# ЧАСТЬ I

# МЕХАНИКА

## Глава 1

## КИНЕМАТИКА

### ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

1. Механическим движением называют изменение взаимного расположения отдельных тел или различных частей одного тела, происходящее в пространстве с течением времени. В любом механическом движении всегда участвует не менее двух тел. Одно из них условно принимают за неподвижное тело отсчета и по отношению к нему определяют механическое состояние всех остальных тел. Чтобы установить законы механического движения тел относительно выбранного тела отсчета, с ним связывают ту или иную систему координат — чаще всего прямоугольную и часы. Наиболее простой вид эти законы имеют в системах отсчета, связанных с поверхностью Земли, когда по условию задачи суточным и годовым вращением Земли можно пренебречь.

Простейшим механическим движением является движение материальной точки — тела, размеры и форму которого можно не учитывать при описании его движения и массу которого можно считать сосредоточенной в точке.

2. Движение материальной точки характеризуют траекторией, длиной пути, перемещением, скоростью и ускорением.

Траекторией называют линию в пространстве, описываемую точкой при своем движении.

Длину дуги, отсчитываемую вдоль траектории от некоторой точки, принятой за начало отсчета, называют длиной пути (дуговой координатой).

Перемещение — это вектор, соединяющий начальное положение движущейся точки и ее положение в рассматриваемый момент времени.

3. Положение материальной точки $M$ на плоскости в прямоугольной — декартовой системе координат $Oxy$ определяют или заданием радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из начала координат в точку $M$, или двумя числами — координатами $x$, $y$ точки $M$, представляющими собой проекции вектора $\vec{r}$ на соответствующие оси.

Если известна траектория точки $M$, ее положение в пространстве можно также определить заданием дуговой координаты $s$ (длиной пути), отсчитываемой вдоль траектории от начала отсчета.

При движении точки ее радиус-вектор и координаты изменяются и являются функциями времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t); \quad x = x(t); \quad y = y(t); \quad s = s(t). \tag{1.1}$$

Уравнения (1.1) называют кинематическими уравнениями движения точки, заданными соответственно в векторной, координатной и так называемой естественной формах.

Поскольку задание радиус-вектора точки полностью определяется заданием его проекций (координат точки), уравнения $x(t)$ и $y(t)$ в сущности те же, что и уравнение $\vec{r}(t)$,— всякому векторному уравнению соответствуют на плоскости два скалярных.

4. Физическую величину, характеризующую изменение положения точки в пространстве за единицу времени, называют средней скоростью перемещения. Если за время $\Delta t$ точка переместилась на $\Delta\vec{r}$, то средняя скорость перемещения точки за это время будет равна:

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{1.2}$$

Средняя скорость перемещения — величина векторная, ее направление всегда совпадает с направлением вектора перемещения.

Чтобы получить скорость в данный момент времени — мгновенную скорость, нужно рассмотреть перемещение точки за бесконечно малый промежуток времени и найти предел отношения (1.2) при условии, что $\Delta t \to 0$:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{1.3}$$

Скорость есть производная от радиус-вектора движущейся точки по времени. Направление вектора мгновенной скорости в каждой точке траектории совпадает с направлением касательной, проведенной к траектории в данной точке.

Аналогично выражениям (1.2) и (1.3) определяют среднюю и мгновенную скорости при координатном и естественном способе задания движения.

5. Величину, характеризующую изменение скорости за единицу времени, называют средним ускорением. Если за время $\Delta t$ мгновенная скорость точки изменилась от $\vec{v}_0$ до $\vec{v}$, то среднее ускорение точки за это время равно:

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \tag{1.4}$$

Ускорение — величина векторная; направление вектора ускорения всегда совпадает с направлением вектора изменения скорости.

Чтобы получить значение ускорения в данный момент времени — мгновенное ускорение, нужно найти предел отношения (1.4) при условии, что $\Delta t \to 0$:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (1.5)$$

Ускорение точки есть производная от скорости или вторая производная от радиус-вектора движущейся точки по времени.

В общем случае криволинейного движения точки вектор ее ускорения $\vec{a}$ в каждой точке траектории направлен под некоторым углом $\alpha$ к касательной, проведенной к кривой в этой точке.

При изучении криволинейного движения точки вектор $\vec{a}$ удобно раскладывать по касательной и нормали к траектории на составляющие $\vec{a}_к$ и $\vec{a}_н$, называемые соответственно касательным (тангенциальным) и нормальным (центростремительным) ускорениями:

$$\vec{a} = \vec{a}_к + \vec{a}_н, \quad a_к = a\cos\alpha, \quad a_н = a\sin\alpha.$$

Проекция полного ускорения на касательную к траектории называется касательной проекцией ускорения, проекция на нормаль — нормальной проекцией. Касательное ускорение направлено по скорости или противоположно ей: оно характеризует изменение модуля скорости. Нормальное ускорение перпендикулярно скорости, оно характеризует изменение скорости по направлению.

В зависимости от того, направлено ли касательное ускорение в сторону движения ($a_к > 0$) или в противоположную сторону ($a_к < 0$), модуль скорости в криволинейном движении возрастает или уменьшается. Если $a_к = 0$ и $a_н \neq 0$, то изменяется только направление скорости; модуль же ее остается неизменным. Такое криволинейное движение будет равномерным. Если $a_н = 0$, то направление вектора скорости с течением времени не меняется — движение точки является прямолинейным.

6. Простейший вид механического движения — прямолинейное движение точки с постоянным ускорением.

Если ось координат направить в сторону начального смещения точки и за начало координат принять ее начальное положение ($\vec{r} = 0$ при $t = 0$), то для такого движения $r = x = s$; $\vec{a} = \text{const}$; $a = a_к = a_x = \text{const}$; $a_н = 0$; (1.6)

$$v_x = v_{0x} + at; \qquad (1.7)$$

$$v_{ср} = \frac{v_{0x} + v_x}{2}; \qquad (1.8)$$

$$s_x = v_{ср}t = \frac{v_{0x} + v_x}{2}t; \qquad (1.9)$$

$$s_x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}; \qquad (1.10)$$

$$s_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}. \qquad (1.11)$$

Соотношения (1.6), (1.7) и (1.10), выражающие законы изменения ускорения, скорости и перемещения с течением времени, называют соответственно уравнением ускорения, скорости и законом движения точки.

Движение точки с постоянным ускорением включает в себя равномерное и равноускоренное.

При равномерном движении скорость точки с течением времени не меняется ($\vec{v} = \vec{v}_0 = \text{const}$), и в уравнениях (1.7) и (1.10) нужно положить $a_x = 0$.

7. К равноускоренному движению можно отнести движение тел под действием силы тяжести, если их расстояние $h$ по вертикали, отсчитанное от поверхности Земли, мало по сравнению со средним расстоянием тела до центра Земли. Так как сила тяжести сообщает всем телам, находящимся на одинаковом расстоянии от центра Земли, одинаковое ускорение $\vec{g}$ (ускорение свободного падения) и при $h \ll R_3$ с достаточной степенью точности можно считать, что $g = 9{,}8$ м/с$^2$, то законы этого движения в принятых обозначениях получаются автоматической заменой в формулах (1.7)—(1.11) $a_x$ на $g_y$ и $s_x$ на $h$.

8. Простейшим видом криволинейного движения является равномерное движение точки по окружности. При таком движении $R = \text{const}$, $a_к = 0$, $v = \text{const}$, а нормальное (центростремительное) ускорение $a_н = \text{const}$.

Если точка движется по окружности радиусом $R$ с линейной скоростью $v$, делая $n$ оборотов за время $t$, то

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi Rn}{t} = 2\pi Rf = \frac{2\pi R}{T}; \qquad (1.12)$$

$$a_н = \frac{v^2}{R} = 4\pi^2 f^2 R = \frac{4\pi^2 R}{T^2}, \qquad (1.13)$$

$$\text{где} \quad f = \frac{n}{t} \quad \text{и} \quad T = \frac{t}{n} = \frac{1}{f} \text{ —} \qquad (1.14)$$

соответственно число оборотов в единицу времени (скорость вращения) и продолжительность одного оборота (период обращения).

9. По характеру движения отдельных частиц твердого тела различают поступательное и вращательное движение тел.

При поступательном движении тела всякая прямая, жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной самой себе.

При вращательном движении все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной неподвижной прямой, называемой осью вращения тела.

Поступательное движение тел описывают теми же величинами и уравнениями, что и движение материальной точки; кинематическими характеристиками вращательного движения тел служат угол поворота $\varphi$, угловая скорость $\omega$ и угловое ускорение $\alpha$. Угловую скорость и угловое ускорение тел при вращении вокруг неподвижной оси можно определить аналогично скорости и ускорению прямолинейного движения:

$$\omega_{ср} = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi n}{t} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}; \tag{1.15}$$

$$\alpha_{ср} = \frac{\omega - \omega_0}{t}. \tag{1.16}$$

Для тел, вращающихся с постоянным угловым ускорением, по аналогии с прямолинейным движением имеем:

$$\begin{gathered} \omega = \omega_0 + \alpha t; \\ \varphi = \frac{\omega + \omega_0}{2} t; \\ \varphi = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}; \\ \varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha}. \end{gathered} \tag{1.17}$$

В случае равномерного вращения $\omega = \text{const}$ и в формулах (1.17) необходимо положить $\alpha = 0$.

Из сравнения формул (1.12) и (1.15) видно, что линейная скорость $v$ точек тела, удаленных от его оси вращения на расстояние $R$, равна:

$$v = \omega R. \tag{1.18}$$

Отсюда следует, что модули касательного и нормального ускорений этих точек связаны с кинематическими характеристиками вращательного движения тела формулами:

$$a_к = \alpha R; \quad a_н = \omega v = \omega^2 R. \tag{1.19}$$

10. Очень часто движение тел рассматривают относительно какого-либо другого тела, которое в свою очередь перемещается по отношению к телу отсчета, принятому условно за неподвижное. Движение тела относительно системы координат, связанной с подвижным телом отсчета, называют относительным, а движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной — переносным. Результирующее движение тел относительно неподвижной системы отсчета называют абсолютным движением. В соответствии с этим различают относительное, переносное и абсолютное перемещение, скорость и ускорение. Если известны векторы относительного $\vec{r}_0$ и переносного $\vec{r}_п$ перемещений, то абсолютное перемещение $\vec{r}_а$ равно их геометрической сумме и находится по правилу сложения векторов:

$$\vec{r}_а = \vec{r}_0 + \vec{r}_п. \tag{1.20}$$

Аналогично находятся абсолютная скорость и абсолютное ускорение:

$$\vec{v}_а = \vec{v}_0 + \vec{v}_п; \tag{1.21}$$
$$\vec{a}_а = \vec{a}_0 + \vec{a}_п. \tag{1.22}$$

(Последнее соотношение имеет место лишь в том случае, если переносное движение является поступательным.)

11. Всякое перемещение плоской фигуры, происходящее в плоскости расположения этой фигуры (такое движение называют плоскопараллельным), можно рассматривать в любой момент времени как результат наложения поступательного движения тела вместе с некоторой произвольной точкой $O$ тела (называемой полюсом) и вращательного движения тела относительно этой точки.

Скорость любой точки тела при его плоскопараллельном движении равна:

$$\vec{v} = \vec{v}_п + \vec{v}_O,$$

где $v_п$ — скорость полюса; $v_O = \omega r$ — линейная скорость рассматриваемой точки, обусловленная поворотом тела около полюса с угловой скоростью $\omega$; $r$ — расстояние от точки до полюса.

Выбирая полюс $O$ в различных точках тела, можно по-разному осуществить разложение плоского движения на поступательное и вращательное. В каждом из этих случаев перемещение (скорость) в поступательном движении может быть различным, угловое перемещение (скорость) будет одинаковым.

В общем случае плоскопараллельного движения твердого тела существует такая точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Эту точку называют мгновенным центром скоростей.

Если за полюс принять мгновенный центр скоростей, плоскопараллельное движение тела можно представить как непрерывный ряд вращений вокруг полюса. Абсолютная скорость $v$ произвольной точки тела, удаленной от мгновенного центра на расстояние $R$, равна в этом случае $v = \omega R$.

а) При качении без проскальзывания плоской фигуры по неподвижной поверхности мгновенный центр скоростей совпадает с точкой соприкосновения тела с поверхностью.

б) Мгновенный центр скоростей находится на пересечении перпендикуляров, восставленных из двух данных точек тела к линиям векторов абсолютной скорости этих точек.

в) В том случае, когда перпендикуляры, проведенные из указанных точек, сливаются в один, мгновенный центр скоростей лежит в точке пересечения перпендикуляра с линией, проведенной через концы векторов скоростей этих точек.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

При решении задач по физике на те или иные разделы курса, кроме общих правил решения, приходится учитывать некоторые дополнения к ним, связанные со спецификой самих разделов.

Задачи по кинематике, разбираемые в курсе элементарной физики, включают в себя задачи о равномерном и равноуско-