ВВЕДЕНИЕ

При всяком теоретическом исследовании какой-либо реальной физической системы мы всегда вынуждены в большей или меньшей степени упрощать, идеализировать свойства описываемой системы. Известная идеализация задачи всегда неизбежна; для построения математической модели рассматриваемой физической системы (т. е. для составления той или иной системы уравнений, описывающих поведение этой физической системы) нужно учесть основные решающие факторы, определяющие те именно черты поведения системы, которые нас в данное время интересуют, и отнюдь не следует стремиться точно учесть все без исключения ее свойства. Это последнее вообще неосуществимо; но если бы нам даже и удалось учесть значительную часть этих свойств, то задача получилась бы столь сложной, что решение ее было бы чрезвычайно затруднено или даже вовсе невозможно.

Поскольку идеализация задачи всегда неизбежна, прежде всего возникает вопрос о том, как далеко мы можем идти в этом направлении, до какой степени можно идеализировать свойства системы и все же получить удовлетворительные результаты. Ответ на этот вопрос может дать в конечном счете только опыт. Только сопоставляя те ответы, которые дает на тот или иной вопрос наше идеализированное рассмотрение, с результатами опыта, мы можем судить, законна ли та или иная идеализация.

Это заключение, конечно, справедливо лишь в том случае, когда теоретическое рассмотрение нашей идеализированной схемы (математической модели) проведено вполне строго[1]). Только в этом случае можно считать расхождение теории и опыта бесспорным доказательством недостаточности исходной идеализации и необходимости учесть какие-то новые свойства системы для объяснения наблюдаемых явлений.

---

[1]) Заметим, что термин «строгая теория» отнюдь не означает, что эта теория дает точные количественные ответы на поставленные вопросы. Строгая теория может давать приближенные количественные ответы (например, может оценить амплитуду колебательного процесса при помощи неравенств) и может делать качественные высказывания (например, о существовании периодических движений).

Заметим, что указания о допустимости той или иной идеализации могут быть получены не только из сравнения результатов теоретического рассмотрения с данными опыта, но и из сопоставления результатов двух различных теорий, одна из которых развита с использованием данной идеализации, а другая — без этой идеализации. Поскольку первая теория развита после пренебрежения известными обстоятельствами, а вторая, наоборот, с учетом тех же самых обстоятельств, то, сопоставляя результаты обеих теорий, мы получаем непосредственные указания о том, какую роль играют эти обстоятельства для решения того или иного вопроса. Постепенно мы накапливаем опыт и развиваем свою интуицию в этом отношении и научаемся все лучше и лучше «угадывать», что важно и что не важно для решения рассматриваемого круга вопросов. Убедившись тем или иным путем в том, что для решения данного вопроса известное обстоятельство играет второстепенную роль, мы в дальнейшем распространяем полученный результат и на другие аналогичные задачи, сначала пренебрегая этими обстоятельствами, а затем проверяя законность этих пренебрежений на опыте.

Характер идеализаций, допустимых при рассмотрении той или иной задачи, определяется всей *задачей в целом* и зависит поэтому не только от свойств рассматриваемой системы, но и от того, на какие именно вопросы желательно получить ответ при рассмотрении задачи.

Так, например, рассмотрим систему, состоящую из стального шарика, падающего вертикально на горизонтальную стальную доску. Если нас интересует движение шарика как целого, то мы, вообще говоря, не совершим большой ошибки, если будем считать при теоретическом рассмотрении, что шарик — это двигающаяся под действием силы тяжести материальная точка, скорость которой при достижении доски мгновенно меняет свой знак. Если же нас интересуют те упругие напряжения, которые возникают в шарике при ударе, то само собой разумеется, что мы уже не можем рассматривать шарик как материальную точку; шарик приходится идеализировать как упругое тело с определенными константами, характеризующими свойства стали, приходится учитывать характер деформаций, время соударения и т. д. Подобный же пример можно было бы привести и из теории электрических систем, где могут быть случаи, когда для ответа на одни вопросы можно считать емкость и самоиндукцию сосредоточенными, а для ответа на другие вопросы (относящиеся к той же системе) — распределенными.

Аналогично, если нас интересует вопрос о движении (свободных колебаниях) маятника в течение некоторого небольшого промежутка времени и если трение, испытываемое маятником, невелико, то можно отказаться от учета сил трения. Однако эта же идеализация не позволит получить правильный ответ на вопрос о движении маятника в течение большого промежутка времени, так как движе-

ние маятника затухает. Точно так же при рассмотрении вопроса о вынужденных колебаниях маятника под действием гармонической внешней силы можно не учитывать трение в системе, если нас интересует область, далекая от резонанса. Вблизи резонанса та же идеализация (пренебрежение трением) лишит нас возможности получить правильный ответ на вопрос об амплитуде вынужденных (установившихся) колебаний, так как при резонансе эта амплитуда существенно зависит от величины трения.

Таким образом, одна и та же идеализация может быть и «допустимой» и «недопустимой», вернее либо целесообразной, либо нецелесообразной, в зависимости от того, на какие вопросы мы хотим получить ответ. Одна и та же идеализация свойств данной реальной системы (одна и та же математическая модель, описываемая некоторой системой уравнений) позволяет получить правильный ответ на некоторые вопросы, касающиеся поведения системы, но не дает, вообще говоря, возможности правильно ответить на другие вопросы, касающиеся поведения той же самой системы. Это связано с тем, что при построении данной математической модели реальной физической системы пренебрегалось многими свойствами и особенностями последней, которые, не являясь существенными для тех или иных процессов в системе, могут быть существенными, определяющими для других.

Допустимость той или иной идеализации зависит и от тех количественных соотношений, которые характеризуют данную задачу. Например, в упомянутом выше случае с маятником можно пренебречь трением только при условии, что трение достаточно мало и время, в течение которого мы изучаем движение маятника, также не слишком велико. Но когда мы говорим «мало» или «велико», то это имеет смысл только тогда, когда мы указываем, по сравнению с какой другой величиной мала или велика данная величина. И в нашем примере мы должны потребовать, чтобы показатель затухания был мал по сравнению с частотой колебаний (или логарифмический декремент затухания был мал по сравнению с единицей) и чтобы время наблюдения было не слишком велико по сравнению с периодом колебаний. Только при подобных формулировках можно считать вполне исчерпывающими такие количественные характеристики, как «мал» и «велик».

Однако когда приступают к изучению задачи, часто бывает трудно сказать наперед, с какой именно величиной нужно сравнивать данную величину. Тогда применяют количественные характеристики, не указывая, по сравнению с чем именно мала или велика данная величина. В таком случае характеристики теряют свою определенность, но все же сохраняют известный смысл, который подсказывается нашими знаниями о данном круге явлений. И поэтому даже такие расплывчатые количественные характеристики все же могут дать известные указания о характере допустимой идеализации и во всяком

случае о том, в каком направлении следует делать попытки в смысле идеализации задачи. Так, например, с точки зрения «средних человеческих масштабов» наблюдение за явлением в течение одной минуты — это еще «не слишком долго». С другой стороны, тысячная доля секунды — это «очень быстро». Поэтому мы часто говорим, что колебания маятника затухают «медленно», а колебания в электрическом колебательном контуре высокой частоты затухают «быстро», даже если декремент затухания контуров очень мал и близок к декременту затухания в маятнике. И эти утверждения «мал» и «велик» хотя и не имеют, строго говоря, точного содержания, все же оказывают влияние на то, какие именно идеализации обычно применяются к той и другой задаче. В то время как задача о собственных колебаниях механических систем рассматривается обычно (по крайней мере сначала) без учета трения, при исследовании вопроса о собственных колебаниях в электрическом колебательном контуре почти всегда сразу принимают во внимание активное сопротивление контура. Таким образом, казалось бы лишенные содержания характеристики «мал» и «велик» (без указания, по сравнению с чем) все же толкают нас к выбору определенных идеализаций. При дальнейшем рассмотрении эти характеристики «мал» и «велик» приобретают вполне определенное содержание: становится ясным, по сравнению с чем именно должна быть мала или велика данная величина. Мы тоже иногда будем начинать рассмотрение с таких неопределенных предположений — «мал» или «велик», без указаний, по сравнению с чем, но из дальнейшего рассмотрения смысл этих утверждений всегда будет выясняться.

Во всяком физическом рассмотрении, и в частности в нашем дальнейшем изложении, вопрос о характере идеализации, т. е. вопрос о том, какие из свойств реальной физической системы должны быть учтены при построении математической модели и в каком приближении, играет весьма существенную роль; поэтому мы прежде всего должны выяснить, какого именно характера идеализации приходится применять при рассмотрении колебательных систем. Мы будем ограничиваться ниже (не только во Введении, но и во всей книге) исключительно *динамическими моделями* реальных колебательных систем, т. е. будем пренебрегать в них флуктуациями и всеми другими статистическими явлениями [1]). Соответственно, мы будем считать,

---

[1]) Косвенно наличие флуктуаций в реальных системах приходится учитывать и в теории динамических моделей реальных систем. Очевидно, что поскольку малые случайные возмущения неизбежны в любых физических системах, в них не могут существовать такие процессы, протекание которых возможно только при отсутствии каких бы то ни было случайных отклонений и возмущений. Отсюда появляются требования, широко используемые в теории динамических систем, чтобы процессы, отображаемые математической динамической моделью и соответствующие процессам, существующим и наблюдаемым в реальной системе, были устойчивыми как по отношению к малым изменениям координат и скоростей, так и по отношению к малым изменениям

что зависимые переменные, входящие в уравнения динамической модели, имеют физический смысл количественных характеристик (достоверных, не вероятностных) состояния системы и тех или иных процессов, происходящих в ней. Если говорить об идеализациях реальных физических систем в виде динамических моделей, то, во-первых, эти идеализации связаны с числом величин, определяющих состояние системы (например, координат и скоростей), и, во-вторых, с выбором законов, связывающих эти состояния или скорости изменений состояний и устанавливающих зависимости между ними. В эти зависимости, которые в большинстве рассматриваемых случаев можно выразить в виде тех или иных дифференциальных уравнений, обычно входит некоторое число постоянных параметров, характеризующих систему. Например, для обычного электрического контура в простейшем случае величинами, определяющими состояние системы, служат заряд и ток, а постоянными параметрами — индуктивность, емкость и сопротивление. Связь между величинами, характеризующими состояние системы, определяется некоторым дифференциальным уравнением, в которое постоянные параметры или их комбинации входят в качестве коэффициентов.

Идеализация, связанная с числом величин, определяющих состояние системы, приводит в конечном счете к представлению о том или ином числе степеней свободы системы. В настоящей книге будут рассматриваться главным образом такие задачи (т. е. такие системы и такие вопросы, касающиеся поведения этих систем), которые можно решить, пользуясь математической (динамической) моделью данной системы с одной степенью свободы.

Конечно, всякая реальная система с точки зрения классической физики обладает не одной, а весьма большим числом степеней свободы. Например, следуя обычным молекулярным представлениям, нужно было бы считать, что всякая механическая система имеет очень большое число степеней свободы, равное сумме степеней свободы всех отдельных молекул, из которых состоит система. Однако в ряде случаев можно отвлечься от молекулярного строения вещества и рассматривать систему как сплошную. В этом случае мы заменяем очень большое число степеней свободы бесконечно

самой математической модели. Первое приводит к понятию устойчивости состояний равновесия модели и процессов в ней, второе — к понятию грубости динамических систем.

Статистические модели необходимы для теоретического изучения влияния флуктуаций, шумов и т. п. на процессы в колебательных системах. При учете случайных процессов движение системы будет подчиняться уже не динамическим законам, а законам статистики. В соответствии с этим могут быть поставлены вопросы о вероятности того или иного движения, о наиболее вероятных движениях и о других вероятностных характеристиках поведения системы. Математический аппарат для изучения статистических процессов в колебательных системах составляют так называемые уравнения Эйнштейна — Фоккера [106, 75, 83].

большим числом степеней свободы и приходим к уравнениям в частных производных. В других случаях оказывается, что для описания интересующих нас вопросов достаточно ввести в рассмотрение всего лишь одну или несколько степеней свободы. Мы приходим, с одной стороны, к представлениям о сплошной системе, обладающей бесконечно большим числом степеней свободы, а с другой стороны — к представлениям о дискретных системах, обладающих конечным числом степеней свободы.

Понятие числа степеней свободы пришло в теорию колебаний из механики, где, как известно, под числом степеней свободы понимают число координат, полностью определяющих пространственную конфигурацию механической системы (при тех или иных упрощающих предположениях). При этом порядок системы дифференциальных уравнений, описывающих ее движение, как правило, вдвое больше числа степеней свободы. В теории колебаний, рассматривающей не только механические системы, под числом степеней свободы понимают половину числа переменных, задание которых в данный момент времени полностью и однозначно определяет состояние системы, или, иначе говоря, половину порядка системы дифференциальных уравнений, описывающих поведение системы (при данных упрощающих предположениях).

Рассматривая определенный класс систем и ограничиваясь определенным кругом вопросов, можно пользоваться представлением о системе с одной степенью свободы. Например, массу m на пружине (рис. 1) мы только в том случае сможем рассматривать как систему с одной степенью свободы, если откажемся от учета влияния массы пружины (что имеет смысл только в том случае, если масса пружины гораздо меньше массы m) и будем считать тело m абсолютно жестким (что имеет смысл, если тело m гораздо более жестко, чем пружина). Кроме того, конечно, мы должны ограничить рассмотрение движением этого тела только в вертикальном направлении. Это последнее ограничение имеет смысл только при условии, что колебания массы m в вертикальном направлении не вызывают раскачивания ее как маятника — раскачивания, которое неизбежно появляется при известных соотношениях между параметрами системы. Наши допущения в реальной системе, конечно, не могут быть строго соблюдены. В действительности пружина обладает массой, а тело m обладает упругостью, но мы идеализируем задачу и отказываемся от рассмотрения тела и пружины как сплошных систем (систем с распределенными параметрами). Вследствие этой идеализации мы лишаемся возможности ответить на вопросы о движении отдельных частиц тела m и пружины; но если, с одной стороны, тело m достаточно жестко

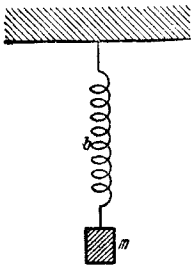

Рис. 1.

и масса его достаточно велика по сравнению с массой пружины, а с другой стороны, начальные условия совместимы с нашими допущениями, а именно: в начальный момент сама масса m отклонена от положения равновесия в вертикальном направлении или ей сообщена некоторая начальная скорость тоже только в вертикальном направлении, то при допущенной идеализации задачи все же можно удовлетворительно ответить на вопрос о движении всей массы m в целом. И в том случае, когда нас интересует вопрос о движении системы при таких ее свойствах и таких начальных условиях, было бы просто нецелесообразно учитывать какие-либо другие свойства системы, кроме наличия массы m и упругости пружины. Но несколько иную задачу, отличающуюся от только что рассмотренной лишь характером начальных условий, мы уже не в состоянии будем решить, применяя прежнюю идеализацию. Пусть, например, сначала пружина растянута силой, приложенной в точке b (рис. 1), а в момент $t=0$ эта сила устраняется. Такое начальное состояние несовместимо с принятой нами идеализацией, которая позволила рассматривать всю систему как обладающую одной степенью свободы. Мы могли бы, конечно, задать не силу в точке b, а любое начальное распределение деформаций в пружине, отличное от того, которое получается, если сила приложена к массе m. Всякое такое распределение было бы несовместимо с нашей идеализацией. Оставаясь при прежней идеализации и не делая каких-либо новых допущений, мы не в состоянии ответить на вопрос о характере движения системы при таких начальных условиях.

Этот пример иллюстрирует высказанное выше общее положение. Мы видим, что допустимая идеализация в отношении числа величин, определяющих состояние системы (в частности, числа степеней свободы системы), зависит не только от свойств самой системы, но и от характера тех начальных условий, которые заданы, и содержания тех вопросов, на которые нужно ответить, — словом, зависит от характера той задачи, которая нами поставлена.

Точно так же обычный электрический контур, обладающий емкостью, индуктивностью и сопротивлением (рис. 2), можно рассматривать как систему с одной степенью свободы только при том условии, что не учитываются, например, емкости, которыми обладают отдельные витки катушки самоиндукции один по отношению к другому, провода между собой и т. д. Но несмотря на эту идеализацию, мы сможем достаточно точно ответить на основной интересующий нас вопрос о законе изменений напряжения на обкладках конденсатора, если начальные условия таковы, что заданы напряжение на обкладках конденсатора и ток по всей катушке самоиндукции. Однако допущенная нами идеализация не дает возможности

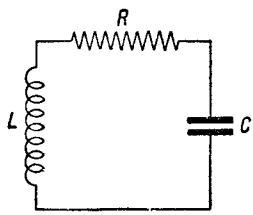

Рис. 2.

ответить, например, на вопрос о законе распределения тока внутри самой катушки самоиндукции. При допущенной идеализации и не делая специальных предположений, мы не сможем решить и вопрос об изменении силы тока в начале процесса, если в начальный момент ток существует не во всей катушке, а только в части ее, присоединенной к источнику постоянного тока (рис. 3), ибо эти начальные условия, так же как и в рассмотренном нами механическом примере, не совместимы с примененной идеализацией задачи. (Именно такого типа начальные условия имели место, например, в случае волномера, возбуждаемого зуммером, — батарея *Б* и зуммер *З* обычно присоединялись к волномеру так, как это указано на рис. 3.) И в этом случае мы могли бы, как и в предыдущем, задать начальное распределение силы тока в катушке не в виде двух условий для двух частей катушки, а в более общем виде некоторой функции распределения $i = f(x)$. Однако никакое иное распределение, кроме некоторой определенной силы тока, одинаковой во всех витках катушки, конечно, не совместимо с нашей идеализацией системы. Такие произвольные начальные условия требуют, вообще говоря, рассмотрения системы с бесконечным числом степеней свободы, т. е. рассмотрения распределенной системы.

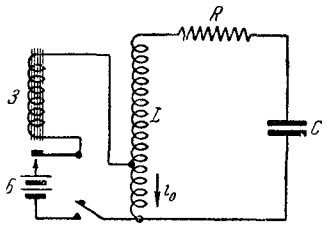

Рис. 3.

Мы видим, таким образом, что, отказываясь от рассмотрения реальных систем как систем распределенных и рассматривая их в виде систем с конечным числом степеней свободы, в частности в нашем случае в виде систем с одной степенью свободы, мы должны соответствующим образом ограничить себя в смысле выбора начальных условий и задавать только такие начальные состояния, которые совместимы с нашей идеализацией. В противном случае возникает конфликт между начальными условиями и уравнениями нашей идеализированной системы, для ликвидации которого, вообще говоря, нужно было бы изменить характер идеализации системы. Однако в некоторых случаях, как будет видно в дальнейшем, конфликт этот может быть ликвидирован без изменения характера идеализации системы — при помощи некоторых добавочных постулатов, определяющих то совместимое с уравнениями модели состояние, в которое придет система через некоторое время после возникновения конфликта.

Точно так же не только от свойств самой системы, но и от характера задачи, которая поставлена, зависит решение вопроса о допустимости той или иной идеализации, связанной с определением законов, управляющих движением системы. Именно эта идеализация определяет тип уравнений, которыми описывается система, и приво-

дит к разделению систем на «линейные» и «нелинейные», «консервативные» и «неконсервативные», «автоколебательные» и «диссипативные» и т. д.

Как же следует подходить к вопросу о законах, определяющих движение системы, определяющих изменение состояния системы по заданному состоянию этой системы (модели) в данный момент времени? В каких случаях, какая идеализация свойств реальной системы и связей между ее частями и элементами может быть допущена? Вообще говоря, параметры всякой электрической или механической системы — емкость или упругость, сопротивление или коэффициент трения, самоиндукция или масса — всегда в большей или меньшей степени зависят от состояния системы, т. е. от ее координат и скоростей. Действительно, если конденсатор заряжен до какого-либо напряжения, то между его обкладками существуют силы электростатического притяжения. Так как абсолютно жестких систем не существует, то эти силы вызовут какое-то изменение формы или размеров обкладок конденсатора, вследствие чего изменится и его емкость; эти изменения будут тем больше, чем больше напряжение между обкладками конденсатора. Поэтому емкость конденсатора всегда в большей или меньшей степени будет зависеть от напряжения между его обкладками.

Точно так же между витками катушки самоиндукции, по которым течет ток, будут существовать пондеромоторные силы, которые несколько изменят конфигурацию витков катушки, а вместе с тем и ее индуктивность. Следовательно, индуктивность катушки неизбежно в большей или меньшей степени зависит от силы тока, протекающего по катушке. Наконец, сопротивление проводника всегда в большей или меньшей степени зависит от температуры; так как при протекании тока по проводнику выделяется тепло, нагревающее сопротивление, то величина этого сопротивления всегда до некоторой степени зависит от силы протекающего по нему тока.

Так же легко убедиться в том, что, например, параметры изображенной на рис. 1 механической системы всегда в известной степени зависят от состояния системы. Например, модуль упругости любого материала, или коэффициент упругости любой пружины, при достаточно больших деформациях уже не остается постоянным, т. е. зависит от координат системы. Коэффициент трения всегда (и довольно сложным образом) зависит от скорости. Момент инерции вращающегося тела также, вообще говоря, не является постоянной величиной, а зависит от угловой скорости, так как всякое физическое тело не является абсолютно твердым и испытывает деформации при вращении. Итак, величины параметров как механических, так и электрических систем всегда в большей или меньшей степени зависят от состояния системы.

Если при описании рассмотренных механической и электрической систем с помощью математических соотношений начать учитывать все эти

зависимости параметров от состояния системы, то мы пришли бы к дифференциальным уравнениям, коэффициенты которых зависят от координат и скоростей, т. е. к нелинейным дифференциальным уравнениям. Чтобы упростить задачу, мы должны до известных пределов идеализировать свойства системы, сделать ряд упрощающих предположений относительно зависимости параметров от состояния системы, так как не всегда для ответа на поставленные в отношении данной системы вопросы необходимо учитывать эту нелинейность, которая часто значительно затрудняет теоретическое рассмотрение.

Наиболее простым и удобным было бы предположение, что параметры вообще не зависят от состояния системы и являются величинами постоянными. Тогда при математическом описании рассмотренных систем мы пришли бы к линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами, для которых существуют регулярные методы решения и исследование которых не представляет никаких трудностей.

При каких же условиях можно дать удовлетворительный ответ на интересующие нас вопросы о характере движения системы, если применить указанную идеализацию, т. е. считать, что параметры системы не зависят от ее состояния и являются постоянными? Как мы уже видели, вообще говоря, это предположение не оправдывается в реальных физических системах. Но во многих случаях можно выбрать такие области изменения координат и скоростей, в которых параметры системы практически (т. е. с заданной нами степенью точности) будут оставаться постоянными. Так, например, если конструкции конденсатора и катушки самоиндукции достаточно жестки и наибольшие значения, которых достигают напряжение на обкладках конденсатора и сила тока в катушке самоиндукции, не слишком велики, то практически емкость конденсатора и индуктивность катушки в данной области можно считать постоянными. Точно так же, если наибольшее значение плотности тока достаточно мало, то и сопротивление обычного металлического проводника можно считать постоянным.

Аналогичным образом мы можем выбрать такую узкую область изменений координат и скоростей механической системы, чтобы параметры системы в этой области можно было с достаточной степенью точности считать постоянными. Предположение о том, что параметры системы не зависят от координат и скоростей в тех случаях, которые мы главным образом будем рассматривать, сводятся к утверждению, что все силы, возникающие в системе и являющиеся, вообще говоря, какими-то функциями координат, скоростей и ускорений, суть линейные функции либо координат, либо скоростей, либо ускорений; например, упругая сила есть линейная функция координаты (или напряжение — такая же функция заряда), а сила трения или омическое падение напряжения суть линейные функции скорости

(соответственно силы тока), наконец, «сила инерции» и э. д. с. самоиндукции суть линейные функции ускорения (производной от силы тока).

Это утверждение, что в области достаточно малых изменений аргумента силы можно рассматривать как линейные функции координат, скоростей или ускорений, вытекает, в сущности, из математических соображений. Действительно, если функция вблизи данной точки может быть разложена в ряд Тейлора и если, кроме того, ее первая производная в этой точке не равна нулю, то для достаточно малых значений аргумента всегда можно ограничиться только первым членом ряда Тейлора, т. е. рассматривать функцию как линейную.

Но, конечно, эти соображения не дают никакого представления о том, как велика область, в которой функцию можно рассматривать как линейную. Кроме того, в реальных физических системах возможны такие случаи, когда представление о линейных силах не дает правильного ответа на вопрос о движении системы даже в очень узкой (однако физически интересной) области изменений координат и скоростей.

Вопрос о возможности «линеаризации» реальной физической системы мы иллюстрируем на примере механической системы с трением, например массы m, подвешенной на пружинах, но при условии, что груз либо испытывает известное сопротивление движению со стороны окружающего его газа (или жидкости), либо движется с трением вдоль поверхности какого-либо твердого тела (рис. 4). Вопрос о «линеаризации» такой системы в случае отсутствия трения не вызывает никаких трудностей, ибо при малых отклонениях упругая сила пружины, как это следует из закона Гука, пропорциональна отклонению, массу же тела в широких пределах можно считать не зависящей от скорости. В случае же наличия трения (мы знаем, что сила трения, вообще говоря, зависит от скорости) возникает вопрос, можно ли силу трения «линеаризовать», т. е. рассматривать ее как линейную функцию скорости, хотя бы в области очень небольших скоростей. Ответ на этот вопрос может дать только опыт, в частности, например, такой простейший опыт. Двигая груз, мы определяем ту работу, которую нужно затратить на преодоление силы трения при перемещении груза на известное расстояние. Далее мы повторяем это измерение снова и снова при все меньших скоростях движения груза (путь же остается неизменным). Таким образом можно установить зависимость между работой, затраченной на преодоление сил трения, и скоростью движения. Эта зависимость, вообще говоря очень сложная, получается совершенно различной для случая

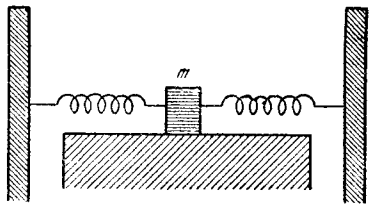

Рис. 4.

движения тела в газе или жидкости или трения тела о какую-либо твердую поверхность.

В первом случае работа существенно зависит от скорости и при уменьшении скорости уменьшается и может быть сделана как угодно малой. Во втором же случае «сухого трения», наоборот, работа мало зависит от скорости, и как бы медленно мы ни двигали груз, нужно затратить на его перемещение некоторую конечную и вполне определенную работу; значит, сила трения даже при сколь угодно малой скорости имеет конечную величину. Кроме того, необходимо иметь в виду, что сила трения всегда направлена в сторону, противоположную скорости, и значит, при переходе скорости через нуль сила трения должна менять знак на обратный. Принимая во внимание это обстоятельство, а также результат наших опытов, мы можем установить хотя бы качественно связь между силой трения и скоростью в области малых скоростей. Очевидно, что в первом случае при «жидком трении» сила трения без скачка проходит через нуль

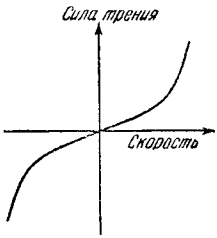

Рис. 5.

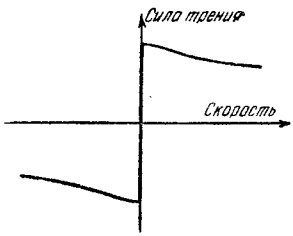

Рис. 6.

и меняет при этом знак (рис. 5). Во втором же случае при скорости, стремящейся к нулю, сила трения с двух сторон стремится, вообще говоря, к разным (в частности, например, противоположным по знаку, но одинаковым по абсолютной величине) конечным пределам и, значит, при нуле претерпевает разрыв (рис. 6)[1]. Очевидно, что в случае «жидкого трения» всегда можно в некотором, хотя бы небольшом, участке по обе стороны от нуля считать силу трения линейной функцией скорости, т. е. можно «линеаризовать» трение и рассматривать систему как линейную. В случае же «сухого трения» такая линеаризация даже в области очень малых скоростей не передает наиболее типичных особенностей сухого трения. Поскольку при переходе скорости через нуль сила трения изменяется скачком, мы не можем, конечно, передать эту особенность силы трения, считая ее линейной функцией скорости. И поэтому при рассмотрении тех задач, в которых сухое трение играет существенную роль, мы не

[1]) О зависимости силы трения от скорости в области не очень малых скоростей нам еще придется говорить в дальнейшем. Пока же мы можем ограничиться областью только очень малых скоростей.

можем рассматривать систему как линейную, даже если ограничим рассмотрение весьма малыми значениями скоростей.

Простейшая идеализация, которая может быть сделана в случае сухого трения, т. е. в случае зависимости, изображенной на рис. 6, — это предположение, сделанное Кулоном, именно, что трение по величине не зависит от скорости. Так же как линейный закон трения является простейшей идеализацией случаев жидкого трения, закон Кулона является простейшей идеализацией случаев сухого трения. Эта идеализированная характеристика трения приведена на рис. 7.

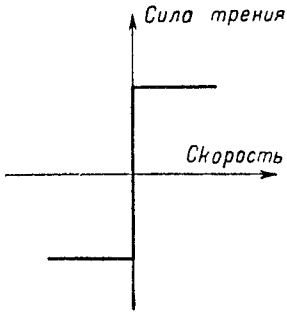

Рис. 7.

Мы видим, таким образом, что не всегда можно даже в некоторой ограниченной области рассматривать систему как линейную. Однако во многих случаях это оказывается возможным. Тогда в этой ограниченной области, несмотря на допущенную идеализацию (предположение, что все параметры системы постоянны), можно ответить на интересующие нас вопросы о характере и общих свойствах движения системы. Границы этой области определяются характером существующих в реальных физических системах зависимостей параметров от координат и скоростей и характером той задачи, которая поставлена; однако эта область, в которой применима наша идеализация, *всегда ограничена известными пределами.*

Но если эта область ограничена, то неизбежно возникает следующий весьма важный вопрос: не уйдет ли система «сама по себе» в силу своих свойств за пределы той области, в которой применима наша идеализация? Если этого не случится, если при начальных условиях, лежащих в пределах той области, в которой параметры системы можно считать постоянными, система и при всех дальнейших движениях не выйдет за пределы этой области, то наша идеализированная задача позволит дать ответ на ряд вопросов, которые могут возникнуть при изучении данной системы. Для ответа на такие вопросы мы можем считать параметры системы не зависящими от состояния системы и описывать ее линейными дифференциальными уравнениями, т. е. рассматривать систему как «линейную».

Тогда же, когда система в силу своих свойств выходит за пределы «линейной области», совершенно очевидно могут возникнуть вопросы, на которые мы не в состоянии будем дать ответа, рассматривая систему как линейную. И в вопросе о законах, связывающих свойства параметров с состояниями системы, допустимость той или иной идеализации зависит не только от свойств системы, но и от характера поставленной задачи, и в частности от характера начальных условий задачи.

Существует очень большое число весьма интересных и практически важных вопросов, для ответа на которые необходимо рассмотреть поведение системы за пределами линейной области. Ряд таких вопросов выдвигается, например, современной радиотехникой. Как мы увидим дальше, даже теория простейшего лампового генератора *принципиально* не может быть сведена к исследованию линейного дифференциального уравнения и требует изучения нелинейного уравнения; линейное уравнение, например, не в состоянии объяснить тот факт, что ламповый генератор независимо от начальных условий имеет стремление устанавливаться в определенном режиме. Аналогичные вопросы возникают в электротехнике, акустике и т. д.

Рассмотрение именно таких вопросов, *самый характер которых делает неизбежной постановку нелинейной проблемы, т. е. заставляет рассматривать систему как нелинейную, и составит нашу основную задачу.*

Провести строгое разделение реальных физических систем на «линейные» и «нелинейные», «консервативные» и «неконсервативные», их разделение по числу степеней свободы и т. д. невозможно. Реальные физические системы не являются ни линейными, ни консервативными, не могут иметь конечного числа степеней свободы, ибо они вообще не могут быть описаны совершенно точно при помощи математических соотношений. Поэтому всякое строгое разделение, всякая строгая классификация не могут быть точно проведены для реальных физических систем. Такому строгому разделению поддаются только абстрактные схемы (математические модели), которые получаются в результате известной идеализации свойств реальной физической системы.

В частности, те системы, которые рассматриваются обычно в учебных курсах, не являются какими-то особыми «линейными системами», которые могут быть строго отделены от других, «нелинейных систем», составляющих предмет нашего рассмотрения. И в том и в другом случаях мы рассматриваем часто одни и те же реальные физические системы, но применяем к ним разные способы идеализации. В результате этой идеализации, характер которой, как мы уже указывали, определяется не только свойствами самой системы, но и содержанием поставленных перед нами задач, оказывается возможным разделение систем на линейные и нелинейные, консервативные и неконсервативные, выделение из числа нелинейных неконсервативных систем класса автоколебательных систем, наконец, деление автоколебательных систем на непрерывные (в частности, «томсоновские») и «разрывные».

Проводя это разделение, мы всегда будем приходить к определенным заключениям относительно свойств того или иного класса систем; однако необходимо иметь в виду, что эти свойства, характеризующие систему, являются *идеализированными свойствами.* Это и естественно, ибо само выделение класса систем, обладающих дан-

ными свойствами, оказалось возможным в результате той или иной идеализации. Так, например, когда мы говорим о свойстве автоколебательной системы как угодно долго совершать колебания с постоянной амплитудой, то это свойство, конечно, нужно рассматривать как идеализированное. В реальной автоколебательной системе колебания не могут продолжаться «как угодно долго»; колебания часов прекратятся, когда кончится их завод, колебания в ламповом генераторе прекратятся, когда разрядится анодная батарея или батарея накала. Когда мы говорим о колебаниях, которые могут длиться «как угодно долго», то отвлекаемся от указанных обстоятельств (конечный запас энергии в заводе часов или в батарее лампового генератора). Совершенно так же только приближенный смысл имеет утверждение, что всякая автоколебательная система, например передатчик в радиотехнике, имеет стремление устанавливаться в определенном режиме, т. е. что установившаяся «амплитуда» и период колебаний в таком передатчике постоянны (при фиксированных параметрах). Нетрудно видеть, что фактически благодаря небольшим внешним воздействиям, которые всегда существуют, и благодаря флуктуациям, которые неизбежны, эти величины всегда меняются в некоторых, обычно узких пределах. Более того, очевидно, что даже понятие периодического движения по отношению к реальной системе также является идеализацией. Как уже много раз указывалось, при всяком рассмотрении мы подчеркиваем те или иные свойства реальной физической системы, которые для решения данного вопроса играют принципиальную роль, и отвлекаемся от тех свойств, которые для решения данного вопроса являются второстепенными.

На какие же вопросы мы должны будем пытаться получить ответ при рассмотрении этих нелинейных проблем?

При изучении поведения динамической системы нас обычно прежде всего интересуют так называемые *стационарные* движения в системе [1]), так как именно эти движения являются наиболее характерными для поведения системы в течение длительных промежутков времени.

Какие же стационарные движения возможны в тех системах, которые мы будем рассматривать? (Для определенности будем сейчас иметь в виду только динамические модели механических систем.)

---

[1]) Стационарное движение, грубо говоря, есть то предельное движение, к которому стремится система. Говоря о стационарных движениях, мы понимаем под ними также и состояния покоя, т. е. рассматриваем состояния покоя как частный случай стационарного движения. Можно дать точное математическое определение стационарных движений, отождествив их с так называемыми *рекуррентными* движениями Биркгофа [34, 139, 96]. Для систем с одной степенью свободы рекуррентными движениями могут быть только состояния равновесия и периодические движения. Для более общих систем рекуррентными движениями могут быть более сложные движения, например квазипериодические.

Это могут быть прежде всего состояния равновесия, в которых скорости и ускорения, определяемые из дифференциальных уравнений, описывающих поведение системы, обращаются в нуль. Второе условие равносильно тому, что на систему не действуют никакие регулярные силы, учитываемые дифференциальными уравнениями. Но во всякой физической системе помимо таких регулярных сил действуют и малые нерегулярные силы, например флуктуационного характера. Вследствие наличия этих сил система никогда не может находиться точно в состоянии равновесия и совершает малые движения вблизи состояния равновесия (броуновское движение). Но вблизи состояний равновесия на систему действуют уже и регулярные силы (они равны нулю только точно в состоянии равновесия), которые могут либо возвращать систему к состоянию равновесия, либо удалять ее еще больше. В первом случае будем иметь устойчивые, а во втором — неустойчивые состояния равновесия. Ясно, что для изучения поведения системы нужно уметь не только находить состояния равновесия, но и определять их устойчивость по отношению к малым изменениям координат и скоростей. Устойчивость в этом смысле является необходимым условием того, чтобы система могла находиться вблизи данного состояния равновесия как угодно долго.

Далее к числу возможных стационарных движений в системе принадлежат *периодические* движения. Правда, помимо периодических в колебательных системах возможны и другие стационарные колебательные процессы, например квазипериодические. Но в *автономной*[1]), т. е. не находящейся под переменным воздействием, колебательной системе с одной степенью свободы, как будет выяснено при более детальном рассмотрении этих вопросов, возможно существование только простейшего типа стационарного колебательного движения — процесса периодического.

Однако не всякие возможные стационарные движения могут существовать в реальной физической системе. Для того чтобы данный стационарный процесс в реальной физической системе мог длиться как угодно долго, необходимо, чтобы при наличии неизбежных случайных толчков система совершала движения, достаточно близкие к данному стационарному движению, и не удалялась бы от него сколько-нибудь заметно. Это требование совершенно аналогично такому же требованию по отношению к состояниям равновесия: чтобы периодический процесс мог продолжаться как угодно долго, он должен быть устойчив по отношению к небольшим изменениям координат и скоростей. Поэтому нам необходимо будет не только находить возможные периодические процессы в системе, но

---

[1]) Автономными мы будем называть такие системы, которые описываются уравнениями, не содержащими явно времени. Поэтому, рассматривая автономные системы, будем считать, что внешние воздействия не зависят от времени.

и решать вопрос об их устойчивости по отношению к небольшим отклонениям. Точно так же нас будет интересовать зависимость движений системы от параметров, входящих в уравнения и могущих принимать те или другие фиксированные значения (сопротивление, емкость и т. д.). Исследование этой зависимости позволяет дать ответ на ряд основных вопросов, связанных с возникновением колебаний, срывом колебаний и т. д.

Чтобы стационарные состояния могли длительно существовать в реальной системе, они должны быть устойчивы не только по отношению к малым изменениям координат и скоростей, но и по отношению к малым изменениям самого вида дифференциальных уравнений, описывающих систему. Эти малые изменения вида дифференциальных уравнений отражают соответствующие малые изменения свойств той системы, которая этими уравнениями описывается. И так как, с одной стороны, мы никогда не можем с абсолютной точностью описать реальную систему при помощи математического аппарата, а с другой стороны, ни одна реальная система не остается абсолютно неизменной во время происходящих в ней процессов, то всегда надо допускать возможность малых изменений вида дифференциальных уравнений, описывающих реальную систему [1]).

Если мы при рассмотрении той или иной конкретной задачи приписываем параметрам вполне определенные фиксированные значения, то это имеет смысл только при условии, что малые изменения параметров не изменяют существенно характера движений и в поведении идеальной модели сохраняются те черты, которые нас интересуют. Те же черты поведения модели, которые не сохраняются при малом изменении вида дифференциальных уравнений и величин параметров, не имеют физического интереса, так как они не отражают свойств реальной физической системы. Такие не меняющиеся в своих существенных чертах при малом изменении вида дифференциальных уравнений системы, которые мы будем называть «*грубыми*» системами, служат теоретическими моделями реальных физических систем, и их мы главным образом и будем изучать в этой книге. Однако то ограничение, которое мы наложили на малые изменения системы, — чтобы при этих изменениях не увеличивалось число степеней свободы или, иначе, порядок уравнения, — весьма существенно. Действительно, с некоторой точки зрения, которую физически можно оправдать, «малым изменением вида» уравнения можно было бы считать также повышение порядка дифференциального уравнения,

---

[1]) Эти малые изменения системы или малые изменения вида дифференциальных уравнений будем сначала предполагать такими, которые не меняют порядка исходного дифференциального уравнения (или, что то же, не меняют числа дифференциальных уравнений первого порядка, если мы рассматриваем только системы первого порядка). На языке физики это значит, что рассматриваемые малые изменения системы таковы, что они не вынуждают нас отказаться от идеализации, связанной с числом степеней свободы.

если только коэффициенты при появляющихся вновь более высоких производных достаточно малы. А «малое изменение вида» дифференциального уравнения, заключающееся в повышении порядка уравнения, есть результат учета каких-либо новых степеней свободы системы, учета каких-то «паразитных» параметров ее. Так, например, в случае электрической схемы, изображенной на рис. 8, учитывая только индуктивность L, емкость C и активное сопротивление катушки самоиндукции R, т. е. основные («не паразитные») параметры, мы получим дифференциальное уравнение второго порядка. Учитывая, кроме того, суммарную «паразитную» емкость между витками катушки, т. е. емкость C_1, и «паразитную» индуктивность проводов, т. е. индуктивность L_1, вместо уравнения второго порядка получим уравнение четвертого порядка. Но поскольку C_1 и L_1 — величины малые, это уравнение четвертого порядка можно рассматривать лишь как малое изменение вида исходного дифференциального уравнения второго порядка.

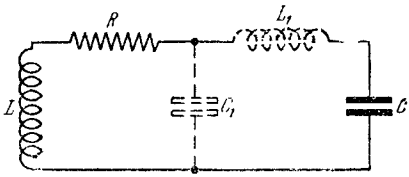

Рис. 8.

Эти «малые изменения» вида дифференциального уравнения, приводящие к повышению порядка уравнения, можно было бы продолжать как угодно долго, ибо, стремясь к более полному описанию системы, мы всегда приходили бы к все большему и большему числу степеней свободы.

Решив вопрос об устойчивости того или иного стационарного движения, мы должны были бы, строго говоря, также убедиться в том, что данное движение не исчезает и не теряет своей устойчивости при повышении порядка дифференциального уравнения. Действительно, если бы оказалось, что состояние равновесия, устойчивое в том случае, когда учитываются только основные параметры, потеряло свою устойчивость вследствие влияния малого паразитного параметра, повышающего порядок уравнения, то это значило бы, что в действительности это состояние равновесия неустойчиво. Поэтому требование устойчивости состояния равновесия по отношению к таким изменениям уравнения является вполне естественным. Нетрудно показать, что невозможно построить такую идеальную модель динамической системы (выделить такой класс дифференциальных уравнений), для которой состояния равновесия всегда оставались бы устойчивыми, даже если в уравнения системы войдут члены с более высокими производными, имеющими сколь угодно малые, но отличные от нуля произвольные аналитические коэффициенты. Отсюда следует, что нельзя выставить общее требование к идеальным моделям динамических систем о неизменности характера стационарных движений при появлении новых степеней свободы (ана-

логичное требованию грубости при малых изменениях динамической системы, не связанных с появлением новых степеней свободы), а можно лишь учитывать влияние новых степеней свободы, принимая во внимание специфические особенности рассматриваемых систем. С состояниями, «устойчивость» которых обусловливается, в сущности, не свойствами реальной системы, а тем, что мы не учитываем некоторую степень свободы, нам придется встречаться в дальнейшем.

Но не быть «наивными» мы не можем, ибо в противном случае мы должны были бы проверить, не нарушают ли устойчивости данного состояния всевозможные малые паразитные параметры, повышающие порядок уравнения. Однако мы никогда не сможем довести эту проверку до конца, ибо число таких паразитных параметров во всякой системе очень велико и, кроме того, как будет показано, может случиться, что эти параметры влияют в разные стороны, и значит, чтобы проверить их влияние, надо не только предполагать наличие этих параметров, но и знать количественные соотношения между ними, а величин паразитных параметров мы обычно не знаем. Поэтому правильность ответа на вопрос об устойчивости того или иного состояния в реальной системе, как и всякого другого результата теоретического рассмотрения (связанного с неизбежной идеализацией свойств этой системы), может быть проверена только опытным путем.

Форма, в которой мы будем пытаться получить ответ на интересующие нас вопросы, в разных случаях будет различна. Можно было бы получить ответы на все возникающие вопросы, если бы были известны те функции, которые характеризуют состояния системы и изменения этих состояний. Эти функции, которые предстоит нам изучать для того, чтобы определять поведение системы, например зависимость силы тока или напряжения от времени, определены при помощи дифференциальных уравнений, описывающих данную систему, и другого определения не имеют. Только для очень небольшого класса случаев, например для линейных уравнений с постоянными коэффициентами, возможно свести задачу об отыскании таких функций к другой более простой, например к решению алгебраических уравнений или нахождению интегралов (квадратур) от функций, входящих в дифференциальные уравнения.

Поэтому необходимо непосредственно, из самих дифференциальных уравнений, уметь извлечь указания относительно характера и вида функций, этими уравнениями определяемых.

В первую очередь при этом возникает задача: определить наиболее характерные, так сказать качественные, черты этих функций при помощи геометрического построения так называемых интегральных кривых, т. е. кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Мы будем называть это качественным интегрированием уравнений. Если мы сумеем качественно проинтегрировать рассматриваемое

дифференциальное уравнение, то получим качественную картину возможных физических процессов в рассматриваемой системе. Большое число вопросов, имеющих фундаментальный практический интерес, носит именно такой качественный характер, например вопрос о наличии устойчивых состояний равновесия, вопрос о существовании устойчивых периодических процессов, вопрос о мягком и жестком режиме и т. д.

Качественное интегрирование существенно облегчит и количественное интегрирование или, точнее, облегчит решение тех количественных вопросов, которые возникают в физике колебаний. В конечном счете теория колебаний не интересуется численными значениями функций в тот или другой частный момент времени; ее в основном интересуют те количественные характеристики, которые определяют протекание этой функции на значительных отрезках времени, например в случае периодической функции — ее период, величины коэффициентов разложения в ряд Фурье, спектральный состав для функций, изобразимых при помощи интеграла Фурье, и т. д.

Однако для нахождения этих величин, например спектрального состава, теория колебаний часто должна в качестве промежуточной ступени определять численные значения функций для тех или иных частных значений независимого переменного. Обычные приближенные методы количественного интегрирования (например, метод изоклин, метод Рунге — Кутта), которые могут быть использованы для получения ответов на такие вопросы, само собой разумеется, также оперируют непосредственно с дифференциальным уравнением. Знание качественной картины для данного дифференциального уравнения позволяет с большей эффективностью и надежностью применять количественные приближенные методы, разумно их комбинировать и т. д.

В дальнейшем мы должны будем познакомить читателя с тем математическим аппаратом, который необходим для исследования функций, определяемых нелинейными дифференциальными уравнениями. Поскольку мы здесь ограничимся рассмотрением систем с одной степенью свободы, это будут функции, определяемые одним дифференциальным уравнением не выше второго порядка или не более чем двумя дифференциальными уравнениями первого порядка.

Чтобы облегчить усвоение этого математического аппарата, мы начнем с изложения хорошо известных обычных линейных задач на том языке и частично с помощью тех приемов, которые потом в развернутом виде будут нами использованы при решении несравненно более сложных нелинейных задач.