

(в точку D), откуда по соответствующей траектории скачка $i = \text{const}$ «перескочит» в точку C траектории F_2^+ (в точку A траектории F_1^+).

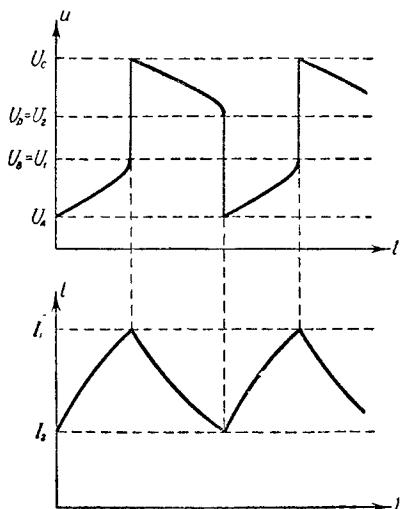


Рис. 547.

«маленьких» движений F_1^+ и F_2^+ (длительностью скачков от B к C и от D к A мы пренебрегаем) и, как нетрудно видеть, равен

$$T = L \int_{U_A}^{U_B} \frac{\varphi'(u) du}{E_a - u - R\varphi(u)} + L \int_{U_C}^{U_D} \frac{\varphi'(u) du}{E_a - u - R\varphi(u)}$$

(интегралы, стоящие в этом выражении, легко вычисляются, например, в том случае, когда характеристика тетрода аппроксимируется кусочно-линейной функцией).

§ 8. Схема Фрюгауфа

Рассмотрим теперь схему релаксационного генератора, предложенную Фрюгауфом [155, 142]. В этой схеме (рис. 548) существенную роль играет то обстоятельство, что сами лампы образуют участки замкнутых цепей и что поэтому нужно принимать во внимание рас-

¹⁾ Эта картина является общей для всех электрических релаксационных систем, приводящих при пренебрежении паразитными параметрами к одному дифференциальному уравнению первого порядка: если вольт-амперная характеристика $i = \varphi(u)$ нелинейного элемента схемы имеет «N-образную» форму (типа изображенного на рис. 546), то в схеме при разрывных колебаниях будут скачки напряжения u , а сила тока i будет изменяться непрерывно. Наоборот, в случае «S-образной» характеристики $i = \varphi(u)$ нелинейного элемента, аналогичной характеристике неоновой лампы, непрерывно будет изменяться напряжение u , а колебания силы тока будут иметь разрывный характер.

пределение напряжений между лампами и сопротивлениями R . Это сводится к тому, что мы должны будем учитывать анодную реакцию, которая в этой схеме играет принципиальную роль. Поэтому мы при рассмотрении схемы Фрюгауфа будем считать, что анодный ток есть функция не только сеточного, но и анодного напряжения. Именно, мы будем полагать, что анодный ток лампы является однозначной и монотонно возрастающей функцией так называемого «управляющего» напряжения $u_{\text{упр}} = u_g + Du_a$:

$$i_a = f(u_g + Du_a),$$

где D — проницаемость лампы — величина, обратная коэффициенту усиления лампы ($D < 1$). Кроме того, ниже мы будем полагать эту функцию такой, что обратная ей функция

$$u_g + Du_a = U(i_a)$$

является также однозначной.

1. «Вырожденная» модель. Пренебрегая всеми паразитными параметрами (в частности, паразитными емкостями) и сеточными токами и считая лампы идентичными, мы получим следующую систему уравнений, описывающих колебания в схеме:

$$i_{a1} = f(u_{g1} + Du_{a1}), \quad i_{a2} = f(u_{g2} + Du_{a2}),$$

$$C \frac{dv}{dt} = i_{a2} - i_{a1},$$

$$u_{g1} = -Ri_{a2}, \quad u_{g2} = -Ri_{a1},$$

$$v = u_{a1} - u_{g2} = E_a - u_{a2} + u_{g1},$$

где u_{g1} , u_{g2} , u_{a1} , u_{a2} — соответственно сеточные и анодные напряжения на лампах L_1 и L_2 (отсчитываемые относительно катодов этих ламп).

Введем безразмерные токи:

$$x = \frac{i_{a1}}{I_0} \quad \text{и} \quad y = \frac{i_{a2}}{I_0},$$

где I_0 — ток насыщения или какой-либо другой масштаб силы тока. Тогда

$$u_{g1} = -RI_0 y, \quad u_{g2} = -RI_0 x,$$

$$u_{a1} = RI_0 \frac{\psi(x) + y}{D}, \quad u_{a2} = RI_0 \frac{\psi(y) + x}{D},$$

где

$$\psi(z) = \frac{1}{RI_0} U(I_0 z)$$

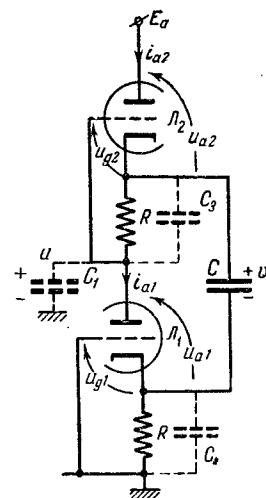


Рис. 548.

— безразмерная (обратная) характеристика лампы, дающая зависимость безразмерного управляющего напряжения $\frac{u_a + Du_a}{RI_0}$ от безразмерного анодного тока $\frac{i_a}{I_0}$; напряжение на конденсаторе C

$$v = \frac{RI_0}{D} \left\{ \psi(x) + Dx + y \right\} = \frac{RI_0}{D} \left\{ \frac{DE_a}{RI_0} - \psi(y) - Dy - x \right\}, \quad (10.35)$$

$$RC \frac{dv}{dt} = RI_0 (y - x);$$

используя (10.35) и разрешая относительно производных, имеем:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{D}{CR} \frac{x-y}{\Delta(x,y)} \left\{ 1 + D + \psi'(y) \right\}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{D}{CR} \frac{x-y}{\Delta(x,y)} \left\{ 1 + D + \psi'(x) \right\}, \end{cases} \quad (10.36)$$

где

$$\Delta(x,y) = [D + \psi'(x)][D + \psi'(y)] - 1. \quad (10.36a)$$

Из полученных уравнений видно, что мы имеем дело с системой первого порядка (с системой с $\frac{1}{2}$ степени свободы), поскольку переменные x и y связаны между собой в силу (10.35) соотношением

$$\Phi(x,y) \equiv \psi(x) + \psi(y) + (1+D)(x+y) = \frac{DE_a}{RI_0}, \quad (10.37)$$

а уравнения (10.36) эквивалентны друг другу (одно из них является следствием другого и соотношения (10.37)).

В силу трудности исключения y или x и полной равноправности переменных x и y мы будем отображать колебания системы движением изображающей точки по фазовой линии Φ :

$$\Phi(x,y) = \frac{DE_a}{RI_0},$$

построенной на плоскости x, y (точнее, в ее квадранте $x \geq 0, y \geq 0$). Эта фазовая линия, равно как и разбиение ее на траектории уравнений (10.36), симметрична относительно биссектрисы $y=x$. Далее, на ней

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+D+\psi'(x)}{1+D+\psi'(y)} < 0, \quad (10.36b)$$

т. е. y убывает с возрастанием x , так как $\psi'(x) > 0$ и $\psi'(y) > 0$; поэтому, если ψ' является непрерывной функцией, что мы будем предполагать, то фазовая линия Φ является всюду гладкой кривой и не может быть замкнутой. Соответственно рассматриваемая нами схема не может совершать непрерывных периодических колебаний, так как правые части уравнений (10.36) являются однозначными функциями точки фазовой линии Φ .

Рассмотрим движение изображающей точки по фазовой линии Φ . Прежде всего отметим, что уравнения (10.36) имеют единственное состояние равновесия (x_0, y_0) , лежащее на биссектрисе $x = y$ и определяемое согласно (10.37) уравнением: $\psi(x_0) + (1 + D)x_0 = \frac{1}{2} \frac{DE_a}{RI_0}$. Далее, согласно уравнениям (10.36) изображающая точка движется по линии Φ по направлению к состоянию равновесия (x_0, y_0) в тех точках линии Φ , где $\Delta(x, y) > 0$, и в направлении от этого состояния равновесия там, где $\Delta(x, y) < 0$. Поэтому состояние равновесия схемы устойчиво, если $\Delta(x_0, y_0) > 0$, и неустойчиво, если $\Delta(x_0, y_0) < 0$.

Построим на плоскости x, y симметричную относительно биссектрисы $x = y$ кривую

$$\Delta(x, y) = 0, \quad (10.38)$$

которую мы будем называть ради сокращения кривой Γ . Если эта кривая существует¹⁾, то могут представиться два случая:

1) Параметр $\frac{DE_a}{RI_0}$ таков, что фазовая линия Φ не пересекает кривую Γ . Тогда на Φ всюду $\Delta(x, y) > 0$, и изображающая точка (а следовательно, и рассматриваемая схема) при любых начальных условиях приближается при возрастании t к состоянию равновесия (x_0, y_0) ²⁾.

2) Параметр $\frac{DE_a}{RI_0}$ таков, что фазовая линия Φ пересекает кривую Γ . В этом случае на линии Φ существуют такие расположенные симметрично относительно прямой $y = x$ точки $\gamma(x', y')$, в которых $\Delta(x, y) = 0$ и которые вследствие этого являются точками стыка фазовых траекторий уравнений (10.36). Эти точки не являются состояниями равновесия, и в то же время к ним идут изображающие точки при любых начальных условиях (но на линии Φ нет траекторий, отходящих от точек γ).

Появление на фазовой линии точек стыка траекторий, как и всегда, означает «дефектность» принятой модели, означает существование таких параметров схемы, которые являются существенными для колебаний в схеме, но которыми мы «по наивности» («в силу их малости») пренебрегли, означает, наконец, возможность появления разрывных колебаний. Для рассмотрения последних нам нужно или учесть существенные малые параметры или же дополнить нашу

¹⁾ Она заведомо существует при $\psi'_{\min} < 1 - D$, так как тогда на биссектрисе $y = x$ имеются точки, в которых $\Delta(x, y) < 0$, а с другой стороны вблизи осей координат (при малых x или y) $\Delta(x, y) > 0$, поскольку там $\psi'(x)$ или $\psi'(y)$ могут быть сделаны сколь угодно большими; следовательно, в силу непрерывности функции $\Delta(x, y)$ будет существовать такое геометрическое место точек, в которых $\Delta(x, y) = 0$, т. е. кривая Γ . Если характеристика лампы имеет ток насыщения I_s , то $\psi(z) \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow I_s/I_0$ и кривая Γ будет замкнутой.

²⁾ Ту же картину мы получим при всех E_a , если кривой Γ не существует, ибо тогда $\Delta(x, y) > 0$ во всех точках любой фазовой линии Φ (для любого E_a).

«дефектную» модель первого порядка соответствующим образом сформулированной гипотезой скачка.

2. Постулат скачка. Пойдем сначала по пути дополнения «вырожденной» модели первого порядка (уравнений (10.36)) постулатом скачка. Пусть для определенности фазовая линия Φ пересекает кривую Γ в двух точках: $\gamma_1(x'_1, y'_1)$ и $\gamma_2(x'_2, y'_2)$, причем $x'_2 = y'_1$ и $y'_2 = x'_1$ (рис. 549). Так как эти точки стыка фазовых траекторий всегда являются граничными точками отрезков фазовой линии, на

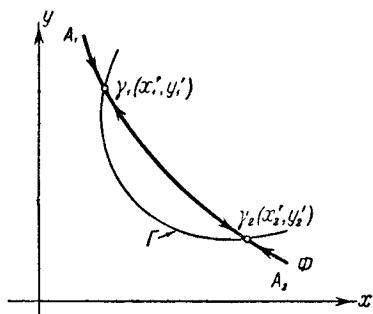


Рис. 549.

которой неучтенные нами малые параметры (или, точнее, некоторые из них) являются существенными для колебательных процессов в генераторе и на которой, следовательно, наша «вырожденная» модель *непригодна* для описания колебаний в схеме, то нам в первую очередь нужно указать те из трех участков $A_1\gamma_1$, $\gamma_1\gamma_2$ и γ_2A_2 фазовой линии Φ , на которых колебания схемы могут быть отображены уравнениями (10.36) с некоторой степенью точности, если эти паразитные параметры малы.

Мы примем следующую гипотезу о характере колебаний в схеме:

1) На участках $A_1\gamma_1$ и $A_2\gamma_2$ фазовой линии Φ , на которых $\Delta(x, y) > 0$, не учтенные нами малые, паразитные параметры несущественны для процессов в схеме, в силу чего там имеют место «медленные» изменения состояний схемы, описываемые уравнениями (10.36). Наоборот, на участке $\gamma_1\gamma_2$ имеют место только «быстрые» движения изображающей точки, уводящие ее с $\gamma_1\gamma_2$; там уравнения (10.36) не отображают не только количественно, но и качественно законов колебаний схемы¹⁾.

2) Когда изображающая точка, двигаясь по участку $A_1\gamma_1$ (или $A_2\gamma_2$) фазовой линии Φ в соответствии с уравнениями (10.36), приходит в точку γ_1 (или γ_2), то дальше она совершает мгновенный скачок в некоторую другую точку $B_1(x'', y'')$ (или в $B_2(x''_2, y''_2)$) внутри одного из интервалов $A_1\gamma_1$ или $A_2\gamma_2$ фазовой линии Φ , определяемую следующими условиями скачка:

$$\left. \begin{array}{l} y'' + \psi(x'') + Dx'' = y' + \psi(x') + Dx', \\ x'' + \psi(y'') + Dy'' = x' + \psi(y') + Dy', \end{array} \right\} \quad (10.39)$$

причем

$$\Delta(x'', y'') > 0.$$

¹⁾ В п. 4 эта гипотеза будет обоснована путем построения «добротенной» модели схемы при учете существенных паразитных емкостей. Некоторым обоснованием гипотезы может служить то обстоятельство, что наша

Эти условия скачка, как обычно, получаются из постулата ограниченности токов и напряжений в схеме, из которого следует, что напряжение v на конденсаторе C (см. (10.35)) должно оставаться неизменным во время скачка анодных токов ламп (напомним, что x и y пропорциональны соответственно i_{a1} и i_{a2}).

Если уравнения (10.39) определяют однозначно по заданной начальной точке скачка γ (по γ_1 или γ_2) концевую точку скачка B (B_1 или B_2) внутри интервалов $A_1 \gamma_1$ или $A_2 \gamma_2$, то сделанная нами гипотеза о характере движения изображающей точки позволит рассмотреть колебания схемы, начинающиеся из состояний, изображаемых точками интервалов $A_1 \gamma_1$ и $A_2 \gamma_2$ фазовой линии Φ . Эти колебания схемы, очевидно, будут периодическими и разрывными.

О существовании и количестве действительных ветвей кривой (B) — множества точек B , соответствующих согласно (10.39) точкам γ при всевозможных значениях параметра $\frac{DE_a}{RI_0}$,

в самом общем случае ничего сказать нельзя. Если кривая (B) существует, то она симметрична относительно биссектрисы $x=y$ и касается в точках последней кривой Γ ; кроме того, она — замкнутая, если характеристика ламп имеет насыщение. Заметим также, что первые два уравнения (10.39) определяют на плоскости x, y , кроме кривой (B) , еще кривую двойной кратности, совпадающую с Γ . Однако точки кривой Γ не лежат в области $\Delta(x, y) > 0$ и, следовательно, могут не рассматриваться.

В том случае, когда уравнения (10.39) по заданной точке γ (по заданной начальной точке скачка) определяют несколько точек B , в постулат скачка должны быть добавлены указания, дающие однозначное соответствие точек γ и B .

3. Разрывные колебания схемы. Для дальнейшего рассмотрения этих колебаний необходимо задаться конкретным аналитическим выражением характеристики анодного тока ламп. Будем аппроксимировать характеристику следующей функцией (рис. 550, а):

$$I_a = \frac{I_s}{2} + \frac{I_s}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi S}{I_s} (u_{\text{упр}} - u_0),$$

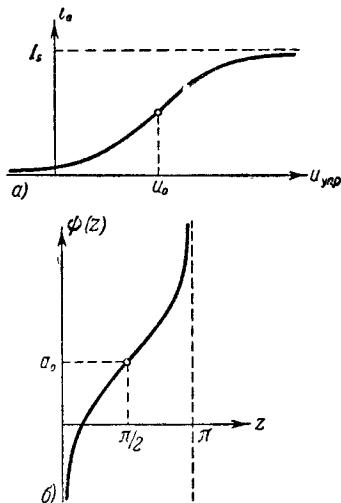


Рис. 550.

модель первого порядка является, по-видимому, доброкачественной (на ее фазовой линии нет точек стыка траекторий), если вся фазовая линия модели лежит в области, где $\Delta(x, y) > 0$. Именно в этой области лежат участки $A_1 \gamma_1$ и $A_2 \gamma_2$.

где I_s — ток насыщения, S — наибольшая крутизна характеристики и u_0 — то значение управляющего напряжения, при котором $i_a = \frac{1}{2} I_s$ и $\frac{di_a}{du_{\text{упр}}} = S$. Решая это уравнение относительно управляющего напряжения $u_{\text{упр}} = u_g + Du_a$ и полагая масштаб силы тока $I_0 = \frac{I_s}{\pi}$, т. е.

$$x = \pi \frac{i_{a1}}{I_s}, \quad y = \pi \frac{i_{a2}}{I_s} \quad (0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi),$$

мы получим для приведенных (обратных) характеристик ламп:

$$\frac{u_{g1} + Du_{a1}}{RI_0} = \psi(x) = a_0 - a \operatorname{ctg} x, \quad \frac{u_{g2} + Du_{a2}}{RI_0} = \psi(y) = a_0 - a \operatorname{ctg} y,$$

где $a = \frac{1}{RS}$ и $a_0 = \frac{\pi u_0}{RI_s}$; при этом $\psi' \geq a$ (рис. 550, б). Тогда согласно (10.36), (10.37), (10.38) и (10.39) мы получим:

уравнение фазовой линии Φ

$$(1 + D)(x + y) - a(\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y) = b, \quad (10.37')$$

где

$$b = \frac{\pi DE_a}{RI_s} - 2a_0;$$

уравнения движения изображающей точки по фазовой линии:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= -\frac{x-y}{\Delta(x,y)} \left\{ 1 + D + \frac{a}{\sin^2 y} \right\}, \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{x-y}{\Delta(x,y)} \left\{ 1 + D + \frac{a}{\sin^2 x} \right\}, \end{aligned} \quad (10.36')$$

где $\tau = \frac{Dt}{RC}$ — новое, безразмерное время;

уравнение кривой Γ — геометрического места начальных точек скачков

$$\Delta(x,y) \equiv \left(D + \frac{a}{\sin^2 x} \right) \left(D + \frac{a}{\sin^2 y} \right) - 1 = 0 \quad (10.38')$$

и условия скачка:

$$\begin{cases} y'' - a \operatorname{ctg} x'' + Dx'' = y' - a \operatorname{ctg} x' + Dx', \\ x'' - a \operatorname{ctg} y'' + Dy'' = x' - a \operatorname{ctg} y' + Dy'. \end{cases} \quad (10.39')$$

Так как анодные токи могут меняться только в пределах $0 \leq i_a \leq I_s$, то физический смысл имеют только те точки плоскости x, y , которые принадлежат квадрату $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$. Нетрудно также видеть, что фазовая линия Φ при любых значениях параметра

b проходит через вершины этого квадрата $A_1(0, \pi)$ и $A_2(\pi, 0)$ (рис. 551), причем при $b = \pi(1 + D)$ фазовой линией Φ является прямая $x + y = \pi$. Далее, так как $\Delta(x, y) \geq \Delta\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (D + a)^2 - 1$, то кривая Γ , определяемая уравнением (10.38), существует при $D + a < 1$, т. е. при

$$RS(1 - D) > 1;$$

кроме того, она является замкнутой кривой и симметрична относительно прямых:

$$\begin{aligned}x &= y; \quad x + y = \pi; \\x &= \frac{\pi}{2}; \quad y = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

При $D + a < 1$ кривая (B) , определяемая уравнениями (10.39'), также существует, лежит в области $\Delta(x, y) > 0$, т. е. вне кривой Γ , и является замкнутой и симметричной относительно прямых $x = y$ и $x + y = \pi$, причем каждой начальной

точке скачка γ соответствует единственная концевая точка скачка B , лежащая по другую сторону биссектрисы $x = y$.

Поэтому движение изображающей точки (начинающееся для определенности из точки a) носит следующий характер (рис. 551): начав двигаться из точки a , изображающая точка придет по фазовой линии $A_1\gamma_1$ в точку γ_1 , откуда скачком перейдет в точку B_1 на фазовой линии $A_2\gamma_2$. Далее, двигаясь по линии $A_2\gamma_2$, она снова попадет на кривую Γ в точке γ_2 , откуда произойдет скачок в точку B_2 , далее движение по фазовой линии $A_1\gamma_1$ до точки γ_1 и т. д. Таким образом, в схеме устанавливаются периодические разрывные колебания переменных x и y (т. е. анодных токов ламп и напряжений на сопротивлениях R), соответствующие «разрывному» предельному циклу $B_1\gamma_2 \rightarrow B_2\gamma_1 \rightarrow B_1$, состоящему из двух траекторий «медленного» движения $B_1\gamma_2$ и $B_2\gamma_1$ и двух скачков $\gamma_1 \rightarrow B_1$ и $\gamma_2 \rightarrow B_2$.

Выясним, при каких значениях параметров возможны разрывные колебания. Очевидно, для этого необходимо: 1) чтобы кривая Γ существовала (чтобы она имела действительные ветви); 2) константа b в уравнении (10.37') фазовой линии Φ должна быть такой, чтобы линия Φ пересекала кривую Γ . Как мы уже видели, кривая Γ существует, если

$$a < 1 - D.$$

Второе условие будет выполнено, если в состоянии равновесия схемы (x_0, y_0) , определяемом соотношениями:

$$x_0 = y_0, \quad 2(1 + D)x_0 - 2a \operatorname{ctg} x_0 = b,$$

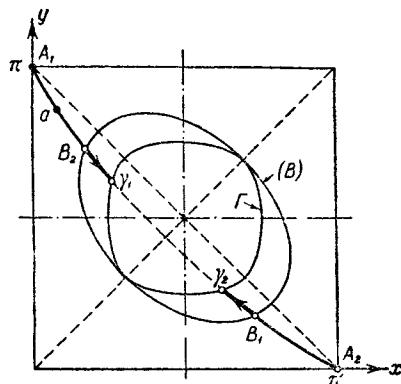


Рис. 551.

$$\Delta(x_0, y_0) = \left(D + \frac{a}{\sin^2 x_0}\right)^2 - 1 < 0, \text{ или, иначе говоря, } \sin x_0 \leq \sqrt{\frac{a}{1-D}}.$$

Подставляя последнее неравенство в уравнение, определяющее со-стояние равновесия, получим следующее условие, необходимое для того, чтобы линия Φ пересекала кривую Γ :

$$2(1+D) \arcsin \sqrt{\frac{a}{1-D}} - 2a \sqrt{\frac{1-D}{a} - 1} < b < 2(1+D) \left\{ \pi - \arcsin \sqrt{\frac{a}{1-D}} \right\} - 2a \sqrt{\frac{1-D}{a} - 1},$$

причем для \arcsin взято его значение, соответствующее первой четверти, а значение корня взято со знаком плюс.

Ввиду математических трудностей, связанных с вычислениями периода автоколебаний в случае движения изображающей точки по произвольной фазовой линии Φ , мы ограничимся получением выражения для периода при $b = \pi(1+D)$, когда фазовой линией является прямая $x+y=\pi$. Уравнения «медленного» движения изображающей точки по этой фазовой прямой (уравнения (10.36') при $x+y=\pi$), очевидно, запишутся в виде:

$$\frac{dx}{d\tau} = -\frac{dy}{d\tau} = \frac{\pi - 2x}{\frac{a}{\sin^2 x} + D - 1},$$

откуда период автоколебаний (в обычных единицах времени)

$$T = \frac{RC}{D} \left\{ 2a \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(\pi - 2x) \sin^2 x} - (1-D) \ln \frac{\pi - 2x_1}{\pi - 2x_2} \right\},$$

где x_1 и x_2 — соответственно абсциссы точек пересечения фазовой прямой $x+y=\pi$ с кривыми (B) и Γ , лежащих по одну сторону биссектрисы $x=y$.

4. Учет паразитных емкостей. В заключение параграфа покажем, как принятая нами гипотеза о характере колебаний в схеме Фрюгауфа вытекает из свойств «доброта-качественной» модели этой схемы, построенной при учете хотя бы одного существенного паразитного параметра. Среди различных паразитных параметров, малых, но существенных для колебательных процессов в схеме, по-видимому, основную роль играют паразитные емкости (они изображены на рис. 548 пунктиром). Для наших целей достаточно учесть одну из них (любая из этих емкостей делает невозможными мгновенные скачки анодных токов и напряжений на сопротивлениях R). Чтобы не нарушать симметрии схемы, мы будем учитывать ниже только малую паразитную емкость C_1 . В этом случае имеем следующие уравнения колебаний схемы

(в обозначениях рис. 548):

$$C \frac{dv}{dt} = i_{a2} + \frac{u_{g2}}{R} = -i_{a1} - \frac{u_{g1}}{R},$$

$$C_1 \frac{du}{dt} = -\frac{u_{g2}}{R} - i_{a1},$$

$$v = u_{a1} - u_{g2} = E_a - u_{a2} + u_{g1},$$

$$u = u_{a1} - u_{g1} = E_a - u_{a2} + u_{g2},$$

$$i_{a1} = f(u_{g1} + Du_{a1}), \quad i_{a2} = f(u_{g2} + Du_{a2}),$$

представляющих собой систему дифференциальных уравнений второго порядка. Если ввести безразмерные токи

$$x = \frac{i_{a1}}{I_0}, \quad y = \frac{i_{a2}}{I_0},$$

безразмерные напряжения на конденсаторах C и C_1

$$z = \frac{v}{RI_0}, \quad w = \frac{u}{RI_0},$$

безразмерное время

$$t' = \frac{t}{RC}$$

и малый параметр

$$\mu = \frac{C_1}{C},$$

то эти уравнения можно привести к следующей безразмерной форме:

$$\left. \begin{aligned} \mu \dot{w} &= \frac{Dx + y + \psi(x) - Dz}{1 - D} = F(w, z), \\ \dot{z} &= \frac{Dy - x - \psi(x) + Dz}{1 - D} = G(w, z), \end{aligned} \right\} \quad (10.40)$$

так как x , y связаны между собой и с w и z уравнениями:

$$(1 + D)(x + y) + \psi(x) + \psi(y) = \frac{DE_a}{RI_0} \quad (10.40a)$$

$$w = \frac{\psi(y) - \psi(x) + (1 + D)z}{1 - D}, \quad (10.40b)$$

выражающими их в виде некоторых функций w и z ($\psi = \frac{u_g + Du_a}{RI_0}$, как и раньше, — безразмерное управляющее напряжение, выраженное в виде функции безразмерного анодного тока лампы).

Возьмем в качестве фазовой поверхности полученной системы второго порядка цилиндрическую поверхность Φ^* , в простран-

стве x, y, z , определяемую уравнением (10.40а) (направляющей этой цилиндрической поверхности является линия Φ на плоскости x, y , а ее образующие параллельны оси z), и построим на ней линию F :

$$F(w, z) = 0,$$

— фазовую линию «вырожденной» ($\mu = 0$) системы (рис. 552).

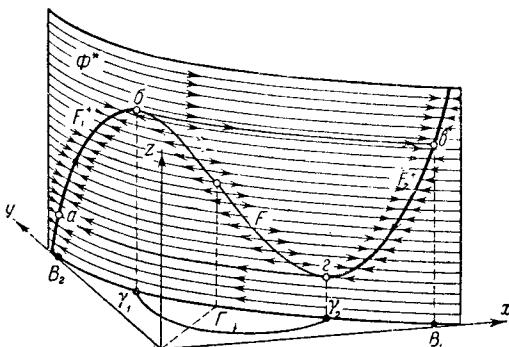


Рис. 552.

Вычислим $\frac{\partial F}{\partial w}$ на линии F . Дифференцируя по w (при постоянном z) функцию $F(w, z)$, а также выражения (10.40а) и (10.40б), имеем:

$$(1 - D) \frac{\partial F}{\partial w} = [D + \psi'(x)] \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial w},$$

$$[1 + D + \psi'(x)] \frac{\partial x}{\partial w} + [1 + D + \psi'(y)] \frac{\partial y}{\partial w} = 0,$$

$$-\psi'(x) \frac{\partial x}{\partial w} + \psi'(y) \frac{\partial y}{\partial w} = 1 - D,$$

откуда, исключая $\frac{\partial x}{\partial w}$ и $\frac{\partial y}{\partial w}$, получим:

$$\frac{\partial F}{\partial w} = - \frac{\Delta(x, y)}{[1 + D + \psi'(x)] \psi'(y) + [1 + D + \psi'(y)] \psi'(x)}.$$

Так как знаменатель этого выражения всегда положителен (поскольку $\psi' > 0$), то условие несущественности малой паразитной емкости C_1 ($\frac{\partial F}{\partial w} < 0$), очевидно, сводится к неравенству

$$\Delta(x, y) > 0,$$

которое выполняется на «восходящих» участках F^+ линии F ($\text{с } \frac{\partial z}{\partial x} > 0$)¹). Таким образом, только в малых окрестностях этих участков F^+ фазовой линии «вырожденной» системы можно пренебречь малой паразитной емкостью C_1 (разумеется, при $C_1 \ll C$), — только там фазовые траектории «медленных» движений (с конечными фазовыми скоростями при $\mu \rightarrow +0$) близки к линии F и движение изображающей точки отображается (при $C_1 \ll C$) «вырожденными» уравнениями:

$$F = 0 \quad \text{или} \quad z = \frac{y + Dx + \psi'(x)}{D}$$

и

$$\dot{z} = y - x,$$

эквивалентными, как нетрудно видеть, уравнениям (10.36). Тем самым мы получили обоснование первого пункта принятой в п. 2 гипотезы о характере колебаний схемы.

Далее, вне линии F $\dot{w} \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow +0$, причем $\dot{w} \rightarrow +\infty$ над линией F и $\dot{w} \rightarrow -\infty$ под этой линией, в то время как \dot{z} остается конечным. Следовательно, область фазовой поверхности Φ^* вне линии F заполнена при $\mu \rightarrow +0$ фазовыми траекториями «быстрых» движений $z = \text{const}$, по которым изображающая точка движется «скакком» вправо (в сторону возрастания w и x) над кривой F и влево (в сторону уменьшения w и x) под ней, т. е. на участки F^+ линии F .

Если схема самовозбуждается, т. е. если в состоянии равновесия $\Delta < 0$, то линия F имеет точки максимумов и минимумов z , которые одновременно являются граничными точками фазовых траекторий «медленных» движений F^+ , так как в них $\Delta(x, y)$ и $\frac{\partial F}{\partial w}$ обращаются в нуль²). В этих точках «медленное» движение изображающей

¹⁾ На линии F

$$1 + D + \psi'(x) + [1 + D + \psi'(y)] \frac{dy}{dx} = 0$$

и

$$\begin{aligned} D \frac{dz}{dx} &= D + \psi'(x) + \frac{dy}{dx} = D + \psi'(x) - \frac{1 + D + \psi'(x)}{1 + D + \psi'(y)} = \\ &= \frac{\Delta(x, y)}{1 + D + \psi'(y)}. \end{aligned}$$

Так как $1 + D + \psi'(y) > 0$, то знак $\left(\frac{dz}{dx}\right)_{F=0}$ совпадает со знаком $\Delta(x, y)$.

²⁾ Рис. 552 дан для случая, когда линия F имеет одну точку максимума (точку δ) и одну точку минимума z (точку ϱ) и, следовательно, два участка F^+ : F_1^+ и F_2^+ . Проекции этих точек на плоскость x, y лежат, очевидно, на линии Γ ,

точки переходит в «быстрое», скачкообразное по соответствующей траектории $z = \text{const}$, приводящей изображающую точку вновь на один из участков F^+ . Во время этих скачков z , т. е. напряжение v на конденсаторе C , остается неизменным (при $\mu \rightarrow +0$), что дает условия скачка (10.39).

Разбиение фазовой поверхности на траектории «быстрых» движений обеспечивает, в отличие от условий скачка (10.39), однозначность соответствия начальных и концевых точек скачков во всех случаях, включая и те, когда линия F имеет больше, чем по одной точке максимума и минимума z . Именно, в соответствии с этим разбиением из точки максимума (минимума) z на кривой F скачок совершается по траектории $z = \text{const}$ вправо (влево) в ближайшую точку пересечения прямой $z = \text{const}$ с линией F .

Предельное (при $\mu \rightarrow +0$) разбиение фазовой поверхности Φ^* на траектории, к которому близко разбиение этой поверхности при $\mu \ll 1$, т. е. при $C_1 \ll C$, для случая самовозбуждающейся схемы приведено на рис. 552. Очевидно, при любых начальных условиях в схеме устанавливаются разрывные автоколебания, отображаемые на фазовой поверхности предельным циклом *абвга* (его проекции на плоскость x, y и являлся разрывный предельный цикл $B_2\gamma_1 \dashrightarrow B_2\gamma_1 \dashrightarrow B_2$).

Так, учитывая хотя бы одну из существенных паразитных емкостей, мы получили «добротаочественную» модель схемы Фрюгауфа, позволяющую полностью рассмотреть колебания схемы без каких-либо дополнительных гипотез и предположений.

§ 9. Мультивибратор с индуктивностью в анодной цепи

Мы уже видели, что задача рассмотрения автоколебательной системы значительно упрощается, если один из существенных колебательных параметров мал, вследствие чего движения системы распадаются на сравнительно простые «быстрые» и «медленные» движения. Первые из них описываются уравнениями (10.17) или соответствующим образом сформулированным постулатом скачка; вторые — уравнениями (10.16), составленными без учета паразитных параметров и имеющими поэтому пониженный порядок.

Мы перейдем теперь к рассмотрению более сложных систем с разрывными колебаниями, уравнения «медленных» движений которых имеют второй порядок. В качестве первого примера возьмем знакомую нам схему мультивибратора с одной RC -цепью, но с индуктивной анодной нагрузкой (рис. 553) (для некоторого упрощения задачи мы будем пренебрегать омическим сопротивлением анодной нагрузки).

1. Уравнения «медленных» движений. Пренебрегая всеми паразитными параметрами, сеточными токами и анодной реакцией, мы