

Вычислив T_2 (например, графическим интегрированием), мы найдем и период автоколебаний:

$$T = T_1 + T_2.$$

Как уже было сказано, в действительности мгновенных изменений скорости не наблюдается, так как реальная система обладает

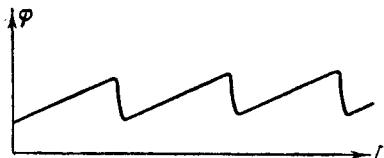


Рис. 537.

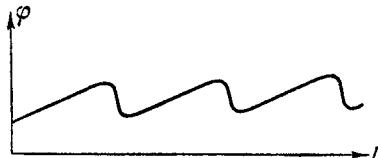


Рис. 538.

некоторым (пусть малым, но конечным) моментом инерции, в результате чего «скачки» происходят не с бесконечно большими, а с очень большими, но конечными ускорениями. Поэтому при $J \neq 0$ фазовые траектории «быстрых» изменений скорости не будут прямолинейными, а должны несколько изогнуться. Однако при достаточно малом моменте инерции и больших моментах упругой силы и силы трения изгиб этот практически совершенно не заметен. Но характер процесса существенно изменяется при увеличении момента инерции колодки. На рис. 537 и 538 изображены полученные экспериментально кривые колебаний колодки с различными моментами инерции. Форма кривых при увеличении момента инерции колодки получается все более и более близкой к форме гармонических колебаний, и «релаксационный маятник» превращается в маятник Фроуда — в автоколебательную систему, близкую к гармоническому осциллятору. Картина на фазовой плоскости (рис. 539), построенная по осциллографу

изменениям момента инерции колодки с большим моментом инерции (рис. 538), значительно отличается от разбиения этой плоскости на траектории в предельном случае $J \rightarrow +0$ (рис. 535). Наличие значительного момента инерции колодки сгладило скачки скорости.

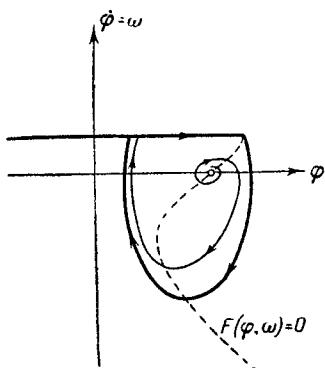


Рис. 539.

колебаний колодки с большим моментом инерции (рис. 538), значительно отличается от разбиения этой плоскости на траектории в предельном случае $J \rightarrow +0$ (рис. 535). Наличие значительного момента инерции колодки сгладило скачки скорости.

§ 7. Два генератора электрических разрывных колебаний

Хорошими электрическими аналогами только что рассмотренной механической релаксационной системы являются простейшие генераторы электрических разрывных (релаксационных) колебаний: схема с неоновой лампой (или с вольтовой дугой) и динатронный генератор.

1. Схема с неоновой лампой. Разрывные колебания в этой схеме (рис. 540) мы уже рассматривали в § 6 гл. IV (п. 2), пользуясь постулатом скачка силы тока, т. е. считая, что при зажигании и гашении неоновой лампы сила тока через нее изменяется скачком при неизменном напряжении на лампе (или, что то же самое, на конденсаторе C). Этот постулат скачка не являлся следствием использованной там модели первого порядка (не являлся следствием уравнения (4.30)), а был получен, исходя из дополнительных физических соображений относительно ограниченности токов и напряжений в схеме.

Мы рассмотрим теперь кратко ту же схему, учитывая существенные паразитные параметры (но считая их достаточно малыми), и получим, в частности, «скакки» силы тока через неоновую лампу при «неизменном» напряжении на конденсаторе C как следствие динамики системы. Учитывая малую паразитную индуктивность L цепи неоновой лампы, изображенную пунктиром на рис. 540¹⁾, получим следующие

уравнения колебаний в схеме с неоновой лампой:

$$\left. \begin{aligned} C \frac{du}{dt} &= \frac{E - u}{R} - i, \\ L \frac{di}{dt} &= u - v, \\ i &= \varphi(v), \end{aligned} \right\} \quad (10.33)$$

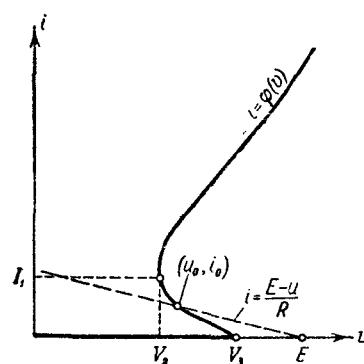


Рис. 541.

где $\varphi(v)$ — функция, отображающая зависимость силы тока i через неоновую лампу от напряжения v на ней, — уравнение статической характеристики лампы; обратную функцию, уже однозначную для горящей неоновой лампы, мы обозначим через $v = \psi(i)$.

Как известно, характеристика неоновой лампы (она изображена на рис. 541) имеет падающий участок (при $0 < i < I_1$). Ниже мы будем предполагать, что состояние равновесия (u_0, i_0) рассматриваемой нами схемы, определяемое соотношениями:

$$u = v, \quad i = \frac{E - v}{R} = \varphi(v),$$

¹⁾ Среди малых паразитных параметров, существенных для процессов в схеме, наряду с паразитной индуктивностью монтажа следует отметить также и инерционность газового разряда в неоновой лампе. Эту инерционность приближенно можно отобразить введением некоторой малой, «эквивалент-

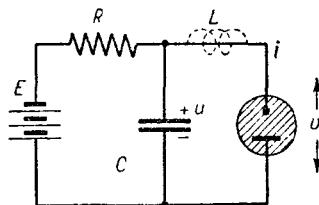


Рис. 540.

единственно, лежит на этом падающем участке (рис. 541) и, следовательно, неустойчиво.

Характеристическое уравнение для этого состояния равновесия, как нетрудно видеть, имеет вид:

$$LCR\lambda^2 + [L + CR\psi'(i_0)]\lambda + R + \psi'(i_0) = 0;$$

поэтому состояние равновесия (u_0, i_0) , если оно лежит на падающем участке характеристики и единствено, т. е. если $-R < \psi'(i_0) < 0$, неустойчиво при

$L < -CR\psi'(i_0)$, что, очевидно, выполняется при достаточно малых L . Для того чтобы состояние равновесия было единственным и лежало на падающем участке, необходимо, чтобы E и R были достаточно большими ($E > V_a$, $R > R_{kp}$; подробнее об этом см. гл. IV, § 7, п. 2).

Построим предельное (для $L \rightarrow +0$) разбиение фазовой плоскости u , i на траектории системы (10.33). Прежде всего проведем линию F :

$$F(u, i) \equiv u - \psi(i) = 0$$

— фазовую линию «вырожденной» модели (рис. 542) и выделим на ней участки F_1^+ и F_2^+ , на которых выполняется условие несущественности малой паразитной индуктивности L :

$$F'_i = -\psi'(i) < 0.$$

Вне этой линии $\frac{di}{dt} \rightarrow \infty$ при $L \rightarrow +0$ (справа от линии F) $\frac{di}{dt} \rightarrow +\infty$, слева от нее $\frac{di}{dt} \rightarrow -\infty$ при ограниченных $\frac{du}{dt}$. Поэтому область фазовой плоскости вне линии F является при $L \rightarrow +0$ областью «скачкообразных» изменений состояний системы и заполнена вертикальными прямолинейными траекториями скачков силы тока — траекториями $i = \text{const}$, идущими из бесконечности и от участка линии F , соответствующего падающему участку характеристики неоновой лампы, к линиям F_1^+ и F_2^+ . Иначе говоря, в области вне линий F_1^+ и F_2^+ имеют место скачки силы тока i через неоновую лампу при неизменном напряжении u на конденсаторе C (соответственно при достаточно малых L в этой области имеют место весьма быстрые изменения силы тока i при почти неизменном напряжении u , так как фазовые траектории этих быстрых изменений состояний близки при малых L к прямым $i = \text{const}$). «Медленные» изменения состояний с конечными при $L \rightarrow +0$ скоростями изменения силы тока i и на-

ной индуктивности последовательно с неоновой лампой. Ниже под L будет подразумеваться сумма этой «эквивалентной» индуктивности и паразитной индуктивности монтажа.

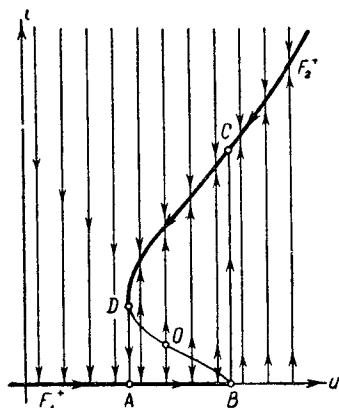


Рис. 542.

пражения u имеют место только на линиях F_1^+ и F_2^+ (точнее, вблизи этих линий при малых L). Здесь колебания в схеме удовлетворительно отображаются уравнениями вырожденной (с $L=0$) системы:

$$\begin{aligned} i &= \varphi(u), \\ RC \frac{du}{dt} &= E - u - R\varphi(u). \end{aligned}$$

Так как на траекториях «медленных» изменений состояний F_1^+ и F_2^+ нет состояний равновесия и изображающая точка движется по ним соответственно к точкам B и D , из которых начинаются скачки силы тока, то при любых начальных условиях в схеме устанавливаются разрывные (релаксационные) автоколебания, которым на фазовой плоскости соответствует предельный цикл $ABCDA$ (рис. 542) и при которых колебания силы тока i носят разрывный характер, а колебания напряжения u имеют «пилюобразную» форму (рис. 543). Мы не будем вычислять амплитуду и период автоколебаний, так как они, очевидно, будут выражаться формулами, полученными в § 6 гл. IV.

Таким образом, в рассматриваемой схеме паразитная индуктивность монтажа и инерционность газового разряда в неоновой лампе являются факторами, существенными (несмотря на их малость) для протекания колебательных процессов в схеме. Только при их учете мы получили динамическую модель, которая достаточно полно отображает динамику схемы и позволяет проследить за колебаниями схемы без привлечения каких-либо дополнительных суждений или гипотез, давая при этом результаты, находящиеся в качественном и удовлетворительном количественном совпадении с экспериментальными данными.

2. Динатронный генератор разрывных колебаний. Схема динатронного генератора разрывных (релаксационных) колебаний приведена на рис. 544; его колебания (при учете малой паразитной емкости C_a) описываются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} L \frac{di}{dt} &= E_a - u - Ri, \\ C_a \frac{du}{dt} &= i - i_a, \\ i_a &= \varphi(u), \end{aligned} \right\} \quad (10.34)$$

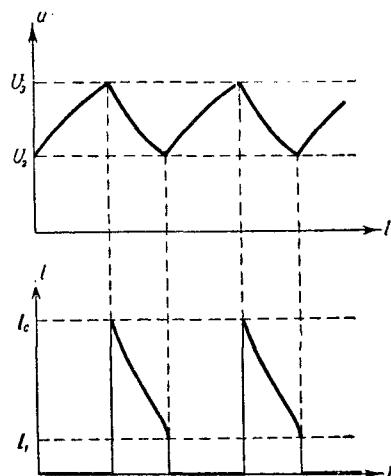


Рис. 543.

где $i_a = \varphi(u)$ — уравнение характеристики тетрода (эта характеристика тетрода качественно изображена на рис. 545; существенно, что она имеет падающий участок: при $U_1 < u < U_2$ $\varphi'(u) < 0$)¹.

Генератор имеет состояния равновесия, определяемые, очевидно, уравнением

$$i = \frac{E_a - u}{R} = \varphi(u).$$

Мы будем полагать в дальнейшем параметры схемы E_a , R такими, чтобы схема имела единственное состояние равновесия (u_0, i_0) , лежащее на падающем участке характеристики тетрода (рис. 545). Тогда это состояние равновесия

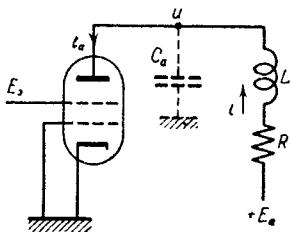


Рис. 544.

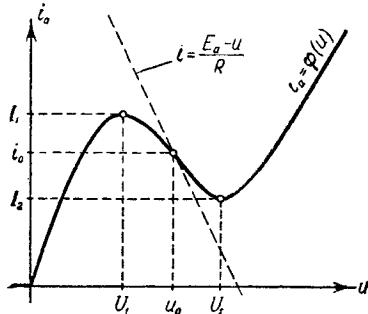


Рис. 545.

неустойчиво, поскольку емкость C_a достаточно мала, и схема будет самовозбуждаться.

Характеристическое уравнение для состояния равновесия (u_0, i_0) генератора, как нетрудно видеть, записывается в виде:

$$\left| \frac{L\lambda + R}{C_a\lambda + \varphi'(u_0)} \right|^2 = C_a L \lambda^2 + [C_a R + L \varphi'(u_0)] \lambda + 1 + R \varphi'(u_0) = 0.$$

Если состояние равновесия лежит на падающем участке характеристики и единственно, то $-\frac{1}{R} < \varphi'(u_0) < 0$; следовательно, это состояние равновесия неустойчиво при $C_a < -\frac{L}{R} \varphi'(u_0)$, что выполняется при достаточно малых C_a .

Для рассмотрения колебаний схемы при достаточно малых C_a построим разбиение фазовой плоскости u, i на траектории в пре-

¹) Пренебрегая паразитной емкостью $C_{a\mu}$, мы получим модель первого порядка, фазовая линия которой (линия напряжений u) будет содержать точки стыка фазовых траекторий $u = U_1$ и $u = U_2$. Эта модель опять является «дефектной» в том смысле, что она не позволяет проследить за колебаниями системы и объяснить хотя бы качественно колебательные закономерности в схеме. Для рассмотрения колебаний в динатронном генераторе нужно или дополнить эту модель соответствующим постулатом скачка или же фактически учсть один из существенных паразитных параметров (таким параметром в схеме является паразитная емкость $C_{a\mu}$).

дельном случае $C_a \rightarrow +0$. Это разбиение изображено на рис. 546. Всюду вне линии F , определяемой уравнением $F(u, i) = i - \varphi(u) = 0$, т. е. вне фазовой линии «вырожденной» модели (с $C_a = 0$), скорости изменения напряжения u на тетроде сколь угодно велики при достаточно малых значениях паразитной емкости C_a : при $C_a \rightarrow +0$ $\frac{du}{dt} \rightarrow \infty$, причем над линией F $\frac{du}{dt} \rightarrow +\infty$, под ней $\frac{du}{dt} \rightarrow -\infty$, а $\frac{di}{dt}$ всюду ограничена. Следовательно, эта область фазовой плоскости заполнена траекториями $i = \text{const}$, по которым изображающая точка движется с «бесконечно большой» фазовой скоростью, т. е. траекториями «скаков» напряжения u на тетроде (при неизменной силе тока i). Эти траектории идут из бесконечности и от участка BD линии F , соответствующего падающему участку характеристики, к остальным частям F_1^+ и F_2^+ линии F , на которых выполнены условия несущественности малой паразитной емкости C_a :

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -\varphi'(u) < 0.$$

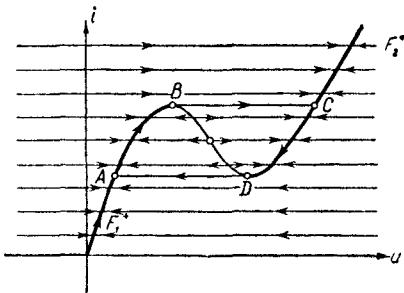


Рис. 546.

В силу этого изображающая точка, попав в результате «скакка» на кривую F_1^+ или F_2^+ , будет затем двигаться по этой кривой уже с конечными (даже при $C_a \rightarrow +0$) скоростями изменения напряжения u , т. е. линии F_1^+ и F_2^+ являются траекториями «медленных» изменений состояний системы¹⁾. Так как на F_1^+ и F_2^+ условие несущественности паразитной емкости C_a выполнено, то здесь малой емкостью C_a можно пренебречь и можно записать уравнение колебаний схемы (при «медленных» изменениях напряжения u на тетроде) в виде следующего уравнения первого порядка:

$$i = \varphi(u), \quad L \frac{di}{dt} + Ri = E_a - u.$$

На траекториях F_1^+ и F_2^+ $\frac{du}{dt} \neq 0$, $\frac{di}{dt} \neq 0$ (там нет состояний равновесия), причем на F_1^+ $\frac{du}{dt} > 0$, а на F_2^+ $\frac{du}{dt} < 0$; поэтому изображающая точка, двигаясь по траектории F_1^+ (по траектории F_2^+), обязательно придет через конечный интервал времени в точку B

¹⁾ Точнее, фазовые траектории «медленных» изменений состояний системы лежат в малой окрестности линий F_1^+ и F_2^+ и стремятся к последним при $C_a \rightarrow +0$. Сами линии F_1^+ и F_2^+ являются при $C_a \neq 0$ изоклинами вертикальных касательных,

(в точку D), откуда по соответствующей траектории скачка $i = \text{const}$ «перескочит» в точку C траектории F_2^+ (в точку A траектории F_1^+).

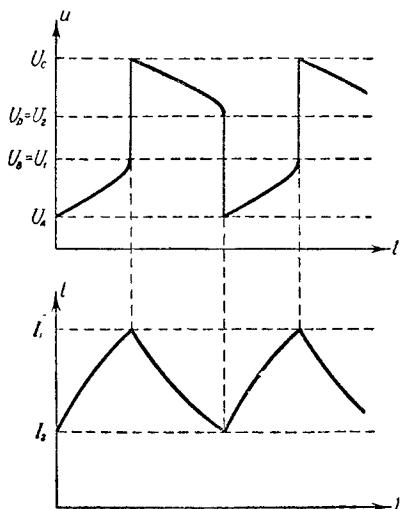


Рис. 547.

«маленьких» движений F_1^+ и F_2^+ (длительностью скачков от B к C и от D к A мы пренебрегаем) и, как нетрудно видеть, равен

$$T = L \int_{U_A}^{U_B} \frac{\varphi'(u) du}{E_a - u - R\varphi(u)} + L \int_{U_C}^{U_D} \frac{\varphi'(u) du}{E_a - u - R\varphi(u)}$$

(интегралы, стоящие в этом выражении, легко вычисляются, например, в том случае, когда характеристика тетрода аппроксимируется кусочно-линейной функцией).

§ 8. Схема Фрюгауфа

Рассмотрим теперь схему релаксационного генератора, предложенную Фрюгауфом [155, 142]. В этой схеме (рис. 548) существенную роль играет то обстоятельство, что сами лампы образуют участки замкнутых цепей и что поэтому нужно принимать во внимание рас-

¹⁾ Эта картина является общей для всех электрических релаксационных систем, приводящих при пренебрежении паразитными параметрами к одному дифференциальному уравнению первого порядка: если вольт-амперная характеристика $i = \varphi(u)$ нелинейного элемента схемы имеет «N-образную» форму (типа изображенного на рис. 546), то в схеме при разрывных колебаниях будут скачки напряжения u , а сила тока i будет изменяться непрерывно. Наоборот, в случае «S-образной» характеристики $i = \varphi(u)$ нелинейного элемента, аналогичной характеристике неоновой лампы, непрерывно будет изменяться напряжение u , а колебания силы тока будут иметь разрывный характер.