

разрывных колебаний (автоколебаний). Ясно видно, что скачки напряжений  $u_1$  и  $u_2$  начинаются не только из точек кривой  $\Gamma$ , но и из точек области, лежащей внутри нее. Изображающие точки, заброшенные в начальный момент в область внутри  $\Gamma$ , уходят из нее скачком.

### § 13. Симметричный мультивибратор (с сеточными токами)

В заключение главы мы рассмотрим более подробно разрывные автоколебания симметричного мультивибратора (его схема приведена на рис. 582), по-прежнему пренебрегая анодной реакцией<sup>1)</sup>, но

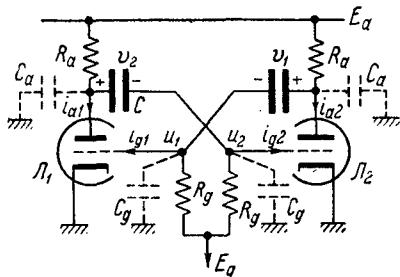


Рис. 582.

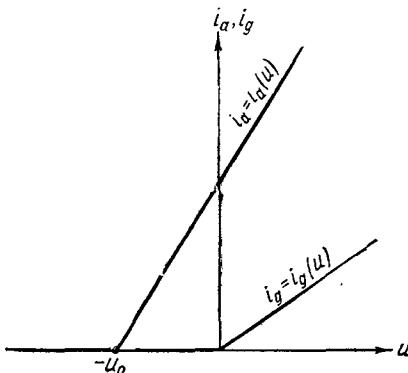


Рис. 583.

учитывая сеточные токи ламп, которые обычно играют существенную роль в работе мультивибратора [62]. Для получения количественных результатов будем аппроксимировать характеристики ламп следующими кусочно-линейными функциями (без насыщения):

$$i_a = i_a(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u \leq -u_0; \\ S(u + u_0) & \text{при } u > -u_0; \end{cases}$$

$$i_g = i_g(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u \leq 0, \\ S_g u & \text{при } u > 0; \end{cases}$$

здесь  $u$  — сеточное напряжение,  $-u_0$  — напряжение запирания ламп,  $S$  и  $S_g$  — величины крутизны восходящих участков характеристик анодного и сеточного токов ламп.

Эти функции (их графики приведены на рис. 583) удовлетворительно отображают свойства современных ламп, практически не имеющих насыщения ни по анодному, ни по сеточному токам.

<sup>1)</sup> Анодной реакцией в лампах можно пренебречь, если лампы, примененные в мультивибраторе, суть пентоды или триоды с достаточно большим внутренним сопротивлением  $R_i$  и если напряжения на анодах ламп во время колебаний остаются достаточно большими. Последнее заведомо выполняется при небольших сопротивлениях  $R_a$  и достаточно большом напряжении анодного питания  $E_a$ .

**1. Уравнения колебаний. Скачки напряжений  $u_1$  и  $u_2$ .** Пренебрегая паразитными параметрами, мы получим (на основании законов Кирхгофа и в обозначениях рис. 582) следующие уравнения «медленных», не скачкообразных изменений состояния мультивибратора<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} C \frac{dv_1}{dt'} &= \frac{u_1 - E_g}{R_g} + i_g(u_1), \\ \frac{E_a - (u_1 + v_1)}{R_a} &= i_a(u_2) + C \frac{dv_1}{dt'}, \\ C \frac{dv_2}{dt'} &= \frac{u_2 - E_g}{R_g} + i_g(u_2), \\ \frac{E_a - (u_2 + v_2)}{R_a} &= i_a(u_1) + C \frac{dv_2}{dt'}. \end{aligned}$$

Введем, как и в предыдущем параграфе, новые, безразмерные переменные  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ , связанные с напряжениями  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  соотношениями:

$$u_{1,2} = u_0 x_{1,2}, \quad v_{1,2} = E_a + \frac{R_a}{R_g} E_g + u_0 \left(1 + \frac{R_a}{R_g}\right) y_{1,2},$$

и новое, безразмерное время

$$t = \frac{t'}{C(R_a + R_g)}.$$

В этих переменных уравнения «медленных» изменений состояния мультивибратора запишутся в следующей безразмерной форме:

$$\left. \begin{aligned} -y_1 &= x_1 + \alpha \cdot \psi(x_2) + k\varphi(x_2), \\ -y_2 &= x_2 + \alpha \cdot \psi(x_1) + k\varphi(x_1), \\ \dot{y}_1 &= x_1 + \beta \cdot \psi(x_1) - \sigma, \\ \dot{y}_2 &= x_2 + \beta \cdot \psi(x_2) - \sigma, \end{aligned} \right\} \quad (10.75)$$

где

$$k = \frac{SR_a R_g}{R_a + R_g},$$

$$\alpha = \frac{S_g R_a R_g}{R_a + R_g},$$

$$\beta = S_g R_g,$$

приведенное (безразмерное) сеточное смещение

$$\sigma = \frac{E_g}{u_0}$$

<sup>1)</sup> Во время «медленных» изменений состояния мультивибратора малые паразитные параметры не играют существенной роли и ими можно пренебречь. Далее, мы обозначаем время через  $t'$ , так как ниже через  $t$  будет обозначено безразмерное время,

и

$$\varphi(x) = \frac{1}{u_0 S} i_a(u_0 x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -1, \\ x + 1 & \text{при } x \geq -1, \end{cases}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{u_0 S_g} i_g(u_0 x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

— приведенные (безразмерные) характеристики анодного и сеточного токов ламп. Первые два уравнения устанавливают функциональную связь между  $x_1$ ,  $x_2$  и  $y_1$ ,  $y_2$  (т. е. между сеточными напряжениями  $u_1$ ,  $u_2$  и напряжениями  $v_1$ ,  $v_2$  на конденсаторах  $C$ ), которая, подчеркнем еще раз, имеет место только во время «медленных» изменений состояния мультивибратора; два последних являются дифференциальными и дают закон изменения состояния мультивибратора во времени.

Исключая из уравнений (10.75) переменные  $y_1$ ,  $y_2$ , получим следующую систему дифференциальных уравнений для переменных  $x_1$ ,  $x_2$ :

$$\left. \begin{aligned} [1 + \alpha\psi'(x_1)] \dot{x}_1 + k\varphi'(x_2) \dot{x}_2 + x_1 + \beta\psi(x_1) &= \sigma, \\ k\varphi'(x_1) \dot{x}_1 + [1 + \alpha\psi'(x_2)] \dot{x}_2 + x_2 + \beta\psi(x_2) &= \sigma, \end{aligned} \right\} \quad (10.75a)$$

или, разрешая относительно производных,

$$\dot{x}_1 = \frac{P_1(x_1, x_2)}{\Delta(x_1, x_2)}, \quad \dot{x}_2 = \frac{P_2(x_1, x_2)}{\Delta(x_1, x_2)}, \quad (10.75b)$$

где

$$\begin{aligned} P_1(x_1, x_2) &= k\varphi'(x_2)[x_2 + \beta\psi(x_2) - \sigma] - \\ &\quad - [1 + \alpha\psi'(x_2)][x_1 + \beta\psi(x_1) - \sigma], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2(x_1, x_2) &= k\varphi'(x_1)[x_1 + \beta\psi(x_1) - \sigma] - \\ &\quad - [1 + \alpha\psi'(x_1)][x_2 + \beta\psi(x_2) - \sigma], \end{aligned}$$

$$\Delta(x_1, x_2) = [1 + \alpha\psi'(x_1)][1 + \alpha\psi'(x_2)] - k^2\varphi'(x_1)\varphi'(x_2).$$

Поскольку полученная система дифференциальных уравнений является системой второго порядка, мы можем отображать состояния мультивибратора (во время их «медленных» изменений) точками на плоскости  $x_1$ ,  $x_2$ , а «медленные» процессы в мультивибраторе — движением изображающей точки по фазовым траекториям (по траекториям уравнений (10.75b)) на этой плоскости. Однако, как и в задаче о мультивибраторе без сеточных токов (см. предыдущий параграф), «медленные» изменения состояния мультивибратора с сеточными точками, отображаемые уравнениями (10.75), возможны не при всех значениях переменных  $x_1$ ,  $x_2$ . Именно, областью «медленных» движений системы (областью применимости уравнений (10.75)) является только та часть плоскости  $x_1$ ,  $x_2$  — область  $M$ , в которой

$$\Delta(x_1, x_2) = [1 + \alpha\psi'(x_1)][1 + \alpha\psi'(x_2)] - k^2\varphi'(x_1)\varphi'(x_2) > 0;$$

вне этой области  $M$  возможны только «быстрые», скачкообразные изменения состояния мультивибратора — «мгновенные скачки» сеточных напряжений  $u_1, u_2$  (или переменных  $x_1, x_2$ )<sup>1)</sup>.

Границей области «медленных» движений  $M$  является линия  $\Gamma$ , на которой функция  $\Delta(x_1, x_2)$  — знаменатель правых частей уравнений (10.75б) — изменяет знак; поэтому точки части линии  $\Gamma$  являются точками стыка фазовых траекторий уравнений (10.75б). Если изображающая точка, двигаясь по траектории «медленного» движения (по траектории уравнений (10.75б) в области  $M$ ), выходит на линию  $\Gamma$  в некоторой точке  $(x_1^-, x_2^-)$ , то дальше она «быстрым» движением (мгновенным скачком) «перепрыгивает» в точку  $(x_1^+, x_2^+)$ , принадлежащую также области  $M$ . Так как напряжения  $v_1$  и  $v_2$  на конденсаторах, а следовательно и значения переменных  $y_1$  и  $y_2$ , во время мгновенного скачка измениться не могут (иначе в мультивибраторе были бы бесконечно большие токи) и так как и начальная и концевая точки скачка принадлежат области  $M$ , то согласно первым двум уравнениям (10.75), справедливы в этой области, координаты начальной и концевой точек скачка  $(x_1^-, x_2^-)$  и  $(x_1^+, x_2^+)$  связаны между собой следующими уравнениями (*условиями скачка*):

$$\left. \begin{aligned} x_1^+ + a\psi(x_1^+) + k\varphi(x_2^+) &= x_1^- + a\psi(x_1^-) + k\varphi(x_2^-), \\ x_2^+ + a\psi(x_2^+) + k\varphi(x_1^+) &= x_2^- + a\psi(x_2^-) + k\varphi(x_1^-). \end{aligned} \right\} \quad (10.76)$$

Для обоснования сказанного относительно области применимости уравнений (10.75) и скачков состояния мультивибратора (без привлечения дополнительных физических соображений) необходимо учесть хотя бы некоторые из малых паразитных параметров схемы, существенных во время «быстрых» движений системы. Такими паразитными параметрами являются малые паразитные емкости  $C_a$  и  $C_g$ , изображенные на рис. 582 пунктиром. Учитывая эти емкости, получим (при  $C_a, C_g \ll C$ ) уравнения колебаний мультивибратора в следующем

<sup>1)</sup> Некоторым обоснованием введенного постулата скачка могут служить следующие соображения. Если  $x_1 > -1$  и  $x_2 > -1$  (т. е. обе лампы мультивибратора открыты) и если коэффициент усиления  $k$  настолько велик, что  $\Delta(x_1, x_2) < 0$ , то, как можно подсчитать, общий коэффициент передачи на высоких частотах в цепочке элементов, составляющих мультивибратор (сетка лампы  $L_1$  —  $RC$ -цепь между анодом лампы  $L_1$  и сеткой лампы  $L_2$  — лампа  $L_2$  — вторая  $RC$ -цепь — сетка лампы  $L_1$ ), будет больше единицы. Вследствие наличия в схеме такой положительной обратной связи любое «быстрое», скачкообразное отклонение сеточного напряжения (например,  $u_1$ ) приведет к «лавинообразному», нарастающему изменению сеточных напряжений, которое будет продолжаться все время, пока открыты обе лампы. Поэтому при  $\Delta(x_1, x_2) < 0$  в схеме возможны только «быстрые» скачкообразные изменения состояния мультивибратора.

Наоборот, при  $x_1 < -1$  или при  $x_2 < -1$ , когда по крайней мере одна из ламп заперта, а  $\Delta(x_1, x_2) > 0$ , цепь положительной обратной связи разорвана, скачкообразные изменения сеточных напряжений будут затухающими, что делает «медленные» движения устойчивыми по отношению к скачкам сеточных напряжений и, следовательно, возможными.

виде:

$$\left. \begin{array}{l} \mu \dot{x}_1 = -y_1 - x_1 - \alpha \psi(x_1) - k \varphi(x_2) \equiv F_1(x_1, x_2, y_1), \\ \mu \dot{x}_2 = -y_2 - x_2 - \alpha \psi(x_2) - k \varphi(x_1) \equiv F_2(x_1, x_2, y_2), \\ \dot{y}_1 = x_1 + \beta \psi(x_1) - \sigma \equiv G(x_1), \\ \dot{y}_2 = x_2 + \beta \psi(x_2) - \sigma \equiv G(x_2), \end{array} \right\} \quad (10.77)$$

где  $\mu = \frac{R_a}{(1+R_a/R_g)^2}$ ,  $\frac{C_a + C_g}{C}$  — малый положительный параметр, характеризующий малость паразитных емкостей  $C_a$  и  $C_g$  (по сравнению с емкостями  $C$ ). Соответственно фазовым пространством будет четырехмерное пространство  $x_1, x_2, y_1, y_2$ .

Так как

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = -2 - \alpha [\psi'(x_1) + \psi'(x_2)] < 0$$

и

$$\frac{\partial (F_1, F_2)}{\partial (x_1, x_2)} = [1 + \alpha \psi'(x_1)] [1 + \alpha \psi'(x_2)] - k^2 \varphi'(x_1) \varphi'(x_2) \equiv \Delta(x_1, x_2),$$

то согласно § 3 настоящей главы «медленные» движения системы (т. е. движения с ограниченными  $\dot{x}_1$  и  $\dot{x}_2$  при  $\frac{C_a}{C}, \frac{C_g}{C} \rightarrow +0$ ) будут происходить только в малой  $O(\mu)$ -окрестности поверхности  $F^+$ , определяемой уравнениями:

$$F_1(x_1, x_2, y_1) = 0, \quad F_2(x_1, x_2, y_2) = 0, \quad \Delta(x_1, x_2) > 0,$$

а в пределе, при  $\mu \rightarrow +0$ , на самой поверхности  $F^+$ , вследствие чего приближенные уравнения «медленных» движений совпадают с уравнениями (10.75), полученнымими при пренебрежении всеми паразитными параметрами схемы. Заметим, что поверхность  $F^+$  проектируется на гомеоморфную ей область  $M$  координатной плоскости  $x_1, x_2$ .

Вне поверхности  $F^+$  имеют место «быстрые» движения изображающей точки по траекториям  $y_1, y_2 = \text{const}$  (при  $\mu \rightarrow +0$   $\dot{x}_1, \dot{x}_2 \rightarrow \infty$ , а  $\dot{y}_1$  и  $\dot{y}_2$  остаются ограниченными), т. е. там происходят скачки сеточных напряжений  $u_1$  и  $u_2$  при постоянных напряжениях  $v_1$  и  $v_2$  на конденсаторах  $C$ . Приближенные (для  $0 < \mu \ll 1$ ) дифференциальные уравнения «быстрых» движений системы по траекториям, лежащим вблизи плоскости  $y_1 \equiv y_1^0, y_2 \equiv y_2^0$  ( $y_1^0, y_2^0 = \text{const}$ ), получаются из первых двух уравнений (10.77) заменой в них  $y_1, y_2$  на постоянные  $y_1^0, y_2^0$ :

$$\left. \begin{array}{l} \mu \dot{x}_1 = -y_1^0 - x_1 - \alpha \psi(x_1) - k \varphi(x_2) \equiv F_1(x_1, x_2, y_1^0), \\ \mu \dot{x}_2 = -y_2^0 - x_2 - \alpha \psi(x_2) - k \varphi(x_1) \equiv F_2(x_1, x_2, y_2^0); \end{array} \right\} \quad (10.77a)$$

конечно, эти уравнения отображают динамику «быстрых» изменений состояния мультивибратора только вне малой (например, вне  $O(\sqrt{\mu})$ ) окрестности поверхности  $F$ :

$$F_1(x_1, x_2, y_1) = 0, \quad F_2(x_1, x_2, y_2) = 0,$$

частью которой является поверхность  $F^+$ .

Отметим следующее: 1) так как  $\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} < 0$  при всех значениях  $x_1, x_2$ ,  $y_1^0, y_2^0$ , то уравнения (10.77a) в силу критерия Бендиксона не имеют замкнутых фазовых траекторий; 2) точки пересечения плоскости  $y_1 = y_1^0, y_2 = y_2^0$  с поверхностью  $F^+$  являются устойчивыми состояниями равновесия для приближенных уравнений (10.77a) и 3) нет траекторий «быстрых» движений, уходящих в бес-

конечность. Поэтому все траектории «быстрых» движений идут (при  $C_a, C_g \rightarrow 0$ ) в малую  $O(\mu)$ -окрестность поверхности  $F^+$ , где переходят в траектории «медленных» движений. В свою очередь траектории «медленных» движений на поверхности  $F^+$ , выходящие на ее границу — на линию  $\gamma$ , на которой  $\Delta(x_1, x_2)$  изменяет знак с положительного на отрицательный и которая проектируется на плоскость  $x_1, x_2$  в виде линии  $\Gamma$ , переходят в траектории «быстрых» движений (скаков). Концевые точки таких траекторий скаков изображающей точки (с границы  $\gamma$  области «медленных» движений) лежат снова на поверхности  $F^+$  и удовлетворяют поэтому условиям скачка (10.76). Заметим, что концевая точка скачка определяется условиями скачка (10.76) по заданной начальной точке скачка однозначно, в силу чего использование дифференциальных уравнений скачка (10.77a) для определения концевой точки скачка, как и в задаче о колебаниях мультивибратора без сеточных токов, не является обязательным.

Таким образом, в мультивибраторе возможны разрывные колебания, которые состоят из чередующихся «медленных» (с ограниченными скоростями изменения сеточных напряжений  $u_1$  и  $u_2$ ) и «быстрых», скачкообразных (с очень большими  $\dot{u}_1$  и  $\dot{u}_2$  при малых паразитных параметрах) движений системы. Первые из них описываются уравнениями (10.75), вторые — условиями скачка (10.76) или, более полно, уравнениями (10.77a) и тем точнее, чем меньше паразитные параметры схемы.

**2. Разрывные колебания.** Ниже мы рассмотрим разрывные колебания симметричного мультивибратора с сеточными токами в наиболее интересном для практических приложений случае:

$$k > 1 + \alpha, \quad \beta \gg 1 + \alpha, \quad \sigma. \quad (10.78)$$

Первое из условий (10.78) обеспечивает самовозбуждение мультивибратора при  $\sigma > -1$  (т. е. при  $E_g > -u_0$ ), второе — значительно упрощает рассмотрение фазовых траекторий «медленных» движений в области с сеточным током в одной из ламп<sup>1</sup>). В силу первого из

<sup>1)</sup> Условия (10.78) эквивалентны неравенствам:  $SR_a > 1 + S_o R_a$ ,  $R_a \ll R_g$  и  $S_g R_g \gg 1$ ,  $\frac{E_g}{u_0}$ , которые обычно выполняются, так как в применяемых схемах  $R_a \sim 10^3 \div 10^4 \text{ ом}$ ,  $R_g \sim 10^4 \div 10^6 \text{ ом}$ ,  $S \sim 3 \div 10 \text{ ма/в}$ ,  $S_g \sim 0,1 \div 1 \text{ ма/в}$ ,  $E_g \sim 0 \div 300 \text{ в}$ , а  $u_0 \sim 5 \div 20 \text{ в}$ , т. е.  $k \sim 5 \div 20$ ,  $\alpha \sim 0,1 \div 1$ ,  $\beta \sim 10 \div 10^3$  и  $\sigma \sim 0 \div 60$ .

Заметим, что при  $k < 1$  неравенство  $\Delta(x_1, x_2) > 0$  выполняется на всей плоскости  $x_1, x_2$ , т. е. вся плоскость  $x_1, x_2$  является областью «медленных» движений. Нетрудно видеть, что в этом случае все траектории идут к устойчи-

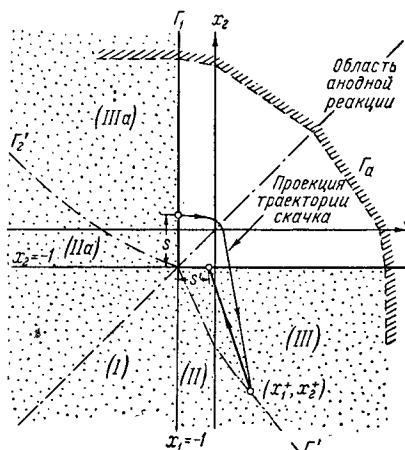


Рис. 584.

условий (10.78)  $\Delta(x_1, x_2) > 0$  только при  $\varphi'(x_1)\varphi'(x_2) = 0$ , т. е. при  $x_1 < -1$  или при  $x_2 < -1$ ; иначе говоря, границей  $\Gamma$  области «медленных» движений  $M$  (на плоскости  $x_1, x_2$ ) будут являться полупрямые  $\Gamma_1: x_1 = -1, x_2 > -1$  и  $\Gamma_2: x_2 = -1, x_1 > -1$ , а областью «медленных» движений  $M$  будет область, которая лежит слева и ниже этих полупрямых и в которой по крайней мере одна из ламп мультивибратора заперта. Наоборот, в области изменения переменных  $x_1, x_2$ , лежащей справа и выше полупрямых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , обе лампы открыты,  $\Delta(x_1, x_2) < 0$  и там возможны только «быстрые», скачкообразные изменения состояния мультивибратора (рис. 584).

При достаточно больших  $u_1$  или  $u_2$  в лампе  $L_1$  или  $L_2$  наступает анодная реакция: анодный ток  $i_a$  становится зависящим от анодного напряжения  $u_a$  и почти не зависящим от сеточного напряжения (см., например, § 10 этой главы). Граница области анодной реакции в предположении, что в области анодной реакции  $i_a = \frac{u_a}{R_0}$ , качественно изображена на рис. 584 штрихованной линией  $\Gamma_a$ . Область значений  $x_1, x_2$ , лежащая справа и выше этой линии, является областью анодной реакции и принадлежит, как нетрудно видеть, также к области «медленных» движений. Мы полагаем, что при колебаниях мультивибратора его изображающая точка  $(x_1, x_2)$  в области анодной реакции не попадает.

Единственное состояние равновесия лежит на биссектрисе  $x_1 = x_2$  и определяется уравнением

$$x + \beta\psi(x) = \sigma,$$

т. е. координаты состояния равновесия

$$x_1 = x_2 = x_0(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{при } \sigma \leq 0, \\ \frac{\sigma}{1+\beta} \approx 0 & \text{при } \sigma > 0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение, определяющее характер состояния равновесия, записывается в виде:

$$\begin{vmatrix} \mu\lambda + \alpha^* & k^* & 1 & 0 \\ k^* & \mu\lambda + \alpha^* & 0 & 1 \\ -\beta^* & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -\beta^* & 0 & \lambda \end{vmatrix} \equiv [\lambda(\mu\lambda + \alpha^*) + \beta^*]^2 - k^{*2}\lambda^2 = 0,$$

где  $\alpha^* = 1 + \alpha\psi'(x_0)$ ,  $\beta^* = 1 + \beta\psi'(x_0)$  и  $k^* = k\varphi'(x_0)$ , и имеет при  $0 < \mu \ll 1$  своими корнями:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\beta^*}{\alpha^* \pm k^*} \quad \text{и} \quad \lambda_{3,4} = -\frac{1/\mu}{\alpha^* \pm k^*}$$

вому состоянию равновесия и в мультивибраторе не возможны никакие автоколебания.

Случай  $1 < k < 1 + \alpha$ , в котором возможны разрывные автоколебания, не является интересным с точки зрения практических приложений.

(два из них являются величинами порядка единицы, два других — порядка  $1/\mu$ ). При  $\sigma < -1$  (т. е. при  $E_g < -u_0$ ), когда  $x_0 = \sigma < -1$  и  $k^* = 0$ , все четыре корня отрицательны, и состояние равновесия, находящееся в этом случае в области «медленных» движений, устойчиво (для траекторий «медленных» движений на плоскости  $x_1, x_2$  оно будет устойчивым узлом). Если же  $\sigma > -1$  ( $E_g > -u_0$ ), то состояние равновесия попадает в область «быстрых» движений ( $x_0 > -1$ ) и неустойчиво, поскольку при  $x_0 > -1$   $k^* = k > 1 + \alpha$  (в силу первого из условий (10.78)) и характеристическое уравнение будет иметь два положительных корня; один из них имеет порядок величины  $\frac{1}{\mu}$ , т. е. изображающая точка будет уходить от состояния равновесия со скоростью порядка  $\frac{1}{\mu}$  (скачком при  $\mu \rightarrow +0$ ). В этом случае (при  $\sigma > -1$ ) мультивибратор будет самовозбуждаться, и в нем, как увидим ниже, будут устанавливаться периодические разрывные колебания (одни и те же при любых начальных условиях), т. е. будет иметь место мягкий режим установления разрывных колебаний. Существование устойчивых разрывных автоколебаний возможно и при  $\sigma < -1$ , когда состояние равновесия устойчиво, т. е. при  $\sigma < -1$  возможен как жесткий режим установления автоколебаний, так и случай отсутствия автоколебаний вообще.

Область «медленных» движений  $M$  (на плоскости  $x_1, x_2$ ) в силу принятой кусочно-линейной аппроксимации характеристик ламп разбивается прямыми  $x_1 = -1$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -1$  и  $x_2 = 0$  на пять областей: (I), (II), (III) и (IIIa) (рис. 584), в каждой из которых уравнения «медленных» движений являются линейными. Эти уравнения в области (I):  $x_1 < -1$ ,  $x_2 < -1$ , где обе лампы мультивибратора заперты, очевидно, записываются в виде:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 + x_1 = \sigma, \\ \dot{x}_2 + x_2 = \sigma; \end{array} \right\} \quad (10.79a)$$

в области (II):  $-1 < x_1 < 0$ ,  $x_2 < -1$ , где лампа  $L_2$  заперта, а лампа  $L_1$  открыта (но в ней нет сеточных токов), в виде:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 + x_1 = \sigma, \\ \dot{x}_2 + x_2 = \sigma - k\dot{x}_1, \end{array} \right\} \quad (10.79b)$$

и, наконец, в области (III):  $x_1 > 0$ ,  $x_2 < -1$ , где лампа  $L_2$  по-прежнему заперта, а в лампе  $L_1$  имеются и анодный и сеточный токи, — в виде:

$$\left. \begin{array}{l} (1 + \alpha)\dot{x}_1 + (1 + \beta)x_1 = \sigma, \\ \dot{x}_2 + x_2 = \sigma - k\dot{x}_1. \end{array} \right\} \quad (10.79b)$$

Так как переменные  $x_1$  и  $x_2$  входят в уравнения колебаний мультивибратора симметрично (это, очевидно, является следствием симметрии его схемы), то разбиение области «медленных» движений  $M$  на

траектории уравнений (10.75) будет *симметричным* относительно биссектрисы  $x_1 = x_2$ , которая всегда является интегральной кривой этих уравнений; в частности, уравнения «медленных» изменений состояния мультивибратора в областях (IIa) и (IIIa), где заперта лампа  $L_1$  и отперта лампа  $L_2$ , получаются из уравнений (10.79б) и (10.79в) заменой переменных  $x_1, x_2$  на  $x_2, x_1$ .

В области (I) интегральными кривыми являются прямые  $\frac{x_2 - \sigma}{x_1 - \sigma} = \text{const}$ , которые (или продолжения которых при  $\sigma > -1$ ) проходят через точку  $(\sigma, \sigma)$ . Эта область содержит состояние равновесия  $(\sigma, \sigma)$  при  $\sigma < -1$ .

В области (II) изоклиной горизонтальных касательных является прямая  $x_2 - \sigma - k(x_1 - \sigma) = 0$ , продолжение которой проходит также через точку  $(\sigma, \sigma)$  и которая пересекает полуправую  $\Gamma_2$  (на отрезке  $-1 \leq x_1 \leq 0$ ) только при  $\sigma \leq \frac{1}{k-1}$ ; слева от этой изоклины  $\dot{x}_2 < 0$  (т. е. траектории удаляются от полуправой  $\Gamma_2$ ), справа от нее  $\dot{x}_2 > 0$  (траектории приближаются к  $\Gamma_2$ ); в частности, при  $\sigma \geq \frac{1}{k-1}$  все траектории в области (II) не выходят на полуправую  $\Gamma_2$ , а переходят в область (III). Далее, в области (II) при  $-1 < \sigma < 0$  имеется прямолинейная фазовая траектория  $x_1 \equiv \sigma$  (на ней  $\dot{x}_2 > 0$ ).

В области (III)

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -k + \frac{1+\alpha}{1+\beta} \frac{x_2 - \sigma}{x_1 - \frac{\sigma}{1+\beta}}$$

и приближенно равно  $-k$  вне малой окрестности оси ординат ( $x_1 = 0$ ) в силу неравенств (10.78). Поэтому все траектории в области (III) вне этой окрестности близки к прямым:

$$x_2 - kx_1 = \text{const},$$

причем скорости изменения переменных  $x_1$  и  $x_2$  при движении изображающей точки по этим траекториям имеют порядок величины  $\frac{1+\beta}{1+\alpha} \gg 1$ , т. е. здесь мы имеем дело с сравнительно быстрыми движениями изображающей точки; эти движения мы будем условно называть «полубыстрыми»<sup>1)</sup>. Кроме того, при  $\sigma \geq 0$  в области (III) имеется

<sup>1)</sup> Для того чтобы «полубыстрые» движения изображающей точки в области (III) принадлежали к классу «медленных» движений, надо, очевидно, полагать, что

$$\frac{1+\beta}{1+\alpha} \ll \frac{1}{\mu}.$$

«Полубыстрые» движения изображающей точки соответствуют процессам сравнительно быстрого (за время порядка  $\frac{C}{Sg} \ll CR_g$ ) заряда конденсатора  $C$ , находящегося в цепи сетки лампы  $L_1$ , в которой текут сеточные токи, значительно превышающие токи через сопротивление  $R_g$ .

прямолинейная фазовая траектория «медленного» движения

$$x_1 \equiv \frac{\sigma}{1 + \beta} = x_0 \approx 0$$

(на ней  $\dot{x}_2 > 0$  и является величиной порядка единицы).

Разбиение области «медленных» движений  $M$  на траектории в трех возможных, качественно различных случаях:  $\sigma < -1$ ,  $-1 < \sigma < 0$  и  $\sigma \geq 0$ , приведено на рис. 585. Как видно из этого разбиения,

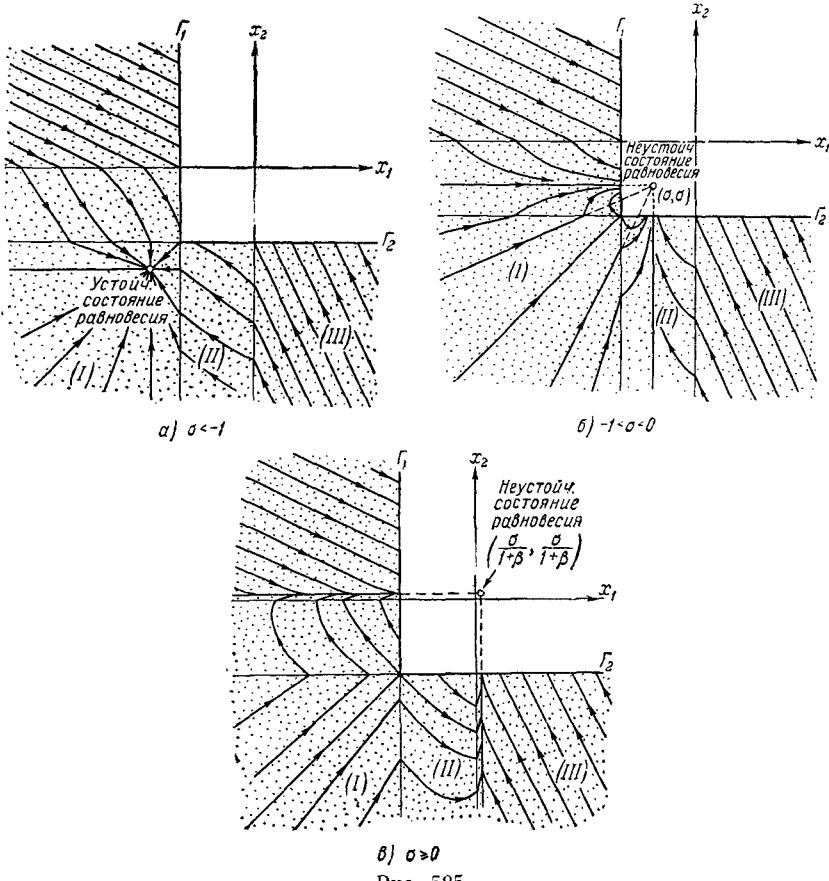


Рис. 585.

при  $\sigma > -1$  все траектории «медленных» движений выходят (при возрастании  $t$ ) на границу  $\Gamma$  области «медленных» движений — на полупрямые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , а при  $\sigma < -1$ , когда в области (I) имеется устойчивое состояние равновесия  $(\sigma, \sigma)$ , часть траекторий «медленных» движений идет к этому состоянию равновесия, а остальные траектории выходят на полупрямые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Поэтому в области

«медленных» движений нет замкнутых фазовых траекторий и автоколебания в мультивибраторе, если они существуют, обязательно являются *разрывными*, т. е. состоят из чередующихся «медленных» и «быстрых», скачкообразных изменений состояния мультивибратора<sup>1)</sup>.

Соответствующие им траектории (построенные на плоскости  $x_1, x_2$ ) будут пересекать полупрямые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Поэтому рассмотрение колебаний мультивибратора сводится к построению точечных преобразований полупрямых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  самих в себя или друг в друга, осуществляемых траекториями системы, и к исследованию этих преобразований.

Введем на полупрямых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  координату  $s$  — расстояние точек этих полупрямых до точки  $(-1, -1)$ :  $s = 1 + x_2$  на полупрямой  $\Gamma_1$  и  $s = 1 + x_1$  на полупрямой  $\Gamma_2$ , причем  $s > 0$ , и рассмотрим движение изображающей точки, начинающееся для определенности в точке с координатой  $s$  полупрямой  $\Gamma_1$ , т. е. в точке  $(-1, s - 1)$ . Из этой начальной точки изображающая точка «перепрыгнет» (по соответствующей траектории «быстрого» движения) в точку  $(x_1^+, x_2^+)$ , координаты которой однозначно определяются условиями скачка (10.76). Нетрудно видеть, что точки областей (I), (IIa) и (IIIa) не могут являться концевыми точками скачка изображающей точки с полупрямой  $\Gamma_1$ . В самом деле, предположив, что  $x_1^+ \leq -1$ , мы получим из (10.76), что  $x_1^+ = -1$  и  $x_2^+ = s - 1$ , т. е. получим концевую точку скачка совпадающей с начальной, что невозможно, так как концевая точка скачка может лежать только внутри области «медленных» движений, а не на ее границе. Поэтому концевая точка скачка может лежать только в областях (II) и (III) (т. е.  $x_1^+ > -1$ ,  $x_2^+ < -1$ ) и ее координаты определяются по заданному значению следующими уравнениями, получаемыми из (10.76):

$$x_1^+ + \alpha\psi(x_1^+) = ks - 1, \quad x_2^+ + kx_1^+ = s - 1 + \alpha\psi(s - 1) - k; \quad (10.80)$$

в частности, при  $s < \frac{1}{k}$  точка  $(x_1^+, x_2^+)$  лежит в области (II):

$$x_1^+ = ks - 1 < 0, \quad x_2^+ = -(k^2 - 1)s - 1, \quad (10.80a)$$

а при  $s > \frac{1}{k}$  точка  $(x_1^+, x_2^+)$  лежит в области (III)<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Отсутствие замкнутых фазовых траекторий, лежащих целиком в области «медленных» движений, можно также доказать, применяя критерий Бендиексона к уравнению интегральных кривых

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{P_2(x_1, x_2)}{P_1(x_1, x_2)}$$

(см. уравнения (10.75б)): замкнутых траекторий нет, так как  $\frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P_2}{\partial x_2} < 0$  на всей плоскости  $x_1, x_2$ .

<sup>2)</sup> Геометрическое место концевых точек  $(x_1^+, x_2^+)$  скачков изображающей точки из точек полупрямой  $\Gamma_1$  изображено на рис. 584 пунктирной линией  $\Gamma'_1$ , состоящей из трех прямолинейных отрезков. На том же рисунке ломаной линией  $\Gamma'_2$ , идущей симметрично линии  $\Gamma'_1$ , изображено геометрическое место концевых точек скачков изображающей точки из точек полупрямой  $\Gamma_2$ .

Из точки  $(x_1^+, x_2^+)$  изображающая точка будет двигаться далее по траектории «медленного» движения, проходящей через эту точку, и или придет в некоторую точку полупрямой  $\Gamma_2$  (с координатой  $s'$ ) или же будет асимптотически приближаться к состоянию равновесия  $(\sigma, \sigma)$ , лежащему в области  $(I)$ . В первом случае точка  $s$  полупрямой  $\Gamma_1$  имеет последующую точку  $s'$  на полупрямой  $\Gamma_2$ , причем, как нетрудно видеть, функция соответствия

$$s' = \Pi(s)$$

является однозначной и непрерывной; во втором случае (он может иметь место только при  $\sigma < -1$ ) точка  $s$  полупрямой  $\Gamma_1$  не имеет последующей ни на полупрямой  $\Gamma_2$ , ни на полупрямой  $\Gamma_1$ .

Точно таким же (в силу симметрии схемы) будет и преобразование точек  $(s-1, -1)$  полупрямой  $\Gamma_2$  в точки  $(-1, s'-1)$  полупрямой  $\Gamma_2$ , т. е. координата  $s'$  последующей точки (на полупрямой  $\Gamma_1$ ), если она существует, определяется по координате  $s$  исходной точки (на полупрямой  $\Gamma_2$ ) той же функцией соответствия  $s' = \Pi(s)$ . Поэтому ниже мы будем иметь дело с одним точечным преобразованием полупрямых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  друг в друга, которое будем обозначать через  $\Pi$ . Применяя многократно это преобразование, мы получим последовательность точек пересечения рассматриваемой траектории с полупрямыми  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ :

$$s, s_1, s_2, \dots, s_k, s_{k+1}, \dots,$$

в которой координата (т. е.  $x_2 + 1$  на полупрямой  $\Gamma_1$  и  $x_1 + 1$  на полупрямой  $\Gamma_2$ ) каждой последующей точки пересечения определяется по координате предыдущей точки функцией соответствия преобразования  $\Pi$ :

$$\begin{aligned} s_1 &= \Pi(s), \\ s_2 &= \Pi(s_1), \dots, \\ s_{k+1} &= \Pi(s_k), \dots \end{aligned}$$

независимо от того, на какой из полупрямых (на  $\Gamma_1$  или на  $\Gamma_2$ ) лежит предыдущая точка пересечения.

Зная последовательности точек пересечения траекторий с полупрямыми  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , мы, очевидно, сможем проследить за колебаниями мультивибратора. Например, если точечное преобразование  $\Pi$  имеет устойчивую неподвижную точку  $s^*$  и данная последовательность  $s, s_1, s_2, \dots$  сходится к ней, то это, очевидно, означает, что существует устойчивый разрывный предельный цикл, к которому асимптотически (при  $t \rightarrow +\infty$ ) приближается рассматриваемая траектория, т. е. это означает, что в мультивибраторе устанавливаются периодические разрывные колебания. Если же последовательность точек  $s, s_1, s_2, \dots$  — конечная, т. е. если некоторая точка  $s_N$  не имеет последующей, то траектория, соответствующая этой последователь-

ности, после  $N$  пересечений с полупрямыми  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  не выходит более на границу области «медленных» движений и идет, следовательно, к устойчивому состоянию равновесия (этот случай возможен только при  $\alpha < -1$ ).

**3. Точечное преобразование II.** Переидем к вычислению и исследованию функции соответствия  $s' = \Pi(s)$  точечного преобразования II, рассматривая, как и раньше (но более детально), ход траекторий системы, начинающихся в точках полупрямой  $\Gamma_1$ . Обозначим, как и раньше, через  $s$  координату начальной (исходной) точки на полуправой  $\Gamma_1$ , через  $x_1^+, x_2^+$  — координаты концевой точки скачка изображающей точки из точки  $s$  полупрямой  $\Gamma_1$  (точка  $(x_1^+, x_2^+)$  лежит в области (II) или (III)), через  $L$  — положительную полутраекторию «медленного» движения, начинающуюся в точке  $(x_1^+, x_2^+)$ , и через  $s'$  — координату точки выхода полутраектории  $L$  на полуправую  $\Gamma_2$  — координату последующей точки преобразования II, если последняя существует, т. е. если  $L$  выходит на  $\Gamma_2$ .

Сделаем сначала следующие замечания.

1) Так как  $x_1^+$  и  $x_2^+$  являются непрерывными кусочно-линейными функциями  $s$ , а правые части дифференциальных уравнений «медленных» движений (10.75 б) — кусочно-линейными функциями  $x_1$  и  $x_2$ , то функция соответствия  $s' = \Pi(s)$  будет непрерывной кусочно-дифференцируемой функцией (производная  $\frac{ds'}{ds}$  имеет разрыв непрерывности первого рода в точках  $s = \frac{1}{k}$  и  $s = 1$ ).

2) Пусть  $s_1$  и  $s_2$  — координаты двух исходных точек преобразования II, причем  $s_2 > s_1$  и точка  $s_1$  имеет последующую  $s'_1$ . Тогда и точка  $s_2$  будет иметь последующую  $s'_2$ , причем  $s'_2 > s'_1$ ; следовательно, функция соответствия  $s' = \Pi(s)$  является монотонно возрастающей и

$$\frac{ds'}{ds} > 0$$

(в точках  $s = \frac{1}{k}$  и  $s = 1$  этому неравенству удовлетворяют левый и правый пределы  $\frac{ds'}{ds}$ ).

Для доказательства этого утверждения заметим следующее. Согласно (10.80) для геометрического места концевых точек скачков  $(x_1^+, x_2^+)$  (для кривой  $\Gamma_1'$  на рис. 584) имеем:

$$\frac{dx_1^+}{ds} = \frac{k}{1 + \alpha\psi'(x_1^+)} > 0,$$

т. е.  $x_1^+$  является монотонно возрастающей функцией  $s$ , и

$$\frac{dx_2^+}{dx_1^+} = -k + \frac{1}{k}[1 + \alpha\psi'(x_1^+)] [1 + \alpha\psi'(s - 1)] \geq -\left(k - \frac{1}{k}\right) > -k$$

(знак равенства имеет место только для точек  $(x_1^+, x_2^+)$ , лежащих

в области (II), т. е. только для  $s < \frac{1}{k}$ ). Далее, полутраектории  $L$  выходят в область, расположенную над геометрическим местом точек  $(x_1^+, x_2^+)$  (над линией  $\Gamma'_1$ ) в области (III) и при выполнении условия  $s > -\frac{(1+\sigma)(k-1)}{k^3}$  в области (II); полутраектории  $L$  в области (II), соответствующие  $s < -\frac{(1+\sigma)(k-1)}{k^3}$  (такие полутраектории существуют только при  $\sigma < -1$ ), выходят в область, расположенную под линией  $\Gamma'_1$ , эту линию  $\Gamma'_1$  более не пересекают и, следовательно, не выходят на полупрямую  $\Gamma_2$ <sup>1</sup>).

<sup>1)</sup> В области (III) (вне малой окрестности оси ординат) изображающая точка движется по траекториям, близким к прямым  $x_2 + kx_1 = \text{const}$ , в сторону уменьшения  $x_1$ ; следовательно, полутраектории  $L$  в области (III) выходят в область, лежащую над линией  $\Gamma'_1$ , поскольку на последней

$$-k < \frac{dx_2^+}{dx_1^+} < 0.$$

Для исследования хода траекторий «медленных» движений в области (II) рассмотрим пересечение этих траекторий с семейством параллельных прямых:

$$x_2 + \left(k - \frac{1}{k}\right)x_1 = a = \text{const}, \quad (\text{A})$$

одной из которых (при  $a = -\frac{k^2 + k - 1}{k}$ ) является линия  $\Gamma'_1$  (в пределах области (II)). Так как в силу (10.79 б)

$$\frac{d}{dt} \left[ x_2 + \left(k - \frac{1}{k}\right)x_1 \right] = \sigma - x_2 - \frac{1}{k}(\sigma - x_1),$$

то траектории «медленных» движений в области (II) пересекают прямые (A) в направлении снизу вверх при  $\sigma - x_2 - \frac{1}{k}(\sigma - x_1) > 0$ , т. е. под прямой

$$x_2 - \sigma = \frac{1}{k}(x_1 - \sigma), \quad (\text{B})$$

и в направлении сверху вниз — над этой прямой. При  $\sigma \geq -1$  прямая (B) лежит над областью (II), поэтому все траектории в области (II) (в частности, все полутраектории  $L$ ) пересекают прямые (A) в направлении снизу вверх, приближаясь к полупрямой  $\Gamma_2$ . Так как в точках линии  $\Gamma'_1$

$$\sigma - x_2 - \frac{1}{k}(\sigma - x_1) = \sigma - x_2^+ - \frac{1}{k}(\sigma - x_1^+) = k^2 s + \frac{(1+\sigma)(k-1)}{k}$$

согласно (10.80 а), то при  $\sigma < -1$  в область, расположенную над линией  $\Gamma'_1$ , выходят только те полутраектории  $L$  (в области (II)), которые соответствуют  $s > -\frac{(1+\sigma)(k-1)}{k^3}$ ; так как для точек  $(x_1^+, x_2^+)$  в области (II)  $0 < s < \frac{1}{k}$ ,

то такие полутраектории существуют только при  $-\frac{k^2 + k - 1}{k - 1} < \sigma < -1$ .

Наоборот, полутраектории  $L$ , соответствующие  $s < -\frac{(1+\sigma)(k-1)}{k^3}$ , выхо-

Обозначим через  $(x_1^+)_1$ ,  $(x_1^+)_2$  и  $(x_2^+)_2$ ,  $(x_2^+)_2$  координаты концевых точек скачков изображающей точки из рассматриваемых нами точек  $s_1$  и  $s_2$  полупрямой  $\Gamma_1$  и через  $L_1$  и  $L_2$  — положительные полураектории «медленных» движений, начинающиеся соответственно в точках  $((x_1^+)_1$ ,  $(x_1^+)_2$ ) и  $((x_2^+)_2$ ,  $(x_2^+)_2$ ); полураектория  $L_1$  приходит на полуправую  $\Gamma_2$  и, следовательно, выходит из точки  $((x_1^+)_1$ ,  $(x_2^+)_2$ ) в область, расположенную над линией  $\Gamma'_1$ . Так как  $s_2 > s_1$ , то в силу сказанного выше  $(x_1^+)_2 > (x_1^+)_1$  и полураектория  $L_2$  также будет выходить в область, лежащую над линией  $\Gamma'_1$ , и будет идти справа от полураектории  $L_1$ , поскольку полураектории  $L_1$  и  $L_2$  пересекаться не могут. Поэтому полураектория  $L_2$  выйдет на полуправую  $\Gamma_2$ , причем координата ее точки выхода  $s'_2 > s'_1$ . Таким образом, утверждение 2) доказано.

Отметим также следующее: при  $\sigma \geq -1$  все траектории «медленных» движений в областях (II)

и (III) выходят на полуправую  $\Gamma_2$ , поэтому все точки  $s > 0$  имеют последующие  $s'$ , причем в силу доказанного утверждения 2)  $s' > s'_0 = \Pi(0)$ ; если же  $\sigma < -1$ , то последующие  $s'$  имеют только те точки  $s$ , для которых  $s > s_0$ , где  $s_0$  — координата той точки полуправой  $\Gamma_1$ , которая преобразуется в точку  $s' = 0$  полуправой  $\Gamma_2$  (точкам  $s < s_0$  соответствуют полураектории  $L$ , не выходящие на полуправую  $\Gamma_2$  и асимптотически при  $t \rightarrow +\infty$  приближающиеся к устойчивому состоянию равновесия  $(\sigma, \sigma)$ ; см. рис. 586).

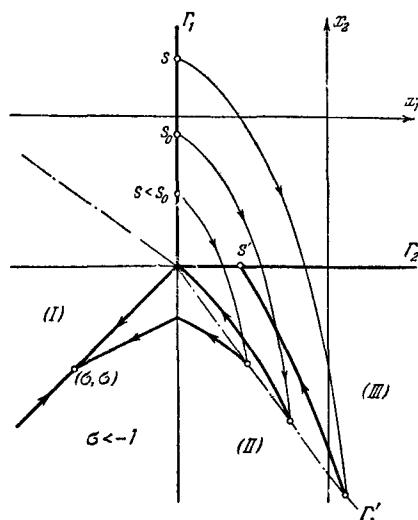


Рис. 586.

дят в область, расположенную под линией  $\Gamma'_1$ , линию  $\Gamma'_1$  более не пересекают и, следовательно, не выходят на полуправую  $\Gamma_2$ . Для доказательства последнего утверждения допустим, что при  $\sigma < -1$  некоторая полураектория  $L$ , начинающаяся в точке  $(\tilde{x}_1^+, \tilde{x}_2^+)$  и соответствующая значению

$$\tilde{s} < -\frac{(1+\sigma)(k-1)}{k^3},$$

пересекает линию  $\Gamma'_1$  по крайней мере еще один

раз. Тогда в этой точке пересечения  $(\tilde{x}_1^+, \tilde{x}_2^+)$  (или в первой из точек пересечения, если их несколько) полураектория  $L$  пересекала бы линию  $\Gamma'_1$  в направлении снизу вверх, что невозможно, так как при  $\sigma < -1$   $x_1 < 0$  в области (II) и  $\tilde{x}_1^+ < \tilde{x}_2^+$ , т. е. точка  $(\tilde{x}_1^+, \tilde{x}_2^+)$  соответствовала бы значению  $\tilde{s} < \tilde{s} < -\frac{(1+\sigma)(k-1)}{k^3}$  (напомним, что  $x_1^+$  является монотонно возрастающей функцией  $s$ ).

3) Функция соответствия, конечно, зависит от параметров системы и, в частности, от приведенного (безразмерного) сечочного смещения  $\sigma$ . Так как в области (II)

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -k + \frac{\sigma - x_2}{\sigma - x_1}$$

и в области (III)

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -k + \frac{(1+\alpha)(\sigma - x_2)}{\sigma - (1+\beta)x_1},$$

то, дифференцируя эти соотношения по  $\sigma$ , получим:  
в области (II)

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ \frac{dx_2}{dx_1} \right] = -\frac{x_1 - x_2}{(\sigma - x_1)^2} < 0,$$

в области (III)

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ \frac{dx_2}{dx_1} \right] = -(1+\alpha) \frac{(1+\beta)x_1 - x_2}{[\sigma - (1+\beta)x_1]^2} < 0,$$

т. е. в обеих областях при увеличении  $\sigma$  происходит поворот по часовой стрелке векторного поля направлений касательных к траекториям «медленных» движений системы; в области (III)  $\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ \frac{dx_2}{dx_1} \right] \approx 0$  в силу условий (10.78), поэтому поворотом векторного поля направлений касательных к траекториям в этой области мы будем в дальнейшем пренебречь. Так как, кроме того, координаты концевых точек скачков  $x_1^+$  и  $x_2^+$  от  $\sigma$  не зависят, то мы, очевидно, можем утверждать, что при увеличении  $\sigma$  точки выхода на полупрямую  $\Gamma_2$  положительных полутораэкторий  $L$ , соответствующих любым заданным (фиксированным) значениям  $s$ , сдвигаются вправо. Следовательно,

$$\frac{\partial s'}{\partial \sigma} > 0; \quad (10.81)$$

очевидно,  $\frac{\partial s'}{\partial \sigma} \approx 0$  для тех значений  $s$ , которым соответствуют полутораэктории  $L$ , лежащие целиком в области (III)<sup>1)</sup>. Таким образом, *при уменьшении  $\sigma$  график функции соответствия  $s' = \Pi(s)$  на диаграмме Ламеря (на плоскости  $s, s'$ ) или не изменяется, или же хотя бы частично смещается вниз.*

Перейдем теперь к вычислению и более детальному исследованию функции соответствия  $s' = \Pi(s)$  точечного преобразования  $\Pi$ . В связи с тем, что уравнения скачка (10.80), а также дифференциальные уравнения «медленных» движений являются кусочно-линейными, нам придется разбить интервал изменения  $s$ :  $0 < s < +\infty$

<sup>1)</sup> Для этих значений  $s$   $\frac{\partial s'}{\partial \sigma}$  является малой величиной порядка  $\frac{1+\alpha}{1+\beta}$  и  $\frac{\sigma}{1+\beta}$ .

при  $\sigma \geq -1$  и  $s_0 < s < +\infty$  при  $\sigma < -1$  на интервалы, в каждом из которых указанные уравнения линейны, и затем на каждом из них провести вычисление функции соответствия.

а) *Точечное преобразование П для  $s \geq 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$ .* При достаточно больших  $s$  изображающая точка после скачка в точку  $(x_1^+, x_2^+)$  попадает на одну из траекторий «полубыстрых» движений в области (III):

$$x_2 + kx_1 = a = \text{const} \geq -1$$

и по ней приходит на полупрямую  $\Gamma_2$  в точке с абсциссой  $x_1' = \frac{1+\alpha}{k} \geq 0$ . Так как

$$a = x_2^+ + kx_1^+ = (1 + \alpha)(s - 1) - k$$

согласно (10.80), то этот случай имеет место только при

$$s \geq 1 + \frac{k-1}{1+\alpha} = \frac{k+\alpha}{1+\alpha}$$

и координата последующей точки преобразования П  $s' = 1 + x_1' = \frac{1+\alpha}{k} + 1$  или

$$s' = \frac{1+\alpha}{k} s - \frac{\alpha}{k} \geq 1. \quad (10.82)$$

Отметим, что точке  $s = 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$  соответствует последующая  $s' = 1$  и что при  $s > 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$   $\frac{ds'}{ds} = \frac{1+\alpha}{k} < 1$  согласно первому из неравенств (10.78)<sup>1)</sup>. Поэтому  $s' < s$  и *точечное преобразование П не может иметь неподвижной точки с координатой  $s^* \geq 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$* .

б) *Точечное преобразование П для  $\frac{1}{k} \leq s < 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$  и  $\sigma \geq -1$ .*

При  $\frac{1}{k} \leq s < 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$  концевая точка скачка  $(x_1^+, x_2^+)$  также лежит в области (III), но теперь изображающая точка по соответствующей траектории «полубыстрого» движения:

$$x_2 + kx_1 = a = x_2^+ + kx_1^+ < -1$$

<sup>1)</sup> Выражения для  $s$  и  $\frac{ds'}{ds}$ , приведенные выше, являются, конечно, приближенными; они отличаются от точных на малые величины порядка  $\frac{1+\alpha}{1+\beta}$  и  $\frac{\sigma}{1+\beta}$ .

или попадает в малую окрестность фазовой траектории «медленного» движения

$$x_1 \equiv x_0 = \frac{\sigma}{1 + \beta} \approx 0$$

при  $\sigma \geq 0$  и выходит на полупрямую  $\Gamma_2$  в точке с абсциссой  $x'_1 \approx \approx x_0 \approx 0$ , или же при  $\sigma < 0$  выходит на границу областей (III) и (II) в точке  $(0, a)$  и затем переходит в область (II).

Таким образом, при  $\sigma \geq 0$  координата последующей точки

$$s' = 1^1; \quad (10.83)$$

следовательно, при  $\sigma \geq 0$  точка  $s^* = 1$  будет являться неподвижной точкой преобразования  $\Pi$  и притом устойчивой.

Рассмотрим теперь случай  $-1 \leq \sigma < 0$ . Интегрируя дифференциальные уравнения (10.79б), нетрудно получить следующие уравнения траектории, лежащей в области (II) и начинающейся (при  $t = 0$ ) в точке  $(0, a)$ :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \sigma(1 - e^{-t}), \\ x_2 &= \sigma - (\sigma - a + k\sigma t)e^{-t}. \end{aligned} \right\} \quad (10.84)$$

Изображающая точка, двигаясь по этой траектории, выйдет при некотором  $t = \tau > 0$  на полупрямую  $\Gamma_2$ . Для этого момента времени имеем:

$$\begin{aligned} s' - 1 &= \sigma(1 - e^{-\tau}), \\ -1 &= \sigma - (\sigma - a + k\sigma\tau)e^{-\tau}. \end{aligned}$$

Так как

$$a = \begin{cases} (1 + \alpha)(s - 1) - k & \text{при } s \geq 1, \\ s - 1 - k & \text{при } \frac{1}{k} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

то, разрешая полученные уравнения относительно  $s$  и  $s'$ , получим следующие уравнения (в параметрической форме) для функции соответствия преобразования  $\Pi$ :

$$\left. \begin{aligned} \text{при } 1 \leq s < 1 + \frac{k-1}{1+\alpha} \\ s &= 1 + \frac{k + \sigma + k\sigma\tau - (1 + \sigma)e^{-\tau}}{1 + \alpha}, \\ s' &= 1 + \sigma(1 - e^{-\tau}); \end{aligned} \right\} \quad (10.85a)$$

<sup>1)</sup> Точнее,  $s' = 1 + g(s)$  и  $\frac{ds'}{ds} = g'(s)$ , где  $g(s)$  и  $g'(s)$  — малые величины порядка  $\frac{1 + \alpha}{1 + \beta}$  и  $\frac{\sigma}{1 + \beta}$ .

при  $\frac{1}{k} \leq s \leq 1$

$$\left. \begin{array}{l} s = 1 + k + \sigma + k\sigma\tau - (1 + \sigma)e^\tau, \\ s' = 1 + \sigma(1 - e^{-\tau}); \end{array} \right\} \quad (10.856)$$

заметим, что уравнения (10.85б) получаются из (10.85а), если заменить в последних  $\alpha$  на 0. Точки  $s = 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$  соответствует значение  $\tau = 0$  и  $s' = 1$ , точке  $s = 1$  — значение  $\tau = \tau_1$ , точке  $s = \frac{1}{k} -$

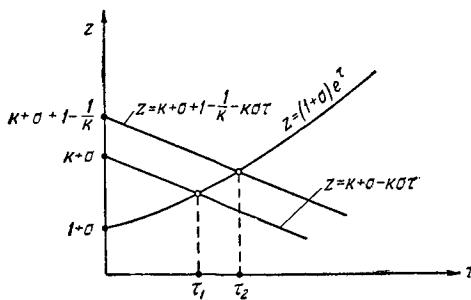


Рис. 587.

значение  $\tau = \tau_2$ , где  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — значения параметра  $\tau$ , определяемые однозначно уравнениями:

$$\left. \begin{array}{l} (1 + \sigma)e^{\tau_1} = k + \sigma + k\sigma\tau_1, \\ (1 + \sigma)e^{\tau_2} = 1 - \frac{1}{k} + k + \sigma + k\sigma\tau_2 \end{array} \right\} \quad (10.86)$$

(графическое решение этих уравнений приведено на рис. 587; очевидно, что  $\tau_2 > \tau_1$ ).

Так как

$$\frac{ds}{d\tau} = \begin{cases} \frac{k\sigma - (1 + \sigma)e^\tau}{1 + \sigma} & \text{при } 1 < s < 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}, \\ k\sigma - (1 + \sigma)e^\tau & \text{при } \frac{1}{k} < s < 1, \end{cases}$$

$$\frac{ds'}{d\tau} = \sigma e^{-\tau} < 0, \text{ поскольку } \sigma < 0,$$

$$\frac{ds'}{ds} = \begin{cases} (1 + \sigma) \frac{-\sigma e^{-\tau}}{-k\sigma + (1 + \sigma)e^\tau} & \text{при } 1 < s < 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}, \\ \frac{-\sigma e^{-\tau}}{-k\sigma + (1 + \sigma)e^\tau} & \text{при } \frac{1}{k} < s < 1, \end{cases}$$

то при  $-1 \leq \sigma < 0$   $\frac{ds}{d\tau} < 0$  и монотонному изменению  $\tau$  от 0 до  $\tau_2$

соответствует монотонное уменьшение  $s$  от  $1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$  до  $\frac{1}{k}$ . Далее, в силу первого из условий (10.78)

$$0 < \frac{ds'}{ds} < \frac{1+\alpha}{k} < 1 \quad \text{при } 1 < s < 1 + \frac{k-1}{1+\alpha},$$

$$0 < \frac{ds'}{ds} < \frac{1}{k} < 1 \quad \text{при } \frac{1}{k} < s < 1.$$

Таким образом, точечное преобразование  $\Pi$  при  $-1 \leq \sigma < 0$  не может иметь неподвижных точек  $s^*$  на интервале  $1 < s < 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$ , так как на этом интервале  $s' < 1$ , и может иметь единственную и устойчивую неподвижную точку на интервале  $\frac{1}{k} \leq s < 1$  (единственность и устойчивость неподвижной точки, если

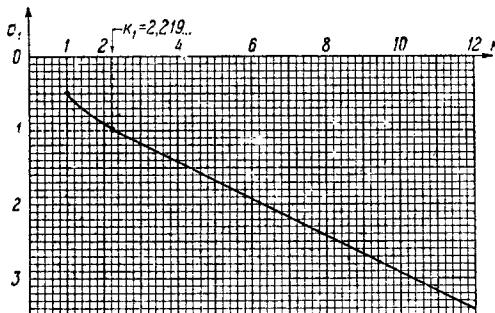


Рис. 588.

она существует, следует из неравенства  $0 < \frac{ds'}{ds} < 1$ , доказанного выше для всех  $\frac{1}{k} < s < 1$ ). Значение параметра преобразования  $\tau = \tau^*$  для этой неподвижной точки определяется согласно (10.85б) уравнением

$$k + k\sigma\tau^* + \sigma e^{-\tau^*} - (1 + \sigma)e^{\tau^*} = 0 \quad (10.87)$$

и дает нам величину полупериода разрывных автоколебаний (в единицах безразмерного времени), если пренебречь длительностью «быстрых» и «полубыстрых» движений.

Условие существования неподвижной точки  $s^*$  на интервале  $\frac{1}{k} \leq s < 1$ , очевидно, может быть записано в виде  $(s')_{\tau = \tau_*} \geq \frac{1}{k}$  или, используя (10.81), в виде

$$\sigma \geq \sigma_1 = \sigma_1(k), \quad (10.88)$$

где  $\sigma_1$  — бифуркационное значение параметра  $\sigma$ , определяемое уравнением

$$(s')_{\tau_1 = \tau_2} = 1 + \sigma(1 - e^{-\tau_2}) = \frac{1}{k}$$

совместно со вторым из уравнений (10.86), выражающим  $\tau_2$  через  $\sigma$  и  $k$ . Так как  $\tau_2 > 0$ , то при  $k > 1$   $\sigma_1 < 0$ ; кроме того,  $\sigma_1 = -1$  при  $k = k_1 = 2,219 \dots$ <sup>1)</sup>. График функции  $\sigma_1 = \sigma_1(k)$ , построенный на основании численного решения указанных уравнений, приведен на рис. 588<sup>2)</sup>. Так как при  $k > k_1 \approx 2,2 \dots$   $\sigma_1 < -1$ , то неподвижная точка  $s^*$  на интервале существует при всех  $-1 < \sigma < 0$ , если  $k > k_1$ .

в) *Точечное преобразование* II при  $0 < s < \frac{1}{k}$  и  $\sigma \geq -1$ . При  $0 < s < \frac{1}{k}$  концевая точка  $(x_1^+, x_2^+)$  скачка изображающей точки из точки  $s$  полупрямой  $\Gamma_1$  лежит согласно (10.80а) уже внутри области (II). Интегрируя дифференциальные уравнения (10.79б), нетрудно получить следующее уравнение траектории  $L$  «медленных» движений, начинаящейся в точке  $(x_1^+, x_2^+)$  при  $t = 0$  и проходящей в области (II):

$$x_1 = \sigma + (x_1^+ - \sigma)e^{-t}, \quad x_2 = \sigma + [k(x_1^+ - \sigma)t + x_2^+ - s]e^{-t}. \quad (10.89)$$

Эта траектория при  $\sigma \geq -1$  или выходит на границу областей (II) и (III) и переходит затем в область (III) (это может быть только при  $\sigma > 0$  и заведомо имеет место при  $\sigma \geq \frac{1}{k-1}$ , тогда координата последующей точки  $s' = 1$ ), или же выходит на полупрямую  $\Gamma_2$ ,

<sup>1)</sup>  $k_1$  является единственным корнем уравнения  $ke^{-(1-\frac{1}{k})\tau_2} = 1$ .

<sup>2)</sup> Численное решение уравнения  $\frac{1}{k} = 1 + \tau_1(1 - e^{-\tau_2})$  и второго из уравнений (10.86)  $(1 + \sigma_1)e^{\tau_2} = 1 - \frac{1}{k} + \tau_1 + k\tau_1\tau_2$  удобно вести следующим образом. Подставим первое уравнение во второе и разреним его относительно  $\sigma_1$ :

$$\sigma_1 = \frac{k - e^{\tau_2}}{e^{\tau_2} - e^{-\tau_2} - k\tau_2}. \quad (\text{A})$$

Тогда после подстановки снова в первое уравнение получим:

$$k^2(\tau_2 - 1 + e^{-\tau_2}) - k(\tau_2 + 1 - e^{-\tau_2}) + e^{\tau_2} - e^{-\tau_2} = 0. \quad (\text{B})$$

Задавая различные значения  $\tau_2 > 0$ , но такие, чтобы дискриминант квадратного уравнения (B) был положительным (для этого  $\tau_2$  должно удовлетворять неравенству  $0 < \tau_2 < 0,82 \dots$ ), мы найдем из уравнения (B) для каждого значения  $\tau_2$  два значения  $k$  и затем из уравнения (A) соответствующие им значения  $\sigma_1$ . Заметим, что при  $\tau_2 \rightarrow 0$  один из корней  $k$  квадратного уравнения (B) стремится к 1, другой — к  $+\infty$ , а соответствующие значения  $\sigma_1$  — к  $-\frac{1}{\tau_2}$  и к  $-\infty$ .

оставаясь все время в пределах области (II) (в этом случае абсцисса  $x'_1$  точки выхода  $L$  на  $\Gamma_2$  заключена в интервале между  $x'_1$  и  $\sigma$ ).

Пусть при некотором  $t = \tau > 0$  изображающая точка, двигаясь по траектории  $L$  (в пределах области (II)), приходит на полу прямую  $\Gamma_2$ . Тогда координата  $s'$  последующей точки преобразования  $\Pi$  ( $s' = x'_1 - 1$ ) определится уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} s' - 1 &= \sigma + (ks - 1 - \sigma)e^{-\tau}, \\ -1 &= \sigma + [k(ks - 1 - \sigma)\tau - (k^2 - 1)s - 1 - \sigma]e^{-\tau} \end{aligned} \right\} \quad (10.89a)$$

(здесь мы использовали соотношения (10.80a), выражающие координаты концевой точки скачка через координату  $s$  начальной точки скачка на полу прямой  $\Gamma_1$  при  $0 < s < \frac{1}{k}$ ).

При  $\sigma = -1$  второе уравнение (10.89a) определяет для всех траекторий  $L$  одно и то же время пробега  $\tau$ , именно  $\tau = 1 - \frac{1}{k^2}$ ; тогда согласно первому уравнению (10.89a) функция соответствия (для  $0 < s < \frac{1}{k}$ ) будет линейной:

$$s' = s k e^{-(1 - \frac{1}{k^2})}, \quad (10.90)$$

ее графиком является отрезок прямой с угловым коэффициентом  $k e^{-(1 - \frac{1}{k^2})}$ , начинающийся в начале координат. Очевидно, при  $k > k_1$ , где  $k_1 = 2,2 \dots$  — единственный корень уравнения  $k e^{-(1 - \frac{1}{k^2})} = 1$ , этот отрезок расположен над биссектрисой  $s' = s$  и при  $k < k_1$  — под ней<sup>1)</sup>.

При  $\sigma > -1$  график функции соответствия  $s' = \Pi(s)$  для  $0 < s \leq \frac{1}{k}$  идет в силу (10.81) всюду над прямой (10.90), т. е.  $s' = \Pi(s) > s k e^{-(1 - \frac{1}{k^2})}$ , поэтому при изменении  $s$  от 0 до  $\frac{1}{k}$   $s'$  монотонно возрастает (так как  $\frac{ds'}{ds} > 0$ ) от некоторого значения  $s'_0 = \Pi(0) > 0$  до значения  $\Pi\left(\frac{1}{k}\right) > e^{-(1 - \frac{1}{k^2})}$ . Разрешая уравнения (10.89a) относительно  $s$  и  $s'$ , мы получим функцию соответствия

<sup>1)</sup> Отсюда в силу (10.81) еще раз следует, что при  $-1 < \sigma < 0$  и  $k \geq k_1$   $(s')_{s=\frac{1}{k}} > \frac{1}{k}$  и, следовательно, преобразование  $\Pi$  имеет неподвижную точку  $\frac{1}{k} < s^* < 1$ .

в следующей параметрической форме:

$$\left. \begin{aligned} s &= (1 + \sigma) \frac{1 + k\tau - e^{-\tau}}{k^2\tau - (k^2 - 1)}, \\ s' &= (1 + \sigma) \frac{k^2\tau - (k^2 + k - 1)(1 - e^{-\tau})}{k^2\tau - (k^2 - 1)}, \end{aligned} \right\} \quad (10.91)$$

при условии, конечно, что  $s' \leq 1$ .

Если же для тех или иных значений  $s$  в интервале  $0 < s < \frac{1}{k}$  второе соотношение (10.91) дает значения  $s' > 1$ , то это, очевидно, означает, что рассматриваемые траектории  $L$  не выходят на отрезок полупрямой  $\Gamma_2$ , лежащий в пределах области (II), а переходят в область (III); следовательно, для этих значений  $s$  функция соответствия не будет выражаться соотношениями (10.91). Это может быть только при  $\sigma > 0$  и заведомо имеет место для всех  $0 < s \leq \frac{1}{k}$  при  $\sigma \geq \frac{1}{k-1}$ , когда все траектории в области (II) переходят в область (III)<sup>1)</sup>. Поэтому траектории  $L$ , соответствующие таким значениям  $s$ , начинаясь в точках  $(x_1^+, x_2^-)$  области (II), переходят в область (III) — в малую окрестность траектории  $x_1 \equiv x_0 = \frac{\sigma}{1+\beta} \approx 0$ , где и выходят на полупрямую  $\Gamma_2$  — в точках с абсциссами  $x_1' \approx x_0 \approx \approx 0$ , т. е. для таких значений  $s$  координата последующей точки

$$s' = 1. \quad (10.91a)$$

Рассмотрим кратко функцию соответствия (10.91). Очевидно, точке  $s = \frac{1}{k}$  соответствует значение  $\tau = \tau_2$ , определяемое вторым из уравнений (10.86), а точке  $s = 0$  — значение  $\tau = \tau_3 > 0$ , определяемое однозначно (при  $k > 1$ ) уравнением

$$e^{\tau_3} = 1 + k\tau_3.$$

Далее, нетрудно показать, что значениям  $s$  в интервале  $0 < s < \frac{1}{k}$  соответствуют значения параметра  $\tau$  в интервале  $\tau_3 > \tau > \tau_2$ .

<sup>1)</sup> Согласно первому из уравнений (10.89а)  $s' < 1$  для всех  $0 < s < \frac{1}{k}$ , если  $\sigma < 0$ . Наоборот, при  $\sigma > 0$  траектория  $L_1$ , соответствующая  $s = \frac{1}{k}$ , не переходит в область (III), поэтому в силу непрерывной зависимости траекторий  $L$  от начальных условий в область (III) будут переходить и траектории  $L$ , близкие к  $L_1$  и соответствующие значениям  $s$  ( $s < \frac{1}{k}$ ), близким к  $\frac{1}{k}$ , т. е., при  $\sigma > 0$  всегда существуют такие значения  $s$  в интервале  $0 < s < \frac{1}{k}$ , для которых функция соответствия не выражается соотношениями (10.91).

Для доказательства последнего утверждения введем вспомогательную функцию

$$\Psi(\tau) = \frac{1 + k\tau - e^\tau}{k^2\tau - (k^2 - 1)},$$

со знаком которой совпадает (при  $s > -1$ ) знак  $s$ . Знаменатель этой функции  $k^2\tau - (k^2 - 1)$  меньше нуля при  $\tau < \tau_4$  и больше нуля при  $\tau > \tau_4$ , где  $\tau_4 = 1 - \frac{1}{k^2}$ ; при  $\tau = \tau_4$  знаменатель функции  $\Psi$  обращается в нуль, а сама

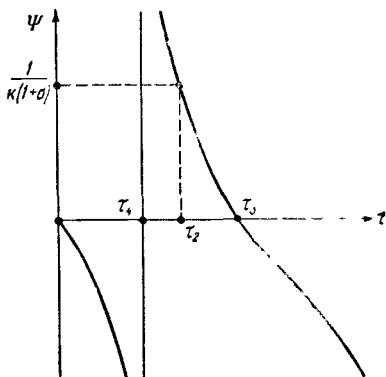


Рис. 589.

функция — в бесконечность. Числитель функции  $\Psi$ ,  $1 + k\tau - e^\tau$ , равен нулю при  $\tau = 0$ , больше нуля при  $0 < \tau < \tau_4$  ( $\tau_4$  было введено выше), обращается в нуль при  $\tau = \tau_4$  и меньше нуля при  $\tau > \tau_4$ . Так как при  $\tau = \tau_4$  числитель функции  $\Psi$ :  $1 + k\tau - e^\tau = 1 + \tau_4(1 - \tau_4)^{-1} = -e^{\tau_4} > 0$ , поскольку  $0 < \tau_4 < 1$ ,  $k = (1 - \tau_4)^{-1/2}$  и при всех  $0 < \tau < 1$   $\tau(1 - \tau)^{-1/2} > e^\tau - 1$ , то  $\tau_4 < \tau_3$ . Этих сведений достаточно для качественного построения графика функции  $\Psi$  (очевидно, при  $0 < \tau < \tau_4$   $\Psi < 0$ , при  $\tau_4 < \tau < \tau_3$   $\Psi > 0$  и при  $\tau > \tau_3$   $\Psi < 0$ , причем при  $\tau \rightarrow +\infty$   $\Psi \rightarrow -\infty$ ). Этот график приведен на рис. 589. Очевидно, что  $\tau_4 < \tau_2 < \tau_3$ , так как  $\tau_2$  удовлетворяет уравнению

$\Psi(\tau_2) = \frac{1}{k(1+s)} > 0$ . Таким образом, значениям  $s$  в интервале  $0 < s < \frac{1}{k}$  соответствуют значения параметра  $\tau$  в интервале  $\tau_4 > \tau > \tau_2$ , причем на этом интервале  $\frac{ds}{dt} < 0$ , а следовательно и  $\frac{ds'}{dt} < 0$  (так как  $\frac{ds'}{ds} > 0$ ), в силу чего при монотонном увеличении параметра  $\tau$  от  $\tau_2$  до  $\tau_3$   $s$  монотонно убывает от  $\frac{1}{k}$  до 0, а  $s' = \frac{ds'}{ds}|_{\tau=\tau_2} > e^{-(1-\frac{1}{k})}$  до  $s'_0 = (s')|_{\tau=\tau_3} > 0$ .

Если точечное преобразование II имеет неподвижную точку  $s^*$  на интервале  $0 < s < \frac{1}{k}$ , то параметр преобразования  $\tau = \tau^*$  ( $\tau_4 < \tau^* < \tau_3$ ) для нее определяется из условия  $s = s' < \frac{1}{k} < 1$  или согласно (10.91) из уравнения

$$e^\tau + k(k-1)\tau - (k^2 + k - 1)(1 - e^{-\tau}) - 1 = 0. \quad (10.92)$$

Нетрудно показать, что это уравнение имеет единственный положительный корень  $\tau^*$  (тогда если корень  $\tau^*$  удовлетворяет неравенствам  $\tau_4 < \tau^* < \tau_3$ , то преобразование II имеет единственную неподвижную точку  $s^*$  на интервале  $0 < s < \frac{1}{k}$ ). Рассмотрим с этой целью вспомогательную функцию

$$\Phi(\tau) = e^\tau + k(k-1)\tau - (k^2 + k - 1)(1 - e^{-\tau}).$$

Для нее

$$\begin{aligned}\Phi'(\tau) &= e^\tau + k(k-1) - (k^2 + k - 1)e^{-\tau}, \\ \Phi''(\tau) &= e^\tau + (k^2 + k - 1)e^{-\tau} > 0, \\ \Phi(0) &= 0, \quad \Phi'(0) = -2(k-1) < 0, \\ \Phi(+\infty) &= +\infty, \quad \Phi'(+\infty) = +\infty.\end{aligned}$$

Поэтому график функции  $\Phi(\tau)$  имеет вид, изображенный на рис. 590: функция  $\Phi(\tau) < 0$  при достаточно малых положительных  $\tau$  и имеет единственный минимум  $\Phi_{\min} < 0$  (при некотором  $\tau = \tau' > 0$ , определяемом уравнением  $\Phi'(\tau) = 0$ ); при  $\tau > \tau'$  функция  $\Phi(\tau)$  является монотонно возрастающей и изменяется при возрастании  $\tau$  от  $\Phi_{\min} < 0$  при  $\tau = \tau'$  до  $+\infty$  при  $\tau \rightarrow +\infty$ ; следовательно, график функции  $\Phi(\tau)$  пересекает ось  $\tau$  (при  $\tau > \tau'$ ) и притом только один раз. Таким образом, уравнение  $\Phi(\tau) = 0$  имеет единственный положительный корень  $\tau^*$ , а точечное преобразование  $\Pi$  может иметь на интервале  $0 < s < \frac{1}{k}$  не более одной неподвижной точки.

Так как при  $k > k_1 = 2,2\dots$  прямая (10.90) лежит над биссектрисой  $s' = s$ , то график функции соответствия  $s' = \Pi(s)$  при  $k > k_1$  и  $\sigma > -1$  будет лежать также над этой биссектрисой, т. е. для всех  $0 < s < \frac{1}{k}$  будет справедливо неравенство  $s' = \Pi(s) > s$ .

Следовательно, в этом случае на интервале  $0 < s < \frac{1}{k}$  нет неподвижных точек преобразования  $\Pi$ .

При  $\sigma > -1$ , но  $k < k_1$  (когда  $\sigma_1(k) > -1$ ) возможны два случая.

1) Если  $\sigma > \sigma_1(k)$ , то, как было показано выше (см. (10.88)),  $(s')_{\tau=\tau_2} > \frac{1}{k} = (s)_{\tau=\tau_2}$  или, иначе говоря,  $s' - s > 0$  при  $\tau = \tau_2$  (или  $s = \frac{1}{k}$ ); тот же знак разности  $s' - s$  имеет и при  $\tau = \tau_3$  (при  $s = 0$ ). Поэтому разность  $s' - s$ , являющаяся непрерывной функцией  $s$ , или не обращается в нуль на интервале  $0 < s < \frac{1}{k}$ , или же обращается в нуль на этом интервале четное число раз. Последнее, как мы только что доказали, невозможно. Следовательно, и в этом случае преобразование  $\Pi$  не имеет неподвижных точек на интервале  $0 < s < \frac{1}{k}$ .

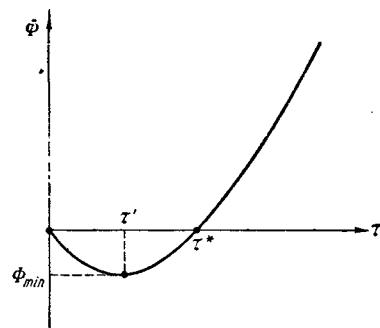


Рис. 590.

2) При  $-1 < \sigma < \sigma_1(k)$   $(s')_{\tau=\tau_2} < \frac{1}{k}$ , т. е. разность  $s' - s < 0$  при  $s = \frac{1}{k}$  (при  $\tau = \tau_2$ ); при  $s = 0$  (при  $\tau = \tau_3$ ) эта разность по-прежнему положительна. Поэтому на интервале  $0 < s < \frac{1}{k}$  разность  $s' - s$  обращается в нуль, т. е. существует неподвижная точка  $s^*$  преобразования  $\Pi$  и притом единственная, как было доказано выше. Эта неподвижная точка в силу ее единственности будет обязательно *устойчивой*. В самом деле, если бы неподвижная точка  $s^*$  была неустойчивой, то при  $s = s^*$  имело бы место неравенство  $\frac{ds'}{ds} > 1$  или  $\frac{d}{ds}(s' - s) > 0$ . Тогда разность  $s' - s$  была бы положительной величиной при значениях  $s > s^*$ , но близких к  $s^*$  (при  $s^* < s \leq s^* + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — некоторое достаточно малое положительное число), и, следовательно, обращалась бы в нуль по крайней мере еще раз на интервале  $s^* + \varepsilon < s < \frac{1}{k}$ , т. е. точечное преобразование  $\Pi$  имело бы на интервале  $0 < s < \frac{1}{k}$  еще одну неподвижную точку (кроме  $s^*$ ), что невозможно.

г) *Точечное преобразование  $\Pi$  при  $\sigma < -1$ .* При  $\sigma < -1$  в области (I) существует устойчивое состояние равновесия  $(\sigma, 0)$ , к которому идет часть траекторий «медленных» движений (см. рис. 585, а и 586). Поэтому теперь существует такое  $s_0 > 0$ , которое является точной нижней границей значений  $s$  для точек, имеющих последующие, т. е. точечное преобразование  $\Pi$  существует только при  $s > s_0$  (см. также стр. 869). Конечно, эта нижняя граница интервала существования преобразования  $\Pi$  заведомо меньше  $1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$ , так как точки  $s \geq 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$  имеют последующие  $s'$ , определяемые функцией (10.82) при любых  $\sigma$  и, в частности, при  $\sigma < -1$ .

Далее, при выводе выражений (10.85а), (10.85б) и (10.91) для функций соответствия преобразования  $\Pi$  мы нигде не пользовались условием  $\sigma \geq -1$  (это условие использовалось только при их анализе). Поэтому указанные выражения остаются справедливыми в соответствующих интервалах изменения  $s$  и при  $\sigma < -1$  (но, конечно, только в пределах интервала существования преобразования  $\Pi$  — только при  $s > s_0$ ).

Отметим, наконец, что в силу (10.81) при  $\sigma < -1$  и всех  $s_0 < s < 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$  имеет место неравенство

$$s' = \Pi(s) < (s')_{\sigma=-1}, \quad (10.93)$$

где

$$(s')_{\sigma=-1} = \begin{cases} ske^{-\left(1-\frac{1}{k^2}\right)} & \text{при } 0 < s \leq \frac{1}{k}, \\ e^{-\left(1-\frac{s}{k}\right)} & \text{при } \frac{1}{k} \leq s \leq 1, \\ e^{-\left(1+\frac{\alpha}{k}-\frac{1+\alpha}{k}s\right)} & \text{при } 1 \leq s \leq 1 + \frac{k-1}{1+\alpha} \end{cases}$$

— функция соответствия для  $\sigma = -1$ <sup>1)</sup>. Из неравенства (10.93) следует, что  $s' < s$  при  $\sigma < -1$ ,  $k < k_1 = 2,2\dots$  и всех  $s > s_0$ , поскольку при  $k < k_1$   $(s')_{\sigma=-1} < s$ , т. е. преобразование II в этом случае не имеет неподвижных точек. Оно может иметь неподвижные точки только при  $k > k_1$ . При этом, поскольку  $s' < 1$  при  $\sigma < -1$  и всех  $s_0 < s < 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$  (см. неравенство (10.93)), неподвижные точки  $s^*$  могут лежать только на интервале  $s_0 < s < 1$ , вследствие чего значения параметра  $\tau = \tau^*$  для этих точек будут определяться уравнением (10.87), если  $\frac{1}{k} < s^* < 1$ , и уравнением (10.92), если  $s^* < \frac{1}{k}$ . Последнее уравнение, как было доказано выше (см. доказательство на стр. 879, справедливое и при  $\sigma < -1$ ), не может иметь более одного положительного корня  $\tau^*$ , следовательно, если на интервале  $s_0 < s < \frac{1}{k}$  имеется неподвижная точка  $s^*$  преобразования II, то только одна (само собой разумеется, что для существования такой неподвижной точки необходимо, чтобы  $s_0 < \frac{1}{k}$ ).

Итак, пусть  $\sigma < -1$  и  $k > k_1 = 2,2\dots$  Так как при  $s = s_0$  разность  $s' - s = -s_0 < 0$ , то преобразование II имеет неподвижную точку и притом одну, если при  $s = \frac{1}{k}$  разность

$$s' - s = (s')_{\tau=\tau_2} - \frac{1}{k} > 0,$$

т. е. если (см. (10.88))

$$\sigma > \sigma_1(k)$$

(напомним, что  $\sigma_1(k) < -1$  при  $k > k_1$ ). В этой неподвижной точке  $s = s^*$  разность  $s' - s$  изменяет свой знак с отрицательного (при  $s < s^*$ )

<sup>1)</sup> Явные выражения для функции соответствия при  $\sigma = -1$  и

$$\frac{1}{k} \leq s \leq 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$$

получаются из (10.85а) и (10.85б): при  $\sigma = -1$   $s' = e^{-\tau}$ , а  $\tau$  оказывается кусочно-линейной функцией  $s$ .

на положительны $\ddot{\text{y}}$  (при  $s > s^*$ ), значит при  $s = s^*$   $\frac{d}{ds}(s' - s) > 0$  или  $\frac{ds'}{ds} > 1$ , т. е. единственная (на интервале  $s_0 < s < \frac{1}{k}$ ) неподвижная точка  $s^*$  преобразования  $\Pi$ , существующая при  $k > k_1$  и  $\sigma_1(k) < \sigma < -1$ , является неустойчивой.

Если же  $\sigma < \sigma_1(k)$ , то при  $s = \frac{1}{k}$   $s' - s = (s')_{\tau=\tau_2} - \frac{1}{k} < 0$ , поэтому разность  $s' - s$  в силу ее непрерывности или не обращается в нуль на интервале  $s_0 < s < \frac{1}{k}$ , или же обращается в нуль на этом интервале четное число раз. Так как последнее невозможно, то, следовательно, преобразование  $\Pi$  не имеет неподвижных точек на интервале  $s_0 < s < \frac{1}{k}$  и при  $\sigma < \sigma_1(k)$ .

Рассмотрим теперь функцию соответствия на интервале  $\frac{1}{k} < s < 1$ .

Так как  $s' > 0$  на всем интервале существования преобразования  $\Pi$  (при всех  $s > s_0$ ), то согласно (10.855) имеем:

$$s' = 1 + \sigma(1 - e^{-\tau}) > 0, \quad \text{т. е. } \frac{1+\sigma}{\sigma} e^\tau < 1,$$

и

$$\frac{ds}{ds'} = e^\tau \left( k - \frac{1+\sigma}{\sigma} e^\tau \right) > e^\tau (k - 1) > e^\tau (k_1 - 1) > 1$$

(не следует забывать, что мы рассматриваем случай  $\sigma > -1$  и  $k > k_1 = 2, 2, \dots > 2$ ). Таким образом, для всех  $s$ , удовлетворяющих неравенствам  $s > s_0$  и  $\frac{1}{k} < s < 1$ , имеем:

$$0 < \frac{ds}{ds'} < 1 \quad \text{и} \quad \frac{d}{ds}(s' - s) < 0.$$

Отсюда следует, что если на интервале  $\frac{1}{k} < s < 1$  существует неподвижная точка преобразования  $\Pi$ , то она является *устойчивой* и, кроме того, *единственной* (на этом интервале), так как на указанном выше интервале изменения  $s$  разность  $s' - s$  является монотонно убывающей функцией  $s$  и поэтому не может обращаться в нуль более одного раза. Поскольку  $s' - s < 0$  при  $s = 1$ , то эта неподвижная точка существует только при

$$\sigma > \sigma_1(k),$$

когда при  $s = \frac{1}{k}$  разность  $s' - s = (s')_{\tau=\tau_2} - \frac{1}{k} > 0$ .

Если же  $\sigma < \sigma_1(k)$ , то при  $s = \frac{1}{k}$ , если  $s_0 < \frac{1}{k}$ , или при  $s = s_0$ , если  $\frac{1}{k} < s_0 < 1$ , разность  $s' - s < 0$  и будет отрицательной величиной при всех  $s$  на рассматриваемом интервале, так как там  $\frac{d}{ds}(s' - s) < 0$ <sup>1)</sup>. Следовательно, в этом случае преобразование  $\Pi$  не имеет неподвижных точек на интервале  $\frac{1}{k} < s < 1$ .

Таким образом, при  $\sigma < -1$  преобразование  $\Pi$  не имеет неподвижных точек как при  $k < k_1$ , так и при  $k > k_1$ , но  $\sigma < \sigma_1(k)$ , и

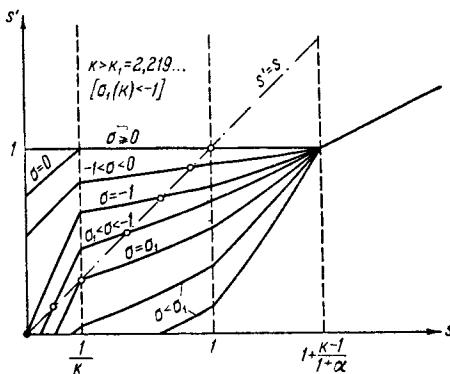


Рис. 591.

имеет две неподвижные точки (устойчивую на интервале  $\frac{1}{k} < s < 1$  и неустойчивую на интервале  $s_0 < s < \frac{1}{k}$ ) при  $k > k_1$  и  $\sigma_1(k) < \sigma < -1$ .

**4. Диаграммы Ламерея. Мягкий и жесткий режимы установления разрывных автоколебаний.** Сказанное выше относительно преобразования  $\Pi$  и его неподвижных точек позволяет построить диаграммы Ламерея (графики функции соответствия на плоскости  $s, s'$ ) и с их помощью проанализировать возможные режимы работы мультивибратора. Семейство графиков функции соответствия  $s' = \Pi(s)$ , построенных для различных  $\sigma$ , имеет вид, приведенный на рис. 591 при  $k > k_1 = 2,2\dots$  и на рис. 592 при  $k < k_1$  (напомним, что мы рассматриваем случай  $k > 1 + \alpha$  и  $\beta \geq 1 + \alpha, \sigma$ ).

При  $\sigma > -1$  преобразование  $\Pi$  существует при всех  $s > 0$  и имеет единственную и устойчивую неподвижную точку  $s^*$  ( $0 < s^* \leq 1$ ),

<sup>1)</sup> Мы не рассматриваем случая  $1 < s_0 < 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$ , так как в этом случае преобразование  $\Pi$  не существует при  $s < 1$  и, следовательно, не имеет никаких неподвижных точек.

к которой, как нетрудно убедиться хотя бы путем построения «лестниц Ламерея», сходятся все последовательности точек пересечения траекторий системы с полупрямыми  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ ; соответственно в фазовом пространстве существует единственный и устойчивый разрывный предельный цикл, к которому приближаются (при  $t \rightarrow +\infty$ ) все остальные траектории. Таким образом, при  $\sigma > -1$  (при  $E_g > -u_0$ ) в мультивибраторе устанавливаются одни и те же периодические разрывные колебания (разрывные автоколебания) при любых начальных условиях, т. е. имеет место *мягкий режим установления разрывных автоколебаний*.

При  $\sigma < -1$  в фазовом пространстве имеется устойчивое состояние равновесия, а точечное преобразование  $\Pi$  существует только

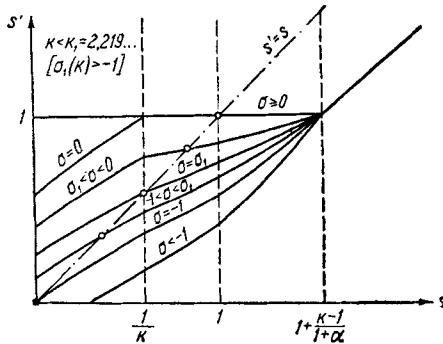


Рис. 592.

при  $s > s_0$  ( $s_0 > 0$  и зависит от  $k$  и  $\sigma$ ; точкам  $0 < s < s_0$  соответствуют траектории системы, асимптотически приближающиеся к состоянию равновесия без выхода на границу области «медленных» движений). В зависимости от значений параметров  $k$  и  $\sigma$  возможны два случая.

При  $k < k_1$ , а также при  $k > k_1$ , но  $\sigma \leq \sigma_1(k) < -1$ , преобразование  $\Pi$  не имеет неподвижных точек,  $s' < s$  при всех  $s > s_0$  и, следовательно, все последовательности точек пересечения траекторий (на плоскости  $x_1, x_2$ ) с полупрямыми  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  являются конечными, причем последняя точка лежит в интервале  $0 < s < s_0$ . Следовательно, в этом случае в мультивибраторе (после конечного числа разрывных колебаний) устанавливается устойчивое состояние равновесия (при любых начальных условиях), т. е. *мультивибратор не может совершать автоколебаний*.

При  $k > k_1 = 2,2\dots$  и  $\sigma_1(k) < \sigma < -1$  точечное преобразование  $\Pi$  имеет две неподвижные точки  $s_1^*$  и  $s_2^*$  ( $s_0 < s_1^* < \frac{1}{k} < s_2^* < 1$ ), первая из которых является неустойчивой, вторая — устойчивой. Соответственно в фазовом пространстве, кроме устойчивого состояния

равновесия, имеются еще два разрывных предельных цикла, один из которых (соответствующий  $s = s_2^*$ ) устойчив, а другой (соответствующий  $s = s_1^*$ ) неустойчив. Нетрудно видеть, что все последовательности точек пересечения траекторий системы с полупрямыми  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$

$$s, s_1, s_2, \dots$$

с начальными точками  $s > s_1^*$  сходятся к устойчивой неподвижной точке  $s_2^*$ , а последовательности с начальными точками  $s < s_1^*$  являются конечными, так как последняя точка  $s_N < s_0$  (в этом можно убедиться, например, путем построения «лестниц Ламеря»).

Таким образом, в этом случае в зависимости от начальных условий устанавливается или устойчивое состояние равновесия, или устойчивый автоколебательный режим, т. е. в мультивибраторе имеет место *жесткий режим установления разрывных автоколебаний*<sup>1)</sup>. При фиксированном  $k > k_1$ , когда  $\sigma_1 = \sigma_1(k) < -1$ , мы получаем типичную для жесткого режима «гистерезисную» зависимость амплитуды автоколебаний от сеточного смещения  $E_g$  (от параметра  $\varphi$ ). Пусть  $\sigma$  достаточно медленно возрастает, начиная с отрицательных значений  $\sigma < \sigma_1$ . Тогда мультивибратор будет находиться в состоянии равновесия до тех пор, пока  $\sigma$  не достигнет значения  $\sigma = -1$ , при котором состояние равновесия становится неустойчивым. При  $\sigma = -1$  мультивибратор перейдет в автоколебательный режим с конечной, отличной от нуля амплитудой колебаний (напомним, что автоколебательный режим существует при  $\sigma > \sigma_1$ ). При дальнейшем увеличении сеточного смещения автоколебания сохраняются, причем их амплитуда непрерывно возрастает. Если теперь мы будем изменять сеточное смещение в обратном направлении, т. е. будем уменьшать параметр  $\sigma$  (опять достаточно медленно), то автоколебания в мультивибраторе будут сохраняться при  $\sigma > \sigma_1$  (их амплитуда будет непрерывно уменьшаться, причем она будет стремиться к конечной, отличной от нуля величине при  $\sigma \rightarrow \sigma_1 + 0$ ). При  $\sigma = \sigma_1$  автоколебания срываются, так как устойчивый предельный цикл сливается с неустойчивым, и в мультивибраторе устанавливается состояние равновесия<sup>2)</sup>.

Для иллюстрации сказанного на рис. 593 изображена плоскость параметров, разбитая на области, каждая из которых соответствует определенному режиму работы мультивибратора. Границами этих

<sup>1)</sup> По-видимому, впервые существование жесткого режима установления разрывных автоколебаний в мультивибраторе было показано в работе В. В. Витковича [43].

<sup>2)</sup> Скорость изменения параметра  $\sigma$  должна быть настолько малой, чтобы в каждый момент времени режим работы мультивибратора мало отличался от стационарных режимов при соответствующем постоянном значении  $\sigma$ , т. е. чтобы изображающая точка оставалась вблизи устойчивого состояния равновесия или устойчивого разрывного предельного цикла, несмотря на изменение параметра  $\sigma$ .

областей являются линии  $k = 1$ ,  $\sigma = -1$  и  $\sigma = \sigma_1(k)$  (при  $\sigma < -1$ )<sup>1</sup>). Разбиение полосы  $1 < k < 1 + \alpha$  на области различных режимов работы мультивибратора на рис. 593 не дается, так как этот случай мы не рассматривали.

**5. Автоколебания мультивибратора при  $E_g \geq 0$ .** Вычислим период разрывных автоколебаний мультивибратора и построим осциллограммы напряжений для случая  $E_g \geq 0$ , наиболее интересного с точки зрения практических приложений (по-прежнему будем считать выпол-

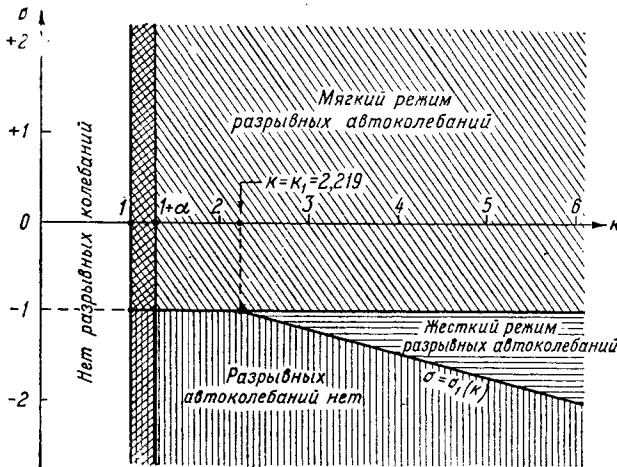


Рис. 593.

ненными условиями (10.78)). Как мы видели, при  $E_g \geq 0$  (при  $\sigma \geq 0$ ) единственное состояние равновесия мультивибратора

$$x_1 = x_2 = \frac{\sigma}{1 + \beta} \approx 0$$

неустойчиво и все траектории приближаются (при  $t \rightarrow +\infty$ ) к единственному и устойчивому разрывному предельному циклу, соответствующему единственной и устойчивой неподвижной точке  $s^* \approx 1$  точечного преобразования II. Проекции этого предельного цикла на плоскости  $x_1, x_2$  и  $y_1, y_2$  изображены (качественно) на рис. 594. Этот предельный цикл состоит из траекторий «быстрых» движений  $A_1A_2$  и  $A'_1A'_2$  (эти траектории проектируются на плоскость  $y_1, y_2$  в точки, так как во время «быстрого» движения изображающей точки  $y_1, y_2 \approx \text{const}$ ), из кусков траекторий «полубыстрых» движений  $A_2A_3$  и  $A'_2A'_3$ , которые проходят изображающей точкой за интервалы времени порядка  $\frac{1+\alpha}{1+\beta} \ll 1$  (в единицах безразмерного

<sup>1</sup>) При  $k < 1$ , как уже указывалось, разрывных колебаний нет и при любых начальных условиях устанавливается устойчивое состояние равновесия.

времени), и из кусков траекторий «медленных» движений  $A_3A_1$  и  $A'_3A_1^{-1}$ .

Так как при  $\sigma \geq 0$  координата неподвижной точки преобразования  $\Pi$   $s^* = 1$  (с точностью до членов порядка  $\frac{1+\alpha}{1+\beta}$  и  $\frac{\sigma}{1+\beta}$ ), то

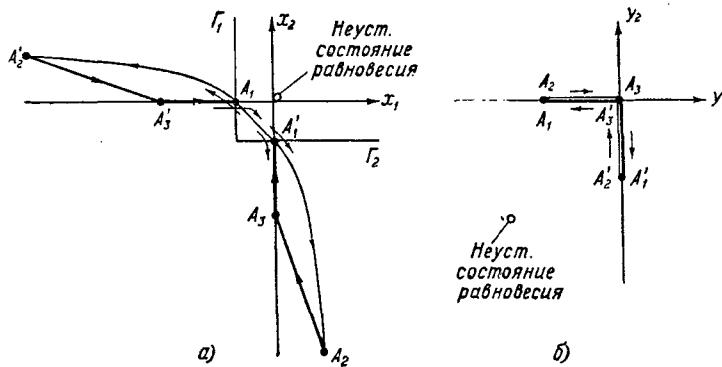


Рис. 594.

траектория «быстрого» движения  $A_1A_3$  начинается в точке  $A_1$  с координатами  $^2)$ :

$$x_1^{(1)} = -1, \quad x_2^{(1)} = s^* - 1 = 0, \quad y_1^{(1)} = -(k-1), \quad y_2^{(1)} = 0;$$

тогда координаты концевой точки  $A_3$  этой траектории определяются по  $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$  условиями скачка (10.80):

$$x_1^{(2)} = \frac{k-1}{1+\alpha}, \quad x_2^{(2)} = -k \frac{k+\alpha}{1+\alpha}, \quad y_1^{(2)} = -(k-1), \quad y_2^{(2)} = 0.$$

Для «быстрого» движения изображающей точки по траектории  $A_1A_2$  имеем:  $y_1 \equiv y_1^{(1)} = -(k-1)$ ,  $y_2 \equiv y_2^{(1)} = 0$ , тогда согласно (10.77а) эта траектория вместе с другими траекториями «быстрых» движений, происходящих при тех же постоянных значениях  $y_1$  и  $y_2$ , определяется приближенно (но тем точнее, чем меньше  $\mu$ , т. е. чем меньше паразитные емкости  $C_a, C_g$  по сравнению с емкостью  $C$ ) уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \mu \dot{x}_1 &= k-1-x_1-\alpha\psi(x_1)-k\varphi(x_2), \\ \mu \dot{x}_2 &= -x_2-\alpha\psi(x_2)-k\varphi(x_1) \end{aligned} \right\} \quad (10.94)$$

вне малой окрестности состояний равновесия этих уравнений, где имеют место «быстрые» движения ( $\dot{x}_1, \dot{x}_2 \rightarrow \infty$  при  $\mu \rightarrow +0$ ), или дифференциальным уравнением интегральных кривых

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_2-\alpha\psi(x_2)-k\varphi(x_1)}{k-1-x_1-\alpha\psi(x_1)-k\varphi(x_2)}. \quad (10.94a)$$

<sup>1)</sup> Сливающиеся проекции траекторий «медленных» и «полубыстроих» движений на плоскости  $y_1, y_2$  для наглядности несколько смешены друг относительно друга.

<sup>2)</sup> Здесь и ниже для вычисления переменных  $y_1, y_2$  во время «медленных» и «полубыстроих» движений (в частности, для точек  $A_1, A_2$  и  $A_3$  предельного цикла) использованы первые два уравнения (10.75).

Разбиение плоскости  $x_1, x_2$  на траектории приближенных уравнений (10.94) приведено на рис. 595. Эти уравнения имеют два состояния равновесия  $A_1$  и  $A_2$ : точка  $A_1$  ( $-1, 0$ ) — начальная точка скачка — является неустойчивой склонной особой точкой типа седло — узел, точка  $A_2$  ( $\frac{k-1}{1+\alpha}, -k \frac{k+\alpha}{1+\alpha}$ ) — устойчивым узлом, к которому идут все траектории «быстрых» движений (при  $y_1 \equiv -(k-1)$  и  $y_2 \equiv 0$ ). Из точки  $A_1$  (точнее, из сколь угодно малой ее окрестности) выходит единственная фазовая траектория — *сепаратриса* этой особой точки. Эта сепаратриса согласно § 3 настоящей главы и будет траекторией «быстрого» движения  $A_1A_2$ , являющейся частью разрывного предельного цикла.

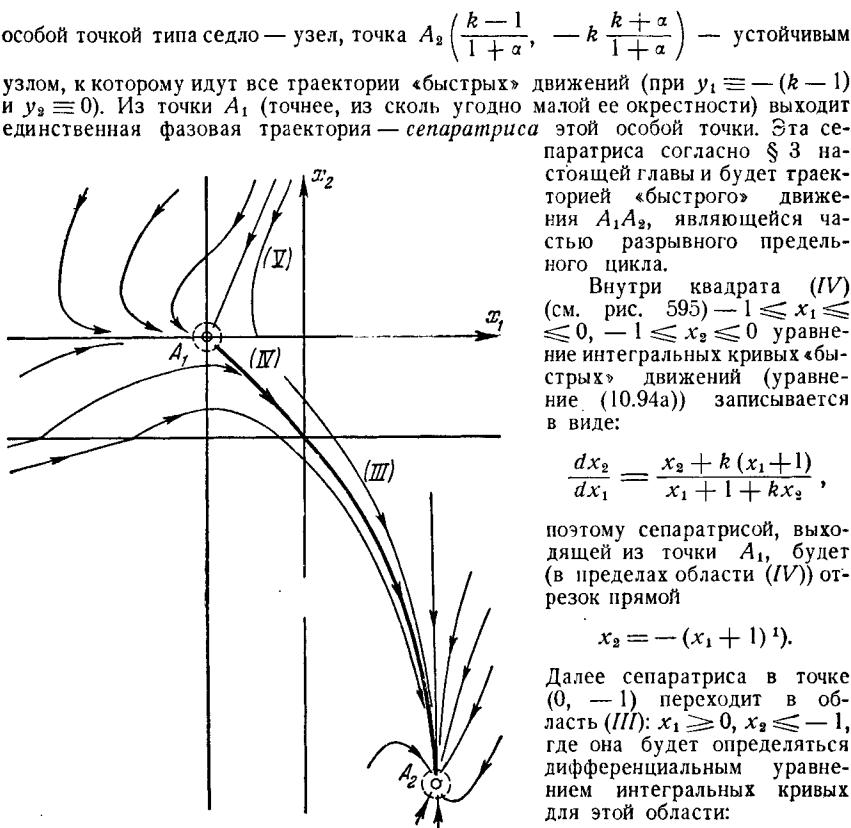


Рис. 595.

Внутри квадрата (IV) (см. рис. 595)  $-1 \leq x_1 \leq 0, -1 \leq x_2 \leq 0$  уравнение интегральных кривых «быстрых» движений (уравнение (10.94а)) записывается в виде:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2 + k(x_1 + 1)}{x_1 + 1 + kx_2},$$

поэтому сепаратрисой, выходящей из точки  $A_1$ , будет (в пределах области (IV)) отрезок прямой

$$x_2 = -(x_1 + 1)^1.$$

Далее сепаратриса в точке  $(0, -1)$  переходит в область (III):  $x_1 \geq 0, x_2 \leq -1$ , где она будет определяться дифференциальным уравнением интегральных кривых для этой области:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_2 - k(x_1 + 1)}{k - 1 - (1 + \alpha)x_1}.$$

Интегрируя это уравнение и используя начальное условие:  $x_2 = -1$  при  $x_1 = 0$ , мы получим следующее уравнение рассматриваемой сепаратрисы  $A_1A_2$  (в пределах области (III)):

$$x_2 = -k \frac{k + \alpha}{1 + \alpha} - \frac{k}{\alpha} \left( \frac{k - 1}{1 + \alpha} - x_1 \right) + \left[ k \frac{k + \alpha}{1 + \alpha} + \frac{k}{\alpha} \frac{k - 1}{1 + \alpha} - 1 \right] \left( 1 - \frac{1 + \alpha}{k - 1} x_1 \right)^{\frac{1}{1 + \alpha}}.$$

<sup>1)</sup> Другая сепаратриса, асимптотически приближающаяся к особой точке  $A_1$ , идет в области (V):  $-1 \leq x_1 \leq 0, x_2 > 0$ , и является (в пределах этой области) отрезком прямой  $x_2 = x(x_1 + 1)$  с угловым коэффициентом

$$x = \frac{\alpha}{2k} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2k}\right)^2 + 1}.$$

Построенная по полученным уравнениям траектория «быстрого» движения  $A_1A_2$  — сепаратриса особой точки  $A_1$  — изображена на рис. 595 и 594, а.

Отметим также, что уравнения (10.94) позволяют получить приближенную зависимость переменных  $x_1$  и  $x_2$  от  $t$  во время «быстрого», скачкообразного движения изображающей точки с границы малой окрестности точки  $A_1$  на границу малой окрестности точки  $A_2$ . Например, нетрудно показать, что интервал времени, за который изображающая точка переходит с границы  $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности точки  $A_1$  на границу  $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности точки  $A_2$ , является величиной порядка  $\mu \ln \frac{1}{\mu}$ .

В точке  $A_3$  «быстрое» движение изображающей точки переходит в «полубыстрое», происходящее по траектории, близкой к прямой

$$x_2 + kx_1 = \text{const} = \\ = x_2^{(2)} + kx_1^{(2)} = -k;$$

по этой траектории изображающая точка за интервал времени порядка  $\frac{1+\alpha}{1+\beta}$  приходит в точку  $A_3$  с координатами:

$$x_1^{(3)} = 0, \quad x_2^{(3)} = -k, \\ y_1^{(3)} = 0, \quad y_2^{(3)} = 0.$$

Далее изображающая точка движется по траектории «медленного» движения  $A_3A'_1$ :

$$x_1 \equiv 0$$

(со скоростью изменения переменного  $x_2$  порядка единицы). Для этой траектории

$$\dot{x}_2 + x_2 = \sigma$$

(см. уравнения (10.79в)) и, следовательно,

$$x_2 = \sigma - (k + \sigma) e^{-t}$$

(за начало отсчета времени  $t = 0$  выбран тот момент времени, когда изображающая точка находилась в точке  $A_3$ ). Поэтому изображающая точка через интервал времени

$$\tau^* = \ln \frac{k + \sigma}{l + \sigma}$$

придет на полупрямую  $\Gamma_2$  в точке  $A'_1$ , откуда снова начнется «быстрое» движение. Вторая половина предельного цикла  $A'_1A'_2A'_3A_1$  симметрична

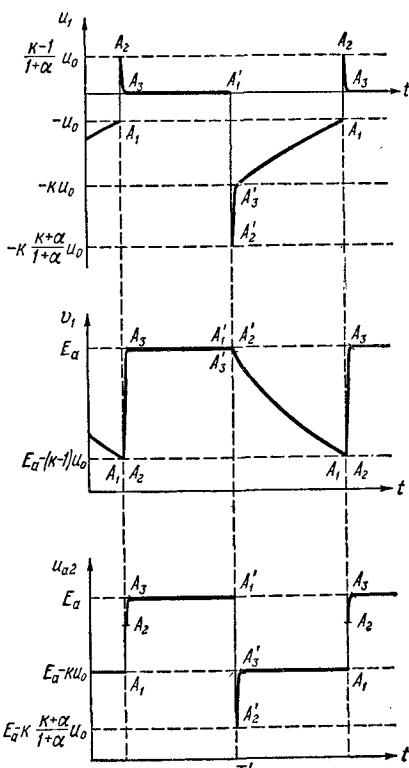


Рис. 596.

только что рассмотренной половине  $A_1A_2A_3A'_1$  (в пространстве  $x_1, x_2, y_1, y_2$  — относительно плоскости  $x_1 = x_2, y_1 = y_2$ , а на плоскостях  $x_1, x_2$  и  $y_1, y_2$  — относительно биссектрис  $x_1 = x_2$  и  $y_1 = y_2$ ).

Зная разрывный предельный цикл  $A_1A_2A_3A'_1A_2A'_3A_1$  (рис. 594), нетрудно построить осциллограммы напряжений в мультивибраторе во время автоколебаний, соответствующих движению изображающей точки по этому предельному циклу. Такие осциллограммы для напряжений  $u_1, v_1$  и  $u_{\alpha 2} = u_1 + v_1$  приведены на рис. 596. Автоколебания будут симметричными, поэтому, если пренебречь длительностью «быстрых» и «полубыстрых» движений, то период разрывных



Рис. 597. Фотография разрывного предельного цикла (на плоскости  $u_1, u_2$ ). 1 — траектории «мечтанных» движений; 2 — траектории «полубыстрых» движений; 3 — траектории «быстрых» движений.

автоколебаний мультивибратора с сегочными токами при  $\sigma \geq 0$  (при  $E_g \geq 0$ ) разен

$$T = 2\tau^* = 2 \ln \frac{k + \sigma}{1 + \sigma}$$

(в единицах безразмерного времени) и

$$T' = 2(R_\alpha + R_g)C \ln \frac{\frac{SR_\alpha}{1 + R_\alpha/R_g} + \frac{E_g}{u_0}}{1 + \frac{E_g}{u_0}}$$

(в обычных единицах).

В заключение параграфа заметим, что экспериментальная проверка полностью (и качественно и количественно) подтверждает разви- тую здесь теорию. Для примера мы приведем фотографию пре-

дельного цикла на плоскости напряжений  $u_1$ ,  $u_2$  (рис. 597) и фотографии осциллограмм напряжений  $u_1$ ,  $v_1$  и  $u_{a2}$  (рис. 598), полученные

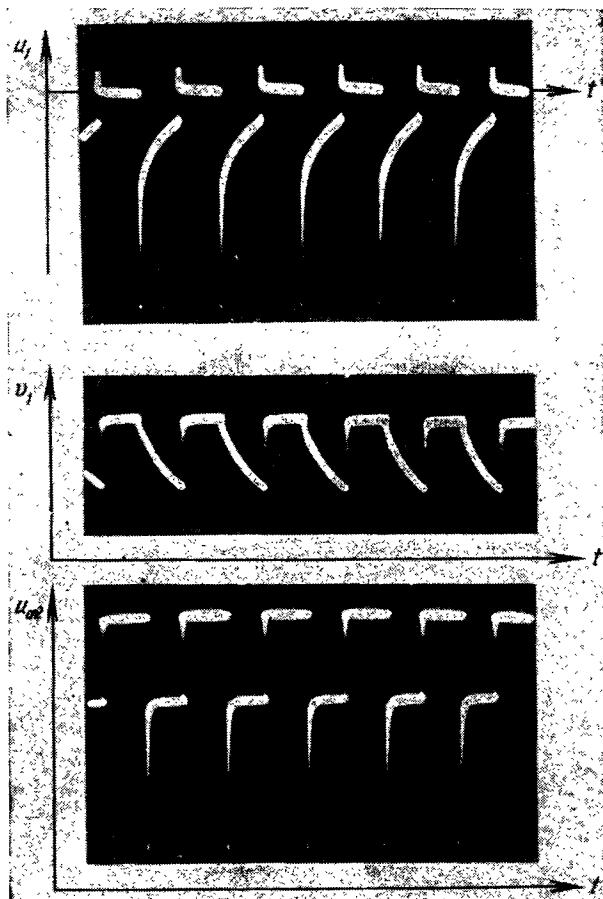


Рис. 598.

экспериментально при помощи электронного осциллографа (ср. с рис. 594, а и 596)<sup>1</sup>).

<sup>1</sup>) Для того чтобы на фотографии предельного цикла были видны участки «быстрых» движений, в мультивибраторе были искусственно увеличены паразитные емкости путем подключения емкостей к анодам ламп, а также были выбраны при фотографировании довольно большие экспозиции (из-за большой экспозиции траектории «медленных» и «полубыстрых» движений на фотографии имеют сильный ореол).