точки переходит в «быстрое», скачкообразное по соответствующей траектории $z = \text{const}$, приводящей изображающую точку вновь на один из участков F^+. Во время этих скачков z, т. е. напряжение v на конденсаторе C, остается неизменным (при $\mu \to +0$), что дает условия скачка (10.39).

Разбиение фазовой поверхности на траектории «быстрых» движений обеспечивает, в отличие от условий скачка (10.39), однозначность соответствия начальных и концевых точек скачков во всех случаях, включая и те, когда линия F имеет больше, чем по одной точке максимума и минимума z. Именно, в соответствии с этим разбиением из точки максимума (минимума) z на кривой F скачок совершается по траектории $z = \text{const}$ вправо (влево) в *ближайшую* точку пересечения прямой $z = \text{const}$ с линией F.

Предельное (при $\mu \to +0$) разбиение фазовой поверхности Φ^* на траектории, к которому близко разбиение этой поверхности при $\mu \ll 1$, т. е. при $C_1 \ll C$, для случая самовозбуждающейся схемы приведено на рис. 552. Очевидно, при любых начальных условиях в схеме устанавливаются разрывные автоколебания, отображаемые на фазовой поверхности предельным циклом *абвга* (его проекцией на плоскость x, y и являлся разрывный предельный цикл $B_2\gamma_1 \dashrightarrow \dashrightarrow B_2\gamma_1 \dashrightarrow B_2$).

Так, учитывая хотя бы одну из существенных паразитных емкостей, мы получили «доброкачественную» модель схемы Фрюгауфа, позволяющую полностью рассмотреть колебания схемы без каких-либо дополнительных гипотез и предположений.

§ 9. Мультивибратор с индуктивностью в анодной цепи

Мы уже видели, что задача рассмотрения автоколебательной системы значительно упрощается, если один из существенных колебательных параметров мал, вследствие чего движения системы распадаются на сравнительно простые «быстрые» и «медленные» движения. Первые из них описываются уравнениями (10.17) или соответствующим образом сформулированным постулатом скачка; вторые — уравнениями (10.16), составленными без учета паразитных параметров и имеющими поэтому пониженный порядок.

Мы перейдем теперь к рассмотрению более сложных систем с разрывными колебаниями, уравнения «медленных» движений которых имеют второй порядок. В качестве первого примера возьмем знакомую нам схему мультивибратора с одной RC-цепью, но с индуктивной анодной нагрузкой (рис. 553) (для некоторого упрощения задачи мы будем пренебрегать омическим сопротивлением анодной нагрузки).

1. Уравнения «медленных» движений. Пренебрегая всеми паразитными параметрами, сеточными токами и анодной реакцией, мы

получим на основании законов Кирхгофа следующие уравнения колебаний мультивибратора (в обозначениях рис. 553):

$$L\frac{di}{dt} = E_a - (u + v),$$

$$i = i_a(u) + \frac{u - E_g}{R},$$

$$C\frac{dv}{dt} = \frac{u - E_g}{R},$$

которые являются уравнениями второго порядка (соответственно состояния мультивибратора мы можем отображать точками на фазовой

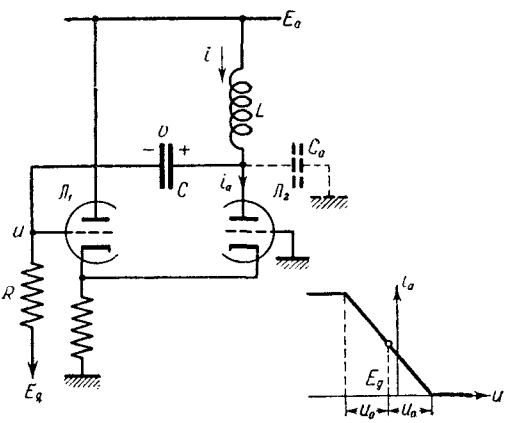

Рис. 553.

плоскости u, v). Схема, очевидно, имеет единственное состояние равновесия, в котором

$$u = E_g, \quad i_a = i_a^0 = i_a(E_g), \quad i = i_a^0, \quad v = v_0 = E_a - E_g.$$

Для упрощения рассмотрения колебаний мультивибратора мы аппроксимируем характеристику ламповой группы $i_a = i_a(u)$ кусочно-линейной функцией (рис. 553), причем будем считать, что сеточное смещение E_g выбрано так, чтобы рабочая точка, соответствующая состоянию равновесия, лежала в середине падающего участка характеристики.

Введем новые безразмерные переменные x, y, z, пропорциональные переменным составляющим напряжений u и v и тока i:

$$x = \frac{u - E_g}{u_0}, \quad y = \beta\frac{v - v_0}{u_0}, \quad z = \frac{R}{u_0}(i - i_a^0),$$

где u_0 — половина «длины» падающего участка характеристики ламповой группы, новое безразмерное время

$$t_{\text{нов}} = \frac{t}{\sqrt{LC}},$$

а также безразмерную характеристику ламповой группы

$$\varphi(x) = \frac{1}{u_0 S}\left[i_a(E_g + u_0 x) - i_a(E_g)\right] = \begin{cases} +1 \text{ при } x < -1, \\ -x \text{ при } |x| \leqslant 1, \\ -1 \text{ при } x > +1, \end{cases}$$

где S — абсолютное значение крутизны характеристики на падающем участке. Тогда, выбрав $\beta = R\sqrt{\frac{C}{L}}$, мы приведем уравнения мультивибратора к следующей безразмерной форме:

$$\left.\begin{aligned} \dot{z} &= -2hx - y, \\ z &= x + k\varphi(x), \\ \dot{y} &= x, \end{aligned}\right\} \tag{10.41}$$

где

$$k = SR \quad \text{и} \quad h = \frac{\beta}{2} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}},$$

или, исключая z,

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{2hx + y}{1 + k\varphi'(x)}, \\ \dot{y} &= x. \end{aligned}\right\} \tag{10.41а}$$

Фазовая плоскость x, y при кусочно-линейной характеристике ламповой группы $\varphi(x)$, очевидно, распадается на три области линейности: 1) $|x| < 1$; 2) $x > +1$ и 3) $x < -1$. Так как при $|x| < 1$ $\varphi'(x) = -1$, то в первой области, содержащей единственное состояние равновесия ($x = 0$, $y = 0$), уравнения (10.41а) запишутся в виде линейной системы:

$$\begin{aligned} (1-k)\,\dot{x} &= -2hx - y, \\ \dot{y} &= x \end{aligned}$$

с характеристическим уравнением

$$(1-k)\lambda^2 + 2h\lambda + 1 = 0.$$

Поэтому состояние равновесия (0,0) устойчиво при $k < 1$ и неустойчиво при $k > 1$.

Ниже мы будем рассматривать только последний случай $k > 1$ — случай самовозбуждающегося мультивибратора (нетрудно видеть, что при $k < 1$ все траектории идут при возрастании t к единственному и устойчивому состоянию равновесия, т. е. в этом случае нет никаких автоколебаний).

Рассмотрим ход фазовых траекторий системы уравнений (10.41а) вблизи прямых $x = \pm 1$, являющихся границами областей линейности. Так как при переходе через эти прямые выражение $1 + k\varphi'(x)$ изменяет знак (поскольку $k > 1$), то точки этих прямых или, точнее, точки полупрямых $x = +1$, $y > -1$ и $x = -1$, $y < +1$ являются точками стыка фазовых траекторий. Эти точки не являются состояниями равновесия, но к ним фазовые траектории подходят с обеих сторон.

Таким образом, пренебрегая паразитными параметрами, мы получили «дефектную» модель мультивибратора — модель, не позволяющую провести рассмотрение колебаний мультивибратора: уравнения (10.41а) «заводят» систему в такие состояния на прямых $x = \pm 1$, которые не являются состояниями равновесия и из которых, с другой стороны, нет выходящих фазовых траекторий. Поэтому для получения «доброкачественной» модели мультивибратора нам необходимо или дополнить уравнения (10.41а) соответствующим постулатом скачка или же учесть существенные паразитные параметры схемы.

В задаче о колебаниях судна, управляемого двухпозиционным авторулевым (гл. VIII, § 6), мы также получили на фазовой плоскости линию стыка фазовых траекторий и затем доопределили систему дифференциальных уравнений движения системы так, чтобы стало возможным движение изображающей точки и вдоль этой линии; это движение изображающей точки соответствовало наблюдаемому на практике так называемому «скользящему» режиму работы двухпозиционного авторулевого.

В рассматриваемой задаче о мультивибраторе такое доопределение движения изображающей точки вдоль полупрямых $x = +1$, $y > -1$ и $x = -1$, $y < +1$ ничего, кроме ухода в бесконечность, дать не может, т. е. также не приводит к результатам, хотя бы качественно согласующимся с экспериментальными данными.

Заметим также, что точно такая же «дефектная» модель (с линиями стыка фазовых траекторий) получается и для мультивибратора с анодной нагрузкой, состоящей из сопротивления R_a и индуктивности L. Поэтому учет в мультивибраторе с одним RC-звеном (§ 4 настоящей главы) паразитной индуктивности анодной цепи не приведет к построению «доброкачественной» модели мультивибратора.

2. Уравнения мультивибратора при учете паразитной емкости C_a. Составим уравнения колебаний мультивибратора, учитывая малую паразитную емкость анодного узла C_a (ее учета, как мы сейчас увидим, будет достаточно для построения «доброкачественной» модели мультивибратора). На основании законов Кирхгофа имеем:

$$L\frac{di}{dt} = E_a - (u + v),$$

$$i = i_a(u) + C\frac{dv}{dt} + C_a\frac{d(u+v)}{dt},$$

$$C\frac{dv}{dt} = \frac{u - E_g}{R},$$

или в переменных x, y, z, $t_{\text{нов}}$, пренебрегая малой емкостью C_a в выражении $C+C_a$:

$$\left.\begin{aligned} \mu\dot{x} &= z - x - k\varphi(x) \equiv F(x, z), \\ \dot{y} &= x, \\ \dot{z} &= -2hx - y, \end{aligned}\right\} \tag{10.42}$$

где $\mu = \dfrac{RC_a}{\sqrt{LC}}$ — малый положительный параметр, характеризующий малость паразитной емкости C_a (остальные обозначения те же, что и в (10.41)).

Полагая $\mu = 0$, т. е. пренебрегая малой паразитной емкостью C_a, мы получим снова уравнения (10.41) или (10.41а) — уравнения «медленных» движений системы, которые, однако, справедливы не на всей фазовой поверхности F «вырожденной» системы (с $C_a = 0$):

$$F(x, z) = 0 \quad \text{или} \quad z = x + k\varphi(x),$$

а только на той ее части F^+, на которой выполняется условие несущественности малой паразитной емкости C_a:

$$F'_x = -1 - k\varphi'(x) < 0,$$

т. е. только при $|x| > 1$[1]).

Вне малой окрестности поверхности F^+ происходят «быстрые» движения изображающей точки (там при $\mu \to +0$ $\dot{x} \to \infty$, т. е. x изменяется скачком). При этом траектории «быстрых» движений при малых μ близки к прямым $y = \text{const}$, $z = \text{const}$ и идут в сторону увеличения x над поверхностью F (при $z > x + k\varphi(x)$ и при $\mu \to +0$ $\dot{x} \to +\infty$) и в сторону уменьшения x под ней (при $z < x + k\varphi(x)$). Предельное (для $\mu \to +0$) разбиение фазового пространства x, y, z на траектории системы (10.42), к которому близко разбиение на траектории при достаточно малых μ, качественно изображено на рис. 554; в частности, там изображен предельный цикл, который, как мы увидим ниже, действительно существует при $\mu \to +0$.

Таким образом, рассматривая модель мультивибратора, полученную при учете малой паразитной емкости C_a, мы приходим к следующим выводам относительно характера колебаний схемы (при $C_a \to +0$):

---

[1]) Мы рассматриваем случай $k > 1$; тогда при $|x| < 1$ $F'_x = k - 1 > 0$. Если же $k < 1$, то условие несущественности малой паразитной емкости C_a выполняется на всей поверхности $F = 0$; соответственно на фазовой плоскости x, y модели мультивибратора без емкости C_a нет линий стыка фазовых траекторий.

Заметим, что фазовая поверхность F «вырожденной» модели и плоскость x, y гомеоморфны друг другу (их точки соответствуют друг другу взаимно однозначно и непрерывно). Поэтому мы можем отображать «медленные» движения системы движением изображающей точки не по поверхности F^+, а по плоскости x, y ($|x| > 1$).

1) Схема совершает разрывные колебания, так как все траектории «быстрых» движений идут к поверхности F^+ и переходят, следовательно, в траектории «медленных» движений, которые в свою очередь переходят снова в траектории «быстрых» движений на границах поверхности F^-, т. е. при $x = \pm 1$.

2) «Медленные» движения изображающей точки имеют место только на поверхности F^-:

$$z = x + k\varphi(x), \quad |x| > 1;$$

только при $|x| > 1$ уравнения (10.41) или (10.41а) отображают законы колебаний схемы [1]).

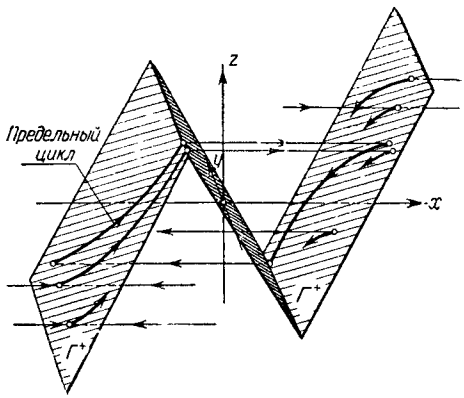

Рис. 554.

3) Во время «быстрых» движений (скачков) изображающей точки переменное x (или напряжение u на сетке лампы $Л_1$) изменяется мгновенно, а переменные y и z (т. е. напряжение v на конденсаторе C и сила тока i в анодной нагрузке) остаются неизменными [2]).

3. Разрывные колебания схемы. Проведем детальное рассмотрение разрывных колебаний схемы, опираясь на только что сформулированные особенности колебаний схемы, и, в частности, докажем существование автоколебаний.

Как уже указывалось выше, «медленные» движения системы имеют место только при $|x| > 1$, поэтому они описываются линейными уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -2hx - y, \\ \dot{y} &= x, \end{aligned}\right\} \qquad (10.41б)$$

поскольку $\varphi'(x) = 0$ при $|x| > 1$. Так как характеристическое уравнение для системы (10.41б) записывается в виде:

$$\lambda^2 + 2h\lambda + 1 = 0, \qquad (10.43)$$

то характер поведения схемы во время «медленных» изменений состояния зависит только от величины параметра $h = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$. Именно,

---

[1]) Наоборот, фазовые траектории «быстрых» движений отходят от участка F^- ($|x| < 1$) фазовой поверхности F «вырожденной» модели, поэтому там нет никаких «медленных» движений и уравнения (10.41) не справедливы.

[2]) Условия неизменности напряжения v и силы тока i при скачке состояния системы вытекают и из дополнительного предположения об ограниченности напряжений и токов в схеме.

если $h>1$, т. е. если $L<\frac{1}{4}CR^2$, то оба корня характеристического уравнения (10.43) будут действительными и отрицательными, и система будет себя вести как апериодическая. Ее фазовые траектории вне заштрихованной полосы $|x|<1$, для которой уравнения (10.41б) не справедливы, будут иметь вид такой же, как и в случае линейного осциллятора, особая точка которого является устойчивым узлом (рис. 555) [1]). Если же $h<1$ (или, иначе, $L>\frac{1}{4}CR^2$), то система будет вести себя (во время «медленного» движения) как линейная колебательная система с особой точкой типа устойчивого фокуса в начале координат и фазовые траектории вне заштрихованной полосы $|x|<1$ будут иметь вид кусков спиралей (рис. 556). И в том, и в другом случае изоклиной вертикальных касательных является прямая $y=-2hx$, а изоклиной горизонтальных касательных — ось $x=0$ (последняя, однако, лежит вне области применимости уравнений (10.41б)). Стрелками на фазовых траекториях (рис. 555 и 556) указано направление движения изображающей точки, определенное по тому, каков знак $\dot{x}$ или $\dot{y}$ в той или иной области. Заметим, что представляющая точка двигается по фазовым траекториям уравнений (10.41б) не в направлении вращения часовой стрелки, как обычно, а против этого направления, потому что y не есть просто $\dot{x}$, а связано с x и $\dot{x}$ уравнением

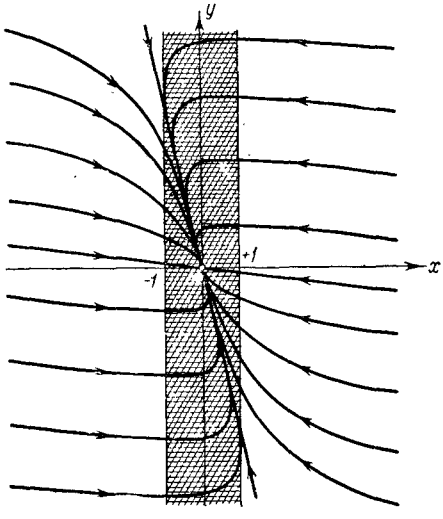

Рис. 555.

$$y=-\dot{x}-2hx.$$

Нетрудно видеть, что независимо от значения параметра h фазовые траектории «медленных» движений выходят на прямые $x=\pm 1$, откуда изображающая точка уходит скачком по соответствующей траектории «быстрого» движения: $y=\text{const}$ (и $z=\text{const}$). Место, куда придет изображающая точка в результате скачка, определяется

[1]) Мы будем отображать колебания схемы движением изображающей точки не в трехмерном фазовом пространстве x, y, z, а по плоскости x, y. Ясно, что при таком рассмотрении фазовые траектории «медленных» и «быстрых» движений на плоскости x, y, являющиеся проекциями фазовых траекторий в пространстве x, y, z, могут пересекаться между собой.

условиями неизменности при скачке переменных y и z. Поскольку концевая точка скачка (в пространстве x, y, z) лежит снова на

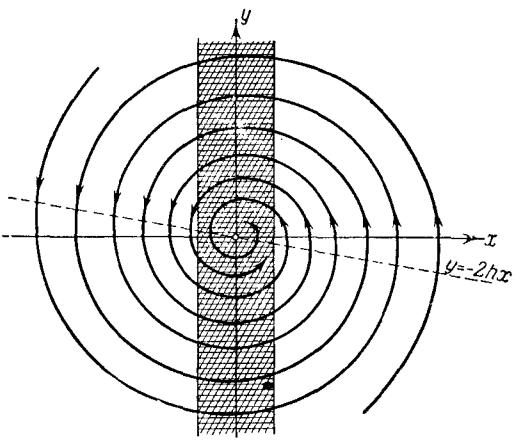

Рис. 556.

поверхности $z = x + k\varphi(x)$, ее координаты (x_2, y_2) связаны с координатами начальной точки скачка (x_1, y_1), где $x_1 = \pm 1$, уравнениями

$$y_2 = y_1,$$
$$x_2 + k\varphi(x_2) = x_1 + k\varphi(x_1)$$

и определяются этими уравнениями однозначно, а именно:

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= y_1, \\ x_2 &= -(2k-1)x_1. \end{aligned}\right\} \tag{10.44}$$

Следовательно, с прямой $x = +1$ изображающая точка перескакивает по траектории скачка $y = \text{const}$ в точку прямой $x = -(2k-1)$, и наоборот, с прямой $x = -1$ — на прямую $x = 2k-1$. После скачка изображающая точка движется дальше снова по фазовой траектории «медленного» движения, пока снова не придет на прямую $x = \pm 1$, и т. д. Таким путем из кусков фазовых траекторий «медленных» движений и скачков составляются фазовые траектории (точнее, положительные полутраектории) мультивибратора, отображающие его разрывные колебания (рис. 557 и 558). Покажем, что эти траектории асимптотически приближаются (при $t \to +\infty$) к устойчивому предельному циклу.

Мы начнем наше рассмотрение со случая достаточно большой индуктивности L ($L > \frac{1}{4}CR^2$, т. е. $h < 1$). Для этого случая мы получаем разбиение плоскости x, y на траектории, изображенное на

рис. 557 (траектории состоят из дуг спиралей «медленных» движений и из отрезков прямолинейных фазовых траекторий скачков:

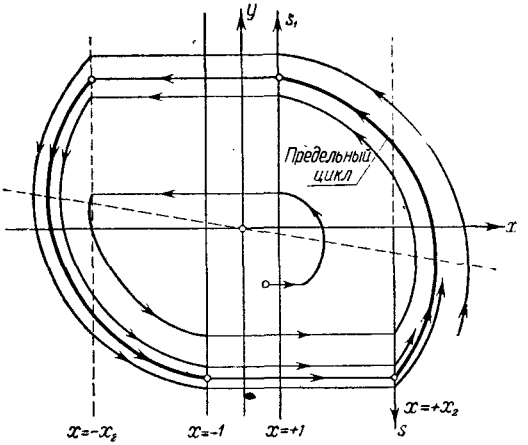

Рис. 557.

$y = \text{const}$). Это разбиение симметрично относительно начала координат, так как и уравнения «медленных» движений (10.41б), и условия скачка (10.44) инвариантны относительно замены переменных x, y на $-x$, $-y$. Поэтому для рассмотрения колебаний схемы (и, в частности, для доказательства существования и устойчивости предельного цикла) нам достаточно исследовать преобразование $s_1 = f(s)$ точек $y = -s$ прямой $x = x_2 = 2k - 1$ в точки $y = s_1$ прямой $x = +1$, осуществляемое фазовыми траекториями «медленных» движений на полуплоскости $x > 1$. Неподвижная точка s этого преобразования, очевидно, соответствует предельному циклу.

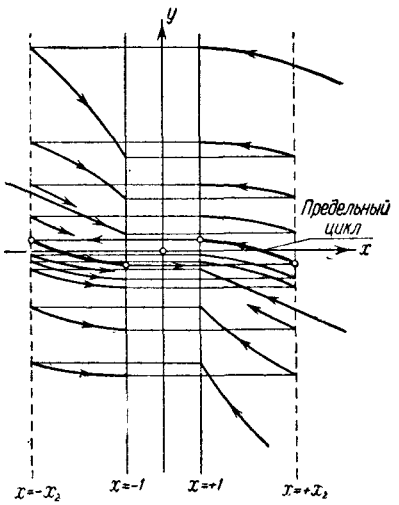

Рис. 558.

Рассмотрим фазовую траекторию системы уравнений (10.41б), выходящую при $t = 0$ из точки $(x_2, -s)$:

$$x = e^{-ht}\left[x_2 \cos \omega t - \frac{hx_2 - s}{\omega} \sin \omega t\right],$$

$$y = e^{-ht}\left[-s \cos \omega t + \frac{x_2 - hs}{\omega} \sin \omega t\right],$$

где $\omega = \sqrt{1-h^2}$ (при $h<1$ характеристическое уравнение (10.43) имеет комплексно сопряженные корни $\lambda_{1,2} = -h \pm j\omega$). Пусть при $t = \frac{\tau}{\omega}$ изображающая точка, двигаясь по этой траектории, придет на прямую $x = +1$ в точке $y = s_1$ (очевидно, $0 < \tau < \pi$). Тогда

$$1 = e^{-\gamma\tau}\left[x_2 \cos\tau + \left(\frac{s}{\omega} - \gamma x_2\right)\sin\tau\right],$$

$$s_1 = e^{-\gamma\tau}\left[-s\cos\tau + \left(\frac{x_2}{\omega} - \gamma s\right)\sin\tau\right],$$

где $\gamma = \frac{h}{\omega} = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}$. Разрешая эти соотношения относительно s и s_1, мы получим следующие параметрические выражения для функции соответствия $s_1 = f(s)$:

$$\left.\begin{aligned} s &= \omega\,\frac{e^{\gamma\tau} - x_2(\cos\tau - \gamma\sin\tau)}{\sin\tau}, \\ s_1 &= \omega\,\frac{x_2 e^{-\gamma\tau} - (\cos\tau + \gamma\sin\tau)}{\sin\tau}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.45)$$

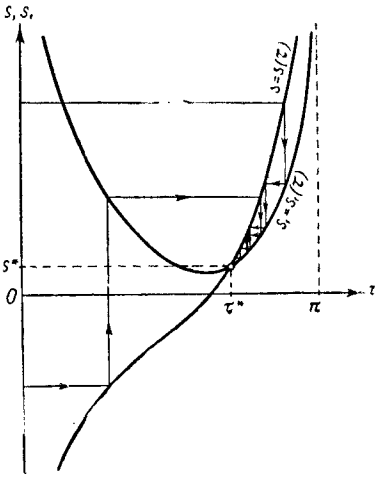

Рис. 559.

Графики полученных непрерывных (при $0 < \tau < \pi$) функций качественно изображены на рис. 559. Так как при $\tau \to +0$ $s \to -\infty$, $s_1 \to +\infty$, а при $\tau \to \pi - 0$ $s \to +\infty$, $s_1 \to +\infty$, причем $s_1 < s$, то существует (по крайней мере одна) точка пересечения этих кривых — неподвижная точка s^* рассматриваемого точечного преобразования. Значение параметра τ для нее ($\tau = \tau^*$), очевидно, определяется уравнением

$$e^{\gamma\tau} - x_2(\cos\tau - \gamma\sin\tau) = x_2 e^{-\gamma\tau} - (\cos\tau + \gamma\sin\tau)$$

или

$$e^{\gamma\tau} + \cos\tau + \gamma\sin\tau = x_2\left[e^{-\gamma\tau} + \cos\tau - \gamma\sin\tau\right] \qquad (10.46)$$

и притом, как нетрудно видеть, единственным образом. Итак, точечное преобразование $s_1 = f(s)$ имеет единственную неподвижную точку s^*, а на плоскости x, y имеется единственный предельный цикл. Этот предельный цикл устойчив, так как в неподвижной точке

$$\left|\frac{ds_1}{ds}\right| < 1.$$

Таким образом, мы убеждаемся, что в рассматриваемой схеме устанавливаются и будут происходить разрывные автоколебания. Форма этих колебаний, вообще говоря, будет заметно отличаться от синусоидальной, так как x (т. е. напряжение на сетке лампы $Л_1$),

а вместе с ним и напряжение на аноде лампы $Л_2$ в некоторых областях изменяются скачкообразно.

Период автоколебаний в силу симметрии разбиения на траектории плоскости x, y, очевидно, равен $2\frac{\tau^*}{\omega}$ в единицах безразмерного времени, или

$$T=\frac{2\sqrt{LC}}{\sqrt{1-h^2}}\tau^* \qquad (10.47)$$

в обычных единицах (как и раньше, мы пренебрегаем при подсчете периода автоколебаний длительностью «быстрых» движений — скачков). Ясно, что T меньше $T'=\frac{2\pi\sqrt{LC}}{\sqrt{1-h^2}}$ — «условного периода» затухающих колебаний осциллятора, описываемого всюду уравнениями (10.41б), так как из-за наличия мгновенных скачков изображающая точка делает оборот быстрее, чем изображающая точка такого осциллятора (именно из-за этого $\tau^*<\pi$).

Подсчитаем период и амплитуду автоколебаний для случая очень больших $L\left(L\gg\frac{1}{4}CR^2\right)$, когда $h\ll 1$ (и $\gamma\ll 1$). Полагая в (10.46) $\gamma=0$, мы получим нулевое приближение для τ^*:

$$\tau^*=\pi,$$

и период автоколебаний T при достаточно больших L близок к периоду колебаний LC-контура без сопротивления — к $T_0=2\pi\sqrt{LC}$. Для определения поправки на период при малых γ введем

$$a=\pi-\tau^*.$$

Тогда, подставляя $\tau^*=\pi-a$ в (10.46), мы получим для a уравнение

$$e^{\gamma(\pi-a)}-\cos a+\gamma\sin a=x_2\left[e^{-\gamma(\pi-a)}-\cos a-\gamma\sin a\right] \qquad (10.46а)$$

или, разлагая функции, входящие в уравнение, в степенные ряды:

$$\gamma\pi+\frac{\gamma^2(\pi-a)^2}{2}+\ldots+\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{4!}+\ldots-\gamma\frac{a^3}{3!}+\ldots=$$
$$=x_2\left[-\gamma\pi+\frac{\gamma^2(\pi-a)^2}{2}+\ldots+\frac{a^2}{2}-\frac{a^4}{4!}+\ldots+\gamma\frac{a^3}{3!}-\ldots\right] \qquad (10.46б)$$

Отсюда следует, что a имеет порядок величины $\gamma^{1/2}$ и поэтому определяется соотношением

$$\gamma\pi+\frac{a^2}{2}=x_2\left(-\gamma\pi+\frac{a^2}{2}\right)+O(\gamma^2),$$

т. е.

$$a = \sqrt{\frac{2\pi k}{k-1}}\,\gamma^{\frac{1}{2}} + O(\gamma^{\frac{3}{2}})\ ^{1}). \qquad (10.47а)$$

Таким образом, при $L \gg \frac{1}{4} CR^2$ (т. е. при $h = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \ll 1$)

$$T = 2\pi\sqrt{LC}\left\{1 - \sqrt{\frac{2k}{\pi(k-1)}}\,h^{\frac{1}{2}} + O(h^{\frac{3}{2}})\right\}. \qquad (10.47б)$$

Как видим, поправка на период имеет порядок величины $h^{1/2}$ и поэтому сравнительно велика (для сравнения напомним, что в обычном ламповом генераторе поправка на период является величиной порядка h^2).

Подставляя (10.47а) в (10.45), получим для $\bar{s}$, т. е. для амплитуды автоколебаний переменного y:

$$\bar{s} = \frac{2k + O(\gamma)}{\sin a} = \sqrt{\frac{2k(k-1)}{\pi h}} + O(h^{\frac{1}{2}}).$$

Так как при малых h фазовые траектории «медленных» движений близки к окружностям $x^2 + y^2 = \text{const}$, то приближенно такой же будет и амплитуда автоколебаний переменного x. Переходя от безразмерных переменных к размерным, мы получим для амплитуд автоколебаний напряжений u (на сетке лампы L_1) и v (на конденсаторе C) следующие выражения:

$$U_0 = u_0\bar{s} = u_0\sqrt{\frac{2k(k-1)}{\pi}}\,h^{-\frac{1}{2}} + O(h^{\frac{1}{2}}),$$

$$V_0 = u_0\frac{\bar{s}}{2h} = u_0\sqrt{\frac{k(k-1)}{2\pi}}\,h^{-\frac{3}{2}} + O(h^{-\frac{1}{2}}).$$

---

[1]) Нетрудно получить и следующий член в асимптотическом разложении поправки на период. Положив в (10.46б) $a = a_0\gamma^{1/2} + a_1$, где $a_1 = O(\gamma^{3/2})$ и $a_0 = \sqrt{\frac{2\pi k}{k-1}}$, мы получим уравнение, определяющее следующий член асимптотического разложения:

$$\frac{\gamma^2\pi^2}{2} + a_0\gamma^{\frac{1}{2}}a_1 - \frac{a_0^4\gamma^2}{4!} = x_2\left[\frac{\gamma^2\pi^2}{2} + a_0\gamma^{\frac{1}{2}}a_1 - \frac{a_0^4\gamma^2}{4!}\right] + O(\gamma^{\frac{5}{2}}),$$

т. е.

$$a_1 = \left(\frac{a_0^3}{4!} - \frac{\pi^2}{2a_0}\right)\gamma^{\frac{3}{2}} + O(\gamma^2)$$

и, следовательно,

$$a = \sqrt{\frac{2\pi k}{k-1}}\left\{\gamma^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{12}\,\frac{\pi k}{k-1} - \frac{\pi}{4}\,\frac{k-1}{k}\right]\gamma^{\frac{3}{2}}\right\} + O(\gamma^2).$$

Так как при малых h $V_0 \gg U_0$, то амплитуда колебаний напряжения $u+v$ на аноде лампы $Л_2$, очевидно, приближенно равняется V_0. Все эти амплитуды возрастают при увеличении L (или, что то же самое, при уменьшении $h = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$)[1]).

Перейдем теперь к рассмотрению случая *малых* L или, иначе, случая, когда $h > 1$. В этом случае корни характеристического уравнения (10.43) действительны и отрицательны, и система ведет себя во время «медленных» движений как линейная, имеющая в начале координат особую точку типа узла (рис. 555). В частности, в области «медленных» движений, т. е. при $|x| > 1$, имеются две прямолинейные фазовые траектории (их угловые коэффициенты являются величинами, обратными корням λ_1 и λ_2 характеристического уравнения (10.43)). Разбиение плоскости x, y на траектории для случая малых L было приведено на рис. 558 (траектории движения изображающей точки состоят из кусков фазовых траекторий «медленных» движений и из кусков траекторий «быстрых» движений — скачков: $y = \text{const}$).

Подробное рассмотрение показывает, что и в этом случае существует устойчивое периодическое движение, состоящее из двух движений с конечной скоростью и двух скачков и устанавливающееся при любых начальных условиях (это утверждение может быть доказано, например, путем построения и исследования соответствующего точечного преобразования). Эти движения представляющей точки по предельному циклу и отображают разрывные автоколебания в мультивибраторе. Амплитуда этих колебаний может быть определена сразу; именно, изменения переменного x происходят в пределах от x_2 до $-x_2$, т. е. амплитуда автоколебаний переменного x равна $x_2 = 2k - 1$ (тогда амплитуда колебаний напряжения u на сетке лампы $Л_1$ $U_0 = (2k-1)u_0$). Что же касается периода автоколебаний, то его можно определить, взяв интеграл по t вдоль участков предельного цикла, по которым происходит «медленное» движение изображающей точки.

Однако задача вычисления периода весьма упрощается в том случае, когда L очень мало ($L \ll \frac{1}{4}CR^2$, но, конечно, по-прежнему $L \gg \frac{R^2C_a^2}{C}$ и $\mu \ll 1$). Тогда $h \gg 1$ и фазовые траектории в области «медленного» движения (но вне некоторой малой окрестности прямой $y = -2hx$) близки к горизонтальным прямым[2]). Соответственно

---

[1]) Так как амплитуда колебаний напряжения на аноде лампы $Л_2$ возрастает при увеличении индуктивности L (как $L^{3/4}$), то наша теория мультивибратора, развитая при пренебрежении анодной реакцией, очевидно, перестает быть справедливой при достаточно больших L.

[2]) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2hx+y} \simeq -\frac{1}{2h} \approx -0$ вне малой окрестности прямой $y = -2hx$. Поэтому, в частности, амплитуда автоколебаний переменного y будет

предельный цикл будет близок к оси $y=0$; поэтому во время «медленного» движения изображающей точки по предельному циклу $\dot{x} \approx -2hx$ или $\frac{dx}{dt} = -\frac{R}{L}x$ (t — обычное время) и, следовательно, $dt = -\frac{L}{R}\frac{dx}{x}$. Интегрируя правую часть этого уравнения в пределах от x_2 до 1, мы получим длительность полупериода автоколебаний:

$$\frac{T}{2} = -\frac{L}{R}\int_{x_2}^{1}\frac{dx}{x} = \frac{L}{R}\ln x_2,$$

т. е. период автоколебаний равен:

$$T = \frac{L}{R}\ln(2k-1). \qquad (10.47в)$$

Интересно, что в рассмотренном случае емкость C не влияет заметно на величину периода; это объясняется тем, что при малых L мы получаем сравнительно высокочастотные разрывные автоколебания, во время которых емкость C почти не успевает перезаряжаться (амплитуда колебаний напряжения на этой емкости, как мы видели, равна $V_0 = \frac{(k-1)L}{RC^2}u_0 \ll u_0$).

Мы подробно рассмотрели два предельных случая больших и малых индуктивностей L и получили ответы на все вопросы, которые обычно возникают при исследовании автоколебательных процессов. Именно, мы выяснили вопросы об амплитуде, периоде и форме автоколебаний и характере их установления. Мы ограничились случаями больших и малых L только ради простоты изложения, вообще же можно исследовать все эти вопросы и при других, промежуточных значениях L. На рис. 560 приведены фотографии картины на плоскости u, $u+v$, полученные для рассматриваемой схемы с помощью катодного осциллографа (на отклоняющие пластины осциллографической трубки подавались напряжения на сетке лампы $Л_1$ и на аноде $Л_2$)[1]).

в рассматриваемом случае $h \gg 1$ приближенно равна $\frac{1}{2}\frac{x_2-1}{2h} = \frac{k-1}{2h}$, а амплитуда колебаний напряжения v на конденсаторе C

$$V_0 \approx \frac{u_0}{2h}\frac{k-1}{2h} = \frac{(k-1)L}{CR^2}u_0.$$

[1]) О получении картины на фазовой плоскости при помощи катодного осциллографа см. Дополнение II.

Фотографии расположены в порядке уменьшения L. Характер периодического процесса, изображенного на этих фотографиях, в общем

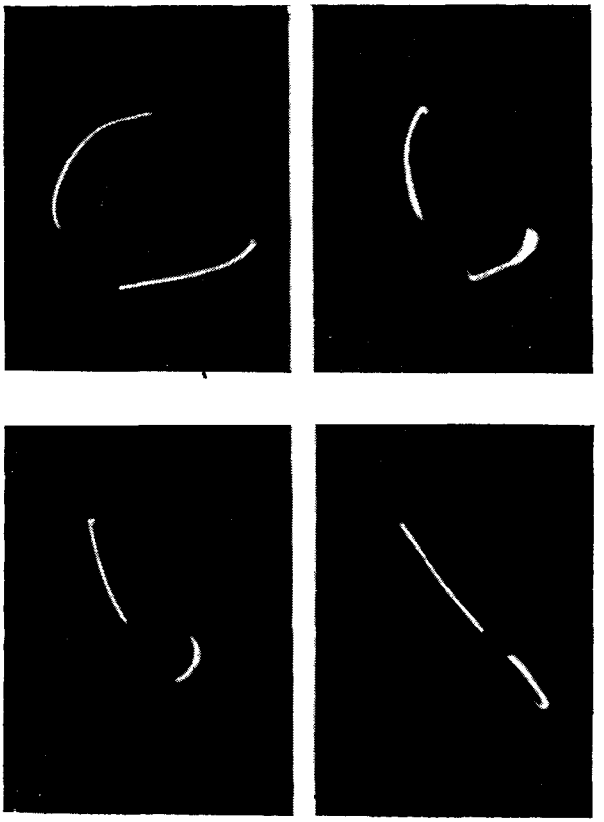

Рис. 560.

совпадает с той картиной, которую мы получили при теоретическом рассмотрении.

§ 10. «Универсальная» схема

Рассмотренные выше (в этой главе) системы могут совершать только разрывные автоколебания. Существуют, однако, такие системы, в которых возможны как непрерывные, так и разрывные автоколебания, переходящие друг в друга при изменениях того или иного параметра системы (при переходе этого параметра через некоторое критическое, бифуркационное значение). Такова, например, так называемая «универсальная» схема [125], приведенная на рис. 561 (характер