  траектории системы (10.15а), пересекающие отрезки  $P'_k P''_k$  и  $Q'_k Q''_k$ , входят (при возрастании  $t$ ) внутрь полосы, заключенной между этими отрезками и содержащей участок  $B_k A_{k+1}$  разрывного предельного цикла. Это следует из того, что при движении изображающей точки по траектории системы (10.15а)

$$\frac{d}{dt} (\sqrt{\mu} x \pm y) = \frac{F(x, y)}{\sqrt{\mu}} \pm G(x, y) \geqslant 0$$

в точках отрезков  $P'_k P''_k$  и  $Q'_k Q''_k$  в силу приведенного выше неравенства.

3) Пересечем область  $(\alpha)$  (в  $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности точки  $A_{k+1}$ ) горизонтальным отрезком  $(R_{k+1})$ , проведенным из точки  $P''_k$  в точку  $R_{k+1}$  правой границы области  $(\alpha)$ . Так как этот отрезок лежит в  $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности точки  $A_{k+1}$ , в которой непрерывная функция  $G(x, y) > 0$ , то при достаточно малых  $\mu$   $G(x, y)$  положительна и на отрезке  $(R_{k+1})$ ; тогда траектории системы (10.15а), пересекающие этот отрезок, проходят через него снизу вверх.

4) Соединим точки  $Q'_k$  и  $R_{k+1}$  с точками  $P_{k+1}$  и  $Q_{k+1}$  дугами линий  $F(x, y) = \pm \sqrt{\mu} G_m$ , лежащими вне областей  $(\beta_i)$ . На них

$$-F'_x(x, y) \geqslant \sqrt{\mu} |F'_y(x, y)|;$$

поэтому при движении изображающей точки по траекториям системы (10.15а)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{F(x, y)\}^2 &= F \left\{ F'_x \dot{x} + F'_y \dot{y} \right\} = \\ &= \frac{F^2}{\mu} F'_x + F'_y FG = G_m^2 \left\{ F'_x + \sqrt{\mu} F'_y \frac{G}{G_m} \right\} \leqslant 0 \end{aligned}$$

в точках этих дуг, т. е. фазовые траектории системы (10.15а), пересекающие эти дуги, входят (при возрастании  $t$ ) внутрь области  $(\alpha)$ .

Построенные нами линии, соединяющие точки  $P_k$  и  $Q_k$  с точками  $P_{k+1}$  и  $Q_{k+1}$ , ограничивают полосу — часть области  $(\epsilon)$ , которая лежит в некоторой  $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности участка  $B_k A_{k+1} B_{k+1}$  разрывного предельного цикла, содержит этот участок и в которую фазовые траектории системы (10.15а) входят (при возрастании  $t$ ). Аналогичным образом производится построение границ области  $(\epsilon)$  в  $O(\sqrt{\mu})$ -окрестностях участков разрывного предельного цикла и при знаках функций  $F(x, y)$  и  $G(x, y)$ , отличных от принятых на рис. 525. Именно, построение участков  $P_k P'_k P''_k$  и  $Q_k Q'_k$  границ области  $(\epsilon)$  сводится к изложенному заменой переменной  $x$  на  $-x$ , если  $F(x, y) < 0$

на интервале  $B_k A_{k+1}$ , и  $y$  на  $-y$ , если  $G(x, y) < 0$  на отрезке  $A_k B_k$ ; горизонтальный отрезок  $(R_{k+1})$ , пересекающий область  $(\alpha)$  в  $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности точки  $A_{k+1}$ , проводится через нижнюю из точек  $P''_k$  и  $Q'_k$ , если  $G(x, y) > 0$  на отрезке  $A_{k+1} B_{k+1}$ , и через верхнюю из них, если  $G(x, y) < 0$  на  $A_{k+1} B_{k+1}$ ; затем верхняя из точек  $P''_k$  и  $Q'_k$ , если  $G(x, y) > 0$  на  $A_{k+1} B_{k+1}$ , или нижняя из них, если  $G(x, y) < 0$  на  $A_{k+1} B_{k+1}$ , и точка  $R_{k+1}$  (т. е. правая точка отрезка  $(R_{k+1})$ , если  $F(x, y) > 0$  на интервале  $B_k A_{k+1}$ , или левая точка этого отрезка, если  $F(x, y) < 0$  на  $B_k A_{k+1}$ ) соединяются дугами линий  $F(x, y) = \pm \sqrt{\mu} G_m$  с точками  $P_{k+1}$  и  $Q_{k+1}$ .

Построив указанным способом границы области  $(\varepsilon)$  около каждого из участков разрывного предельного цикла  $C_0$ , мы получим двусвязную область  $(\varepsilon)$ , которая содержит внутри себя разрывный предельный цикл, лежит в некоторой его  $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности и в которую фазовые траектории системы (10.15а) входят при возрастании времени  $t$  (для примера область  $(\varepsilon)$  построена на рис. 524). При достаточно малых  $\mu$  эта область не будет содержать и состояний равновесия системы (10.15а), т. е. таких точек, в которых одновременно  $F(x, y) = 0$  и  $G(x, y) = 0$ , поскольку таких точек нет на разрывном предельном цикле, а функции  $F(x, y)$  и  $G(x, y)$  суть функции непрерывные. Тогда (при достаточно малых  $\mu$ ) построенная область  $(\varepsilon)$  будет содержать внутри себя по крайней мере один устойчивый предельный цикл системы (10.15а).

Докажем теперь, что всякий предельный цикл  $C$  системы (10.15а), лежащий в построенной области  $(\varepsilon)$ , является при достаточно малых  $\mu$  устойчивым; тем самым мы докажем, что при достаточно малых  $\mu$  в области  $(\varepsilon)$  существует только один предельный цикл системы (10.15а), так как если бы там существовало несколько предельных циклов, то среди них обязательно были бы неустойчивые. С этой целью рассмотрим характеристический показатель предельного цикла  $C$  — интеграл

$$I = \int_C \left\{ \frac{F'_x}{\mu} + G'_y \right\} dt,$$

взятый по предельному циклу, и покажем, что  $I < 0$  при достаточно малых  $\mu$  (условие  $I < 0$  является, как известно, достаточным условием устойчивости предельного цикла  $C$ ; см. § 7 гл. V). Разобьем предельный цикл  $C$  точками  $C_k$  — точками его пересечения с границей области  $(\alpha)$  в  $O(\sqrt{\mu})$ -окрестностях точек  $A_k$  — на участки  $C_k C_{k+1}$ . Тогда

$$I = \sum I_k,$$

где

$$I_k = \int_{C_k C_{k+1}} \left\{ \frac{F'_x}{\mu} + G'_y \right\} dt$$

— интеграл, взятый по участку  $C_k C_{k+1}$  предельного цикла  $C$ . Для определения знака интеграла  $I_k$  (при достаточно малых  $\mu$ ) разобьем дополнительно участок  $C_k C_{k+1}$  предельного цикла на три участка точками его пересечения с линией  $F'_x(x, y) = -\mu (G'_y)_m$ , где  $(G'_y)_m$  — наибольшее абсолютное значение функции  $G'_y(x, y)$  в области  $D$ , и с границей области  $(\alpha)$  в малой окрестности точки  $B_k$  (рис. 526). Первая из них — точка  $C_k^{(1)}$  — лежит в  $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности точки  $B_k$ , вторая —  $C_k^{(2)}$  — в  $O(\mu^{\frac{1}{4}})$ -окрестности той же точки<sup>1)</sup>. Соответственно,

$$I_k = I_k^{(1)} + I_k^{(2)} + I_k^{(3)},$$

где

$$\begin{aligned} I_k^{(1)} &= \int_{C_k C_k^{(1)}} \left\{ \frac{F'_x}{\mu} + G'_y \right\} dt = \int_{y_k}^{y_k^{(1)}} \left\{ \frac{F'_x}{\mu} + G'_y \right\} \frac{dy}{G}, \\ I_k^{(2)} &= \int_{C_k^{(1)} C_k^{(2)}} \left\{ \frac{F'_x}{\mu} + G'_y \right\} dt = \int_{y_k^{(1)}}^{y_k^{(2)}} \left\{ \frac{F'_x}{\mu} + G'_y \right\} \frac{dy}{G}, \\ I_k^{(3)} &= \int_{C_k^{(2)} C_{k+1}} \left\{ \frac{F'_x}{\mu} + G'_y \right\} dt = \int_{x_k^{(2)}}^{x_{k+1}} \left\{ F'_x + \mu G'_y \right\} \frac{dx}{F} \end{aligned}$$

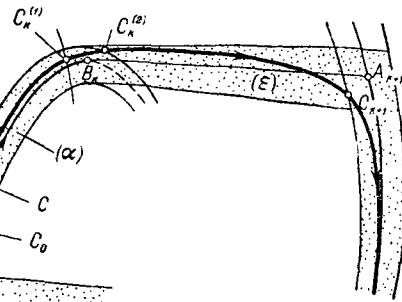


Рис. 526.

<sup>1)</sup> Линия  $F'_x(x, y) = -\mu (G'_y)_m$  лежит в  $O(\mu)$ -окрестности линии  $F'_x(x, y) = 0$ , отрезок которой в пределах области  $(\alpha)$  заключен в  $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности точки  $B_k(x_k^*, y_k^*)$ . Поэтому и точка  $C_k^{(1)}$  лежит в  $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности точки  $B_k$ , т. е.  $|y_k^{(1)} - y_k^*| \leq O(\sqrt{\mu})$ , где  $y_k^{(1)}$  — ордината точки  $C_k^{(1)}$ . Для точки  $C_k^{(2)}(x_k^{(2)}, y_k^{(2)})$  имеем:  $|y_k^{(2)} - y_k^*| \leq O(\sqrt{\mu})$  и следовательно,  $|x_k^{(2)} - x_k^*| \leq O(\mu^{\frac{1}{4}})$  (доказательство последнего неравенства аналогично приведенному в примечании на стр. 766).

(здесь  $x_k, y_k, x_k^{(1)}, y_k^{(1)}, x_k^{(2)}, y_k^{(2)}$  и  $x_{k+1}, y_{k+1}$  — координаты точек  $C_k, C_k^{(1)}, C_k^{(2)}$  и  $C_{k+1}$ ).

Так как при достаточно малых  $\mu$  на участке  $C_k C_k^{(1)}$  предельного цикла  $F'_x(x, y) < -\mu |G'_y|_m \leq -\mu |G'_y(x, y)|$  и  $|G(x, y)| > a$  ( $a$  — некоторое положительное число), то  $I_k^{(1)} < 0$ , причем, поскольку на этом участке можно выделить отрезок, на котором  $F'_x(x, y) < -b$  ( $b$  — некоторое положительное число), то

$$I_k^{(1)} = O\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

На участке  $C_k^{(1)} C_k^{(2)}$ , лежащем внутри некоторой  $O\left(\frac{1}{\mu^{\frac{1}{4}}}\right)$ -окрестности точки  $B_k$ ,  $|x - x_k^*| \leq O\left(\frac{1}{\mu^{\frac{1}{4}}}\right)$ ,  $|y - y_k^*| \leq O\left(\frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}}\right)$ ,  $|F'_x(x, y)| \leq O\left(\frac{1}{\mu^{\frac{1}{4}}}\right)$ , поскольку в точке  $B_k$   $F''_{xx} \neq 0$ ,  $|G(x, y)| > a$ ; поэтому согласно теореме о среднем

$$|I_k^{(2)}| \leq O\left(\mu^{-\frac{3}{4}}\right) |y_k^{(2)} - y_k^{(1)}| \leq O\left(\mu^{-\frac{1}{4}}\right),$$

так как

$$|y_k^{(2)} - y_k^{(1)}| \leq O(\sqrt{\mu}).$$

Наконец, на участке  $C_k^{(2)} C_{k+1}$ , лежащем вне области  $(\alpha)$ ,  $|F(x, y)| \geq \sqrt{\mu} G_m$ , в силу чего

$$|I_k^{(3)}| \leq O\left(\mu^{-\frac{1}{2}}\right)^{1)}.$$

Таким образом, интеграл  $I_k = \int_{C_k C_{k+1}} \left\{ \frac{F'_x}{\mu} + G'_y \right\} dt$  равен сумме

отрицательной величины  $I_k^{(1)}$  порядка  $\frac{1}{\mu}$  и величин  $I_k^{(2)}$  и  $I_k^{(3)}$ , которые если и стремятся к бесконечности при  $\mu \rightarrow +0$ , то медленнее, чем  $\frac{1}{\mu}$ ; поэтому при достаточно малых  $\mu$   $I_k < 0$  на всех участках  $C_k C_{k+1}$ , следовательно, и характеристический показатель предельного цикла  $C$

$$I = \int_C \left\{ \frac{F'_x}{\mu} + G'_y \right\} dt = \sum I_k < 0,$$

т. е. предельный цикл  $C$ , лежащий в области  $(\alpha)$ , является устойчивым. Как уже указывалось выше, мы доказали одновременно и единственность предельного цикла системы (10. 15а), лежащего в области

<sup>1)</sup> Нетрудно получить более точную оценку:  $|I_k^{(3)}| \leq O(\ln \mu)$ .

( $\epsilon$ ), т. е. в  $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности разрывного предельного цикла  $C_0$ . В итоге сформулированная выше теорема полностью доказана.

Доказанная теорема, очевидно, позволяет использовать разрывный предельный цикл системы

$$\mu \dot{x} = F(x, y), \quad \dot{y} = G(x, y) \quad (10.15a)$$

в качестве исходного (нулевого) приближения для вычисления тех или иных характеристик автоколебаний в системе (10.15a) при небольших значениях параметра  $\mu$ . Так, например, период автоколебаний (в нулевом приближении, т. е. при  $\mu \rightarrow +0$ )

$$T_0 = \int_{C_0} \frac{dy}{G} = \sum \int_{A_k B_k} \frac{dy}{G}.$$

При более детальном рассмотрении [93, 94, 158, 159] хода фазовых траекторий системы (10.15a) вблизи разрывного предельного цикла можно получить асимптотические разложения уравнения предельного цикла, периода автоколебаний и т. д. В частности, для периода автоколебаний получается выражение вида

$$T = T_0 + A \mu^{\frac{2}{3}} + B \mu \ln \frac{1}{\mu} + C \mu + O(\mu^{\frac{4}{3}}),$$

где  $A, B$  и  $C$  — числа, определяемые значениями функций  $F(x, y)$  и  $G(x, y)$  на разрывном предельном цикле<sup>1</sup>.

Ниже мы займемся рассмотрением разрывных автоколебаний в конкретных колебательных системах, «медленные» и «быстрые» движения которых отображаются (при соответствующих упрощающих предположениях) уравнениями (10.16) и (10.17) не выше второго порядка.

## § 5. Мультивибратор с одним $RC$ -звеном

Рассмотрим еще раз уже знакомую нам автоколебательную систему, совершающую при известных условиях разрывные автоколебания, — мультивибратор с одним  $RC$ -звеном (рис. 527)<sup>2</sup>). Как мы уже видели в § 8 гл. IV, модель мультивибратора, построенная при пренебрежении

<sup>1)</sup> Заметим, что коэффициент  $A$  зависит от кривизны линии  $F(x, y) = 0$  в точках  $B_k$ . В частности, когда радиусы кривизны этой линии во всех точках  $B_k$  стремятся к нулю, т. е. линия  $F$  стремится к линии с изломами в точках  $B_k$ , коэффициент  $A \rightarrow 0$  и поправка на период становится величиной порядка  $\mu \ln \frac{1}{\mu}$  (см., например, § 5 гл. VIII).

<sup>2)</sup> См. также § 8 гл. IV, § 12 гл. V и § 5 гл. VIII.

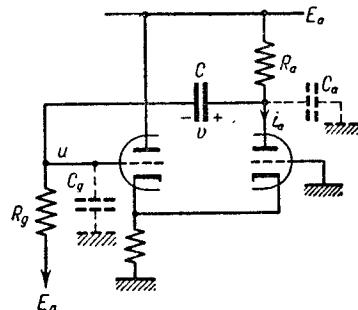


Рис. 527.