(Последнее соотношение имеет место лишь в том случае, если переносное движение является поступательным.)

11. Всякое перемещение плоской фигуры, происходящее в плоскости расположения этой фигуры (такое движение называют плоскопараллельным), можно рассматривать в любой момент времени как результат наложения поступательного движения тела вместе с некоторой произвольной точкой O тела (называемой полюсом) и вращательного движения тела относительно этой точки.

Скорость любой точки тела при его плоскопараллельном движении равна:

$$\vec{v} = \vec{v}_{п} + \vec{v}_{O},$$

где $v_{п}$ — скорость полюса; $v_{O} = \omega r$ — линейная скорость рассматриваемой точки, обусловленная поворотом тела около полюса с угловой скоростью ω; r — расстояние от точки до полюса.

Выбирая полюс O в различных точках тела, можно по-разному осуществить разложение плоского движения на поступательное и вращательное. В каждом из этих случаев перемещение (скорость) в поступательном движении может быть различным, угловое перемещение (скорость) будет одинаковым.

В общем случае плоскопараллельного движения твердого тела существует такая точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Эту точку называют мгновенным центром скоростей.

Если за полюс принять мгновенный центр скоростей, плоскопараллельное движение тела можно представить как непрерывный ряд вращений вокруг полюса. Абсолютная скорость v произвольной точки тела, удаленной от мгновенного центра на расстояние R, равна в этом случае $v = \omega R$.

а) При качении без проскальзывания плоской фигуры по неподвижной поверхности мгновенный центр скоростей совпадает с точкой соприкосновения тела с поверхностью.

б) Мгновенный центр скоростей находится на пересечении перпендикуляров, восставленных из двух данных точек тела к линиям векторов абсолютной скорости этих точек.

в) В том случае, когда перпендикуляры, проведенные из указанных точек, сливаются в один, мгновенный центр скоростей лежит в точке пересечения перпендикуляра с линией, проведенной через концы векторов скоростей этих точек.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

При решении задач по физике на те или иные разделы курса, кроме общих правил решения, приходится учитывать некоторые дополнения к ним, связанные со спецификой самих разделов.

Задачи по кинематике, разбираемые в курсе элементарной физики, включают в себя задачи о равномерном и равноускоренном прямолинейном движении одной или нескольких точек, задачи о движении точки по окружности и небольшое количество задач, связанных с вращением твердого тела.

Решение всех задач по кинематике точки основано на применении закона движения (1.1) к тому или иному конкретному условию. Движение материальной точки на плоскости полностью известно, если известен радиус-вектор как функция времени $\vec{r}(t)$ или, что все равно, две скалярные функции $x(t)$ и $y(t)$, представляющие собой проекции векторного уравнения движения на оси прямоугольной системы координат. Эти функции содержат полную информацию о движении точки и позволяют определить ее положение и скорость в любой интересующий нас момент времени.

а) В случае равномерного прямолинейного движения закон движения точки в инерциальных системах отсчета выражается формулой

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t,$$

где $\vec{r}_0$ — радиус-вектор движущейся точки в начале промежутка наблюдения t. При таком движении модуль вектора перемещения равен пройденному пути $\Delta r = s$ и закон движения точки представляется формулой $s = vt$. С помощью этого уравнения и заданных вспомогательных условий можно всегда представить задачу о равномерном прямолинейном движении в виде нескольких простых уравнений. Чтобы правильно их составить, можно рекомендовать следующий порядок действий.

Прочитав условие задачи, следует сделать схематический чертеж, на котором нужно отметить систему отсчета и траекторию движения точки. Затем следует указать заданные и искомые отрезки пути, скорости и время движения тел. После этого, с помощью формулы пути равномерного движения, нужно установить связь между всеми величинами, отмеченными на чертеже, и записать в виде уравнений все дополнительные условия задачи, которые, как правило, выражают одни интервалы времени и отрезки пути через другие.

Большие затруднения у учащихся вызывают задачи о равномерном движении тел относительно других, которые в свою очередь движутся по отношению к Земле. Особое внимание в них нужно обратить на выбор системы отсчета. В принципе, конечно, безразлично, какое тело принять за неподвижное, однако удачно выбранная система отсчета значительно упрощает решение и сводит математические выкладки к минимуму. Так, например, если в задаче дано движение нескольких тел и нужно найти их скорость или смещение относительно друг друга, то удобно движения рассматривать в системе отсчета, связанной с одним из этих тел. Тело отсчета считается неподвижным, и первое, что необходимо сделать после выбора системы отсчета,— это определить скорости и смещения тел относительно тела отсчета. Затем, как обычно, составляются уравнения равномерного движения и записываются дополнительные формулы.

И наконец, нужно выделить задачи, где тела одновременно участвуют в двух движениях. Анализируя условие, здесь нужно прежде всего установить, какие из заданных кинематических характеристик следует отнести к абсолютному, какие к переносному и какие к относительному движению. Составляя для них уравнения, необходимо следить за тем, чтобы начало отсчета времени было одинаковым для всех тел, участвующих в движении.

Связь между кинематическими величинами при сложных движениях дается формулами (1.20)—(1.22). Подстановкой в них развернутых выражений для $r_п$, $r_о$, $v_п$ и $v_о$ заканчивается первая часть решения — составление системы алгебраических уравнений, описывающих данный процесс.

б) Если движение точки равноускоренное ($\vec{a} = \text{const}$), то закон движения выражается формулой

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2},$$

а скорость

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t.$$

В тех случаях, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{v}_0$ лежат на одной прямой, точка движется прямолинейно, если нет — движение происходит по параболе в плоскости, содержащей эти векторы.

Использовать векторные уравнения для нахождения из них модулей неизвестных величин обычно неудобно, поэтому при решении задач уравнения движения записывают в скалярной форме, т. е. уравнения $\vec{r}(t)$ и $\vec{v}(t)$ проецируют на оси прямоугольной системы координат. Не нарушая общности решения, начало координат можно всегда совместить с положением точки в начальный момент времени, и тогда двум кинематическим векторным уравнениям будут соответствовать два скалярных уравнения для координат:

$$x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}; \quad y = v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}$$

и два для проекций скорости точки на оси координат:

$$v_x = v_{0x} + a_x t; \quad v_y = v_{0y} + a_y t.$$

В эти уравнения входят все кинематические характеристики равноускоренного движения точки, и из них, в частности, путем простых алгебраических преобразований получаются формулы (1.9) и (1.11). Система четырех уравнений (1.7), (1.9)—(1.11) содержит только два независимых уравнения — из любой пары этих уравнений получаются два других. Однако практически удобнее пользоваться уравнениями скорости и движения, а формулы

$$x = \frac{v_x + v_{0x}}{2}t \quad \text{и} \quad x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$$

применять лишь тогда, когда из них можно сразу найти неизвестную величину.

Проанализировав условие задачи, нужно сделать чертеж, на котором указать траекторию движения точки, векторы скорости в указанные моменты времени, векторы ускорений и заданные интервалы времени. Затем необходимо установить систему отсчета. Начало координат всегда удобно помещать в начальной точке движения, а оси Ox и Oy (или одну из них, если движение прямолинейное) направлять в сторону начального движения тела. После этого следует отметить все координаты движущегося тела в заданные и интересующие нас моменты времени и спроецировать векторы скоростей и ускорений на оси Ox и Oy.

В общем случае оси координат удобно направлять так, чтобы приходилось делать минимум разложений векторов, т. е. чтобы как можно больше проекций векторов оказались равными нулю и уравнения по осям были предельно простыми. Выполнив чертеж, нужно установить связь между всеми величинами, введенными в решение (отмеченными на чертеже), с помощью кинематических формул для координат и проекций скоростей и записать в виде формул все дополнительные условия задачи.

Решая задачи на движение тел, брошенных вертикально вверх в гравитационном поле Земли, нужно обратить особое внимание на следующее. Уравнения координаты и скорости для тела, брошенного вертикально вверх, дают общую зависимость y и v_y для всего времени движения тела. Они справедливы не только для замедленного подъема вверх, но и для дальнейшего равноускоренного падения тела, поскольку движение тела после остановки на мгновение в верхней точке траектории происходит с прежним ускорение $\vec{g}$. Под y и v_y при этом всегда подразумеваются координата и проекция скорости движущейся точки на вертикальную ось спустя время t после начала движения.

Если тело брошено вертикально вверх со скоростью $\vec{v}_0$, то время $t_{\text{под}}$ и высота $h_{\max}$ его подъема равны:

$$t_{\text{под}} = \frac{v_0}{g}; \quad h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{g t_{\text{под}}^2}{2}.$$

Кроме того, время падения этого тела в исходную точку равно времени подъема на максимальную высоту ($t_{\text{пад}} = t_{\text{под}}$), а скорость падения по модулю равна начальной скорости бросания ($v_{\text{пад}} = v_0$). Эти формулы полезно помнить и использовать как готовые результаты при составлении вспомогательных уравнений.

Движение тел, брошенных под углом к горизонту, можно рассматривать как результат наложения двух одновременных прямолинейных движений по осям Ox и Oy, направленных вдоль поверхности Земли и по нормали к ней. Учитывая это, решение задач такого типа удобно начинать с нахождения проекций вектора начальной скорости по этим осям и затем составлять уравнения для каждого направления. При этом необходимо иметь в виду, что тело, брошенное под углом к горизонту, при отсутствии сопротивления воздуха и небольшой начальной скорости летит по параболе и время движения по оси Ox равно времени движения по оси Oy, поскольку оба эти движения происходят одновременно.

Составив полную систему кинематических уравнений, описывающих движение точки, и проверив число неизвестных — оно должно быть равно числу уравнений, можно приступать к ее решению относительно искомых величин, руководствуясь данными ранее указаниями.

В связи с введением в школьную программу элементов высшей математики, можно предложить ряд задач, требующих применения методов математического анализа к исследованию функции на экстремум. Схема решения задач, в которых требуется определить максимальное или минимальное значение одной из кинематических величин, остается прежней: нужно получить алгебраическое выражение искомой величины в произвольный момент времени, записав ее через заданные характеристики движения. Чтобы найти максимум или минимум этой величины или условие, при котором она будет экстремальной, нужно продифференцировать полученное выражение и приравнять производную к нулю. В результате мы получим уравнение, из которого можно найти значение переменного параметра, определяющее максимальное или минимальное значение искомой величины. Будет ли функция иметь максимум или минимум, можно иногда определить из физических соображений, а в общем случае — по второй производной. Если вторая производная окажется больше нуля, функция имеет минимум, если меньше — максимум. Подставляя найденное значение параметра в исходную формулу, мы получим экстремальное значение искомой величины.

в) Задачи о движении точки по окружности принципиально ничем не отличаются от решения задач о прямолинейном движении. Особенность состоит лишь в том, что здесь наряду с общими формулами кинематики точки приходится использовать формулы (1.12) — (1.14) для линейной скорости и центростремительного ускорения.

г) Решение задач о вращении твердого тела вокруг неподвижной оси основано на применении формул (1.17) с учетом (1.18) и (1.19). Как и в случае поступательного движения, для составления кинематических уравнений вращательного движения достаточно использовать только основные формулы — уравнения угловой скорости и углового перемещения.

д) В заключение остановимся на задачах, требующих использования графиков. Основное требование, которое предъявляется при решении таких задач,— это твердое знание графиков элементарных функций и умение их исследовать. В частности, нужно хорошо знать уравнение прямой линии и параболы, отображающих геометрически скалярные уравнения ускорения, скорости, пути и координаты при равномерном и равнопеременном движениях.

Первую группу графических задач составляют задачи, в которых дается график зависимости (обычно от времени) одних кинематических величин и по нему нужно построить график зависимости между какими-либо другими величинами. Приступая к решению таких задач, необходимо внимательно проанализировать предложенный график, установить характер заданного движения и представить данную зависимость в виде уравнения. По этому уравнению нужно определить искомую зависимость и, исследовав ее, построить нужный график. При достаточном навыке в решении подобных задач искомый график можно строить сразу, не прибегая к алгебраическим выкладкам.

Вторую группу составляют задачи, решение которых предполагает отображение условий, заданных аналитически, на одном из графиков зависимости кинематических величин от времени. Как только условия такой задачи записаны графически, ее дальнейшее решение состоит в том, чтобы найти ту или иную величину на вычерченном графике, что, как правило, особого труда не представляет. Большое внимание в задачах подобного типа следует обращать на рациональный выбор графика, на котором будет удобнее всего представить условия задачи и легче всего указать искомую величину.

Пример 1. Велосипедист ехал из одного города в другой. Половину пути он проехал со скоростью $v_1 = 12$ км/ч. Далее половину оставшегося времени он ехал со скоростью $v_2 = 6$ км/ч, а затем до конца пути шел пешком со скоростью $v_3 = 4$ км/ч. Определите среднюю скорость велосипедиста на всем пути.

Решение. Установив, что задача дана на равномерное прямолинейное движение одного тела, и представив себе весь процесс движения, делаем схематический чертеж (рис. 1.1). При составлении чертежа прежде всего изображаем траекторию движения и выбираем на ней начало отсчета движения (точка O). Весь путь разбиваем на три отрезка s_1, s_2, s_3, на каждом из них указываем скорости $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ и отмечаем время движения t_1, t_2 и t_3. Составляем уравнения движения для каждого отрезка пути:

$$s_1 = v_1 t_1;\ s_2 = v_2 t_2;\ s_3 = v_3 t_3 \text{ —}$$

и записываем дополнительные условия задачи:

$$s_1 = s_2 + s_3;\ t_2 = t_3;\quad v_{\text{ср}} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3}.$$

Читаем еще раз условие задачи, выписываем числовые значения известных величин и, определив число неизвестных в полученной системе уравнений (их семь: s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3 и $v_{\text{ср}}$), решаем ее относительно искомой величины $v_{\text{ср}}$.

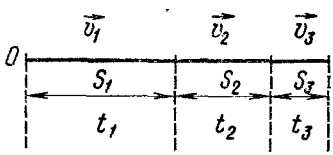

Рис. 1.1

Если при решении задачи полностью

учтены все условия, но в составленных уравнениях число неизвестных получается больше числа уравнений, это означает, что при последующих вычислениях одно из неизвестных сократится, такой случай имеет место и в данной задаче.

Решение системы относительно средней скорости дает:

$$v_{\text{ср}} = \frac{2v_1(v_2 + v_3)}{2v_1 + v_2 + v_3}.$$

Подставив числовые значения в расчетную формулу, получим:

$$v_{\text{ср}} \approx 7 \text{ км/ч}.$$

Пример 2. От буксира, идущего против течения реки, оторвалась лодка. В тот момент, когда на буксире заметили лодку, она находилась от него на достаточно большом расстоянии s_0. С буксира быстро спустили катер, который доплыл до лодки и возвратился с нею назад. Сколько времени заняла поездка катера и какое расстояние он проплыл в одну и другую сторону, если скорости катера и буксира относительно воды равны соответственно v_1 и v_2?

Решение. В задаче рассматривается равномерное движение тел относительно друг друга, причем каждое тело участвует в сложном движении — оно движется относительно воды и вместе с водой, которая сама течет относительно берега. Все тела, участвующие в движении: лодка, буксир и катер, имеют скорости относительно воды и переносную вместе с водой. Изучая движение тел в системах отсчета, движущихся равномерно и прямолинейно относительно неподвижной системы отсчета (как, например, в данной задаче), все расчеты можно производить так, как если бы переносного движения (течения) не было. Это почти очевидное обстоятельство следует из принципа относительности движения.

Изучая относительное движение двух или нескольких тел, систему отсчета удобно связывать с одним из этих тел, принимая его за тело отсчета, и рассматривать перемещения, скорости и ускорения относительно этого тела. В предлагаемой задаче систему отсчета удобно связать с буксиром, так как все происходящие события рассматриваются по отношению к нему. В системе отсчета, связанной с буксиром, сам буксир покоится, лодка удаляется от него со скоростью v_2, катер удаляется от буксира со скоростью $v_1 + v_2$, катер вместе с лодкой приближается к нему со скоростью $v_1 - v_2$.

Допустим, что за время t_1, спустя которое катер догонит лодку, буксир удалился от лодки на расстояние s_1, тогда уравнение движения для катера и лодки за это время дает:

$$s_0 + s_1 = (v_1 + v_2)\, t_1 \tag{1}$$

и

$$s_1 = v_2 t_1. \tag{2}$$

Если для возвращения на буксир катеру потребовалось время t_2, то уравнение его движения имеет вид:

$$s_0 + s_1 = (v_1 - v_2)\,t_2. \qquad (3)$$

Искомое время движения катера будет равно:

$$t = t_1 + t_2, \qquad (4)$$

и за это время катер проплывет расстояние

$$s = 2(s_0 + s_1). \qquad (5)$$

Итак, получены пять уравнений, содержащих пять неизвестных величин (s_1, t_1, t_2, s и t), из которых требуется определить продолжительность поездки катера t и пройденное им расстояние s. Решая уравнения совместно, находим:

$$t = \frac{2s_0}{v_1 - v_2}; \quad s = 2s_0\left(1 + \frac{v_2}{v_1}\right).$$

Если выбрать систему отсчета, движущуюся вместе с водой или связанную с Землей, решение задачи получается более сложным.

Пример 3. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 3{,}13$ м/с. Когда оно достигло верхней точки полета, из того же начального пункта с такой же начальной скоростью бросили второе тело. Определите, на каком расстоянии h от точки бросания встретятся тела; сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. Делаем чертеж (рис. 1.2). Отмечаем на нем траекторию движения первого и второго тела, ось Oy направляем вертикально вверх. Выбрав начало отсчета в точке O, указываем начальную скорость тел $\vec{v}_0$, высоту h, на которой произошла встреча (координату $y = h$), и время t_1 и t_2 движения каждого тела до момента встречи. (Чтобы не загромождать чертеж, скорости тел в момент встречи не указаны.)

Уравнение движения тела, брошенного вертикально вверх, позволяет найти координату движущегося тела для любого момента времени независимо от того, поднимается ли тело вверх или падает после подъема вниз, поэтому для первого тела

$$y = v_0 t_1 - \frac{g t_1^2}{2},$$

а для второго

$$y = v_0 t_2 - \frac{g t_2^2}{2}.$$

По условию задачи $y = h$.

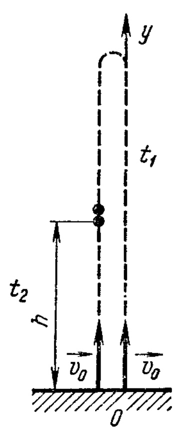

Рис. 1.2

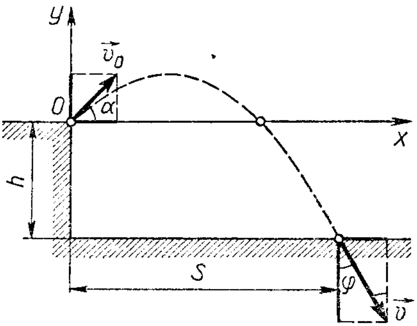

Рис. 1.3

Третье уравнение составляем, исходя из условия, что второе тело бросили позднее первого на время максимального подъема:

$$t_1 - t_2 = \tau, \quad \text{причем} \quad \tau = \frac{v_0}{g}.$$

Решая составленную систему уравнений относительно h, получаем:

$$h = \frac{3}{4} \cdot \frac{v_0^2}{2g}; \quad h \approx 0{,}37 \text{ м}.$$

Пример 4. Артиллерийское орудие расположено на горе высотой h. Снаряд вылетает из ствола со скоростью $\vec{v}_0$, направленной под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите: а) дальность полета снаряда по горизонтальному направлению; б) скорость снаряда в момент падения; в) угол падения; г) уравнение траектории и д) начальный угол стрельбы, при котором дальность полета наибольшая.

Решение. Делаем чертеж (рис. 1.3). Прямоугольную систему координат выбираем так, чтобы ее начало совпало с точкой бросания, а оси были направлены вдоль поверхности Земли и по нормали к ней в сторону начального смещения снаряда. Изображаем траекторию снаряда, его начальную скорость $\vec{v}_0$, угол бросания α, высоту $\vec{h}$, горизонтальное перемещение $\vec{s}$, скорость в момент падения $\vec{v}$ (она направлена по касательной к траектории в точке падения) и угол падения φ (углом падения тела называют угол между касательной к траектории, проведенной в точку падения, и нормалью к поверхности Земли).

Для составления кинематических уравнений движения спроецируем векторы скорости $\vec{v}_0$ и $\vec{v}$ и вектор ускорения $\vec{g}$ на оси координат Ox и Oy. Проекции этих векторов, как видно из чертежа, равны соответственно

$$v_0\cos\alpha, \quad v_0\sin\alpha, \quad v_x, \quad v_y, \quad 0 \text{ и } -g.$$

а,б) Составляем уравнения скорости и движения снаряда в проекциях по осям. Так как проекция ускорения на горизонтальную ось равна нулю, то v_x и x в любой момент времени удовлетворяют уравнениям

$$v_x = v_0\cos\alpha \tag{1}$$

и

$$x = v_0\cos\alpha\, t. \tag{2}$$

Для вертикальной оси будем иметь:

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt; \tag{3}$$

$$y = v_0\sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}. \tag{4}$$

В момент времени t_1, когда снаряд упадет на землю, его координаты равны:

$$x = s; \quad y = -h. \tag{5}$$

В последнем уравнении h взято со знаком «минус», так как за время движения снаряд сместится относительно уровня отсчета O высоты в сторону, противоположную направлению, принятому за положительное.

Результирующая скорость в момент падения равна:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \tag{6}$$

В составленной системе уравнений пять неизвестных; нам нужно определить s и v.

Из уравнений (4) и (5) находим время полета снаряда:

$$t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g}.$$

Подставляя выражение для t_1 в формулы (2) и (3) с учетом (5), соответственно получаем:

$$s = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha + v_0 \cos\alpha \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g}, \tag{7}$$

$$v_y = -\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}. \tag{8}$$

После этого из (6) с учетом (1) и (8) находим:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}. \tag{9}$$

Из полученных результатов можно сделать следующие выводы.

Если $h = 0$, т. е. снаряды падают на уровне вылета, то согласно формуле (7) дальность их полета равна $s = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$. Если при этом угол бросания равен 45° ($\sin 2\alpha = 1$), то при заданной начальной скорости v_0 дальность полета наибольшая:

$$s_{\max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Подставив в выражение (9) значение $h = 0$, получим, что скорость снаряда в момент его подлета к уровню, с которого был произведен выстрел, равна его начальной скорости: $v = v_0$.

При отсутствии сопротивления воздуха скорость падения тел равна по модулю их начальной скорости бросания независимо от того, под каким углом было брошено тело, лишь бы точки бросания и падения находились на одном уровне. Учитывая, что проекция скорости на горизонтальную ось с течением времени не изменяется, легко установить, что в момент падения скорость тела образует с горизонтом такой же угол, как и в момент бросания.

в) Угол падения можно найти, исходя из того, что скорость тела в любой точке траектории направлена по касательной. Из рисунка 1.3 видно, что в точке падения $\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_x}{v_y}$, откуда с учетом выражений (1) и (3) получим:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_0\cos\alpha}{\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha + 2gh}}.$$

г) Чтобы найти уравнение траектории снаряда, нужно установить связь между его координатами x и y в произвольный момент времени t. Если в уравнениях (2) и (4) под x и y подразумевать смещение снаряда по осям (учитывая, что эти уравнения справедливы для всего движения снаряда), а под t — время, по истечении которого снаряд из точки O попал в данную точку траектории, то, исключая из уравнений t, мы и получим искомое уравнение. Найдем из уравнения (2) время t и, подставив его в уравнение (4), будем иметь:

$$y = \operatorname{tg}\alpha x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2.$$

Это уравнение вида $y = -ax^2 + bx$; оно представляет собой уравнение параболы, проходящей через начало координат O и обращенной выпуклостью вверх. Таким образом, тело, брошенное под углом α к горизонту, при отсутствии сопротивления воздуха летит по параболе. Нетрудно заметить, что этот вывод имеет место для любых углов бросания.

д) Решая уравнения (2), (4), (5) относительно начального угла бросания α, получим:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{gs}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2} - \left(\frac{gs}{v_0^2}\right)^2}\right). \qquad (10)$$

Поскольку угол бросания не может быть мнимым, то это выражение имеет физический смысл лишь при условии, что

$$1 + \frac{2gh}{v_0^2} - \left(\frac{gs}{v_0^2}\right)^2 \geqslant 0,$$

т. е. $s \leqslant \frac{v_0\sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$, откуда следует, что максимальное перемещение снаряда по горизонтальному направлению равно:

$$s_{\max} = \frac{v_0\sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}.$$

Подставляя выражение для $s = s_{\max}$ в формулу (10), получим для угла α, при котором дальность полета наибольшая:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{gs_{\max}} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}.$$

Пример 5. Камень брошен на склоне горы под углом α к ее поверхности (рис. 1.4). *а*) Определите дальность полета камня и его наибольшую высоту подъема над склоном, если начальная скорость камня равна $\vec{v}_0$, угол наклона горы к горизонту β. б) По какому закону изменяется с течением времени нормальная и ка-

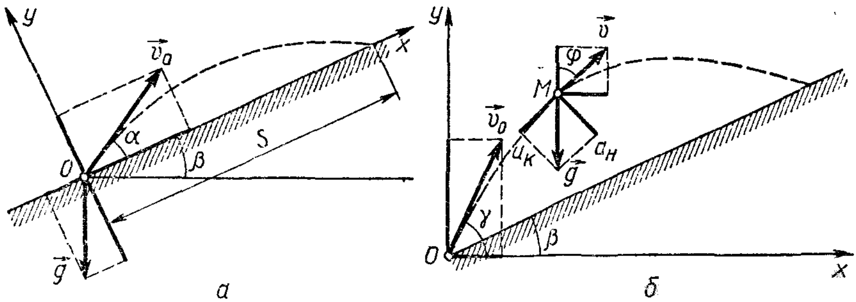

Рис. 1.4

сательная проекции полного ускорения камня, а также радиус кривизны траектории? Сопротивление воздуха не учитывать.

Р е ш е н и е. а) Выберем прямоугольную систему координат с началом отсчета в точке бросания камня так, чтобы ось Ox шла вдоль поверхности Земли, а ось Oy — перпендикулярно к ней.

Изобразим на чертеже (рис. 1.4, *а*) траекторию движения камня, его начальную скорость $\vec{v}_0$ и ускорение $\vec{g}$. Отметим также координаты камня в интересующий нас момент времени (в момент падения): $x = s$, $y = 0$. Для составления кинематических уравнений движения камня спроецируем векторы $\vec{v}_0$ и $\vec{g}$ на оси координат Ox и Oy. Проекции этих векторов по осям равны соответственно:

$$v_0 \cos \alpha; \; v_0 \sin \alpha; \; -g \sin \beta; \; -g \cos \beta.$$

Составляем уравнение движения в проекциях на оси с учетом того, что за время t_1 всего движения перемещение камня по нормали к поверхности (по оси Oy) оказалось равным нулю, а вдоль поверхности (по оси Ox) — $\vec{s}$, т. е. что при $t = t_1$ $y = 0$; $x = s$.

$$0 = v_0 \sin \alpha t_1 - \frac{g \cos \beta t_1^2}{2}; \quad s = v_0 \cos \alpha t_1 - \frac{g \sin \beta t_1^2}{2}.$$

По условию задачи v_0, α и β нам заданы, поэтому в составленных уравнениях только две неизвестные величины: s и t_1.

Из первого уравнения определяем время полета камня:

$$t_1 = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g \cos \beta}.$$

Подставляя это выражение для t_1 во второе уравнение, находим:

$$s = \frac{2 v_0^2 \sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta)}{g \cos^2 \beta}.$$

Если положить здесь $\beta = 0$, что соответствует случаю, когда тело брошено под углом α к горизонтальной поверхности, то

$$s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Этот результат, как и следовало ожидать, совпадает с результатом предыдущего примера.

Предлагаем самим читателям определить максимальную высоту подъема камня над поверхностью горы и угол падения.

б) Тело, брошенное под углом к горизонту, под действием силы тяжести летит с постоянным ускорением $\vec{g}$. Это ускорение в каждой точке траектории образует с вектором скорости некоторый угол φ. Выберем оси координат так, как указано на рисунке 1.4, *б*, и изобразим на чертеже траекторию движения тела, его начальную скорость $\vec{v}_0$, а также скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{g}$ тела в произвольной точке M траектории. Полагая для простоты $\alpha + \beta = \gamma$, спроецируем векторы $\vec{v}_0$ и $\vec{v}$ на оси координат. Проекции этих векторов равны соответственно $v_0 \cos\gamma$, $v_0 \sin\gamma$, $v \sin\varphi$ и $v \cos\varphi$.

Вектор полного ускорения — вектор $\vec{g}$ спроецируем на направление касательной к траектории движения тела и нормаль в точке M. Как видно из чертежа, касательная $a_к$ и нормальная $a_н$ проекции вектора $\vec{g}$ равны соответственно:

$$a_к = g \cos\varphi \text{ и } a_н = g \sin\varphi. \tag{1}$$

Для нахождения угла φ составим уравнения для проекций скорости на выбранные оси:

$$v \sin\varphi = v_0 \cos\gamma, \tag{2}$$

$$v \cos\varphi = v_0 \sin\gamma - gt, \tag{3}$$

причем

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \tag{4}$$

Из уравнений (2) — (3) находим:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_0 \cos\gamma}{v_0 \sin\gamma - gt},$$

и следовательно, согласно (1) $a_к = \dfrac{(v_0 \sin\gamma - gt)\, g}{\sqrt{(v_0 \cos\gamma)^2 + (v_0 \sin\gamma - gt)^2}}$,

$$a_н = \frac{v_0 g \cos\gamma}{\sqrt{(v_0 \cos\gamma)^2 + (v_0 \sin\gamma - gt)^2}}.$$

Радиус кривизны траектории в любой точке траектории равен:

$$R = \frac{v^2}{a_н}.$$

Нам известна проекция нормального ускорения тела в точке M $a_н$, модуль его скорости можно найти из уравнений (2), (3) и (4):

$$v = \sqrt{(v_0 \cos\gamma)^2 + (v_0 \sin\gamma - gt)^2}.$$

Следовательно,

$$R = \frac{[(v_0 \cos\gamma)^2 + (v_0 \sin\gamma - gt)^2]^{\frac{3}{2}}}{v_0 g \cos\gamma}.$$

Анализируя полученные выражения для $a_к$, $a_н$ и R, мы видим, что в точке бросания при $t=0$

$$a_к = g\sin\gamma;\quad a_н = g\cos\gamma;\quad R = \frac{v_0^2}{g\cos\gamma}.$$

В верхней точке траектории

$$t = \frac{v_0\sin\gamma}{g};\quad a_к = 0;\quad a_н = g;\quad R = \frac{v_0^2\cos^2\gamma}{g}.$$

В точке падения, т. е. при $t = \dfrac{2v_0\sin\alpha}{g\cos\beta}$,

$$a_к = \frac{(\sin\gamma\cos\beta - 2\sin\alpha)\,g}{\sqrt{\cos^2\gamma\cos^2\beta + (\sin\gamma\cos\beta - 2\sin\alpha)^2}},$$

$$a_н = \frac{\cos\gamma\cos\beta g}{\sqrt{\cos^2\gamma\cos^2\beta + (\sin\gamma\cos\beta - 2\sin\alpha)^2}},$$

$$R = \frac{v_0^2\left[\cos^2\gamma\cos^2\beta + (\sin\gamma\cos\beta - 2\sin\alpha)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{g\cos\gamma\cos^3\beta}.$$

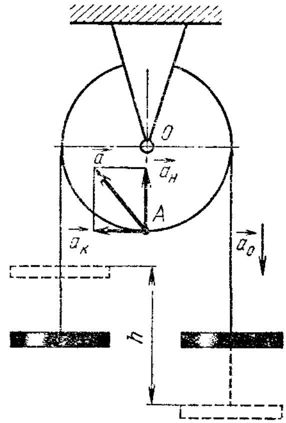

Рис. 1.5

Пример 6. Через блок радиусом R (рис. 1.5) переброшена нить, на концах которой находятся два груза, установленные на одном уровне. Предоставленные самим себе, грузы приходят в равноускоренное движение и спустя время t один из них оказывается над другим на высоте h. Определите угол поворота блока, его угловую скорость и полное ускорение точки A в конце интервала времени t. Проскальзыванием нити по блоку пренебречь.

Решение. Проставляем на чертеже смещение грузов h за время t и, приняв за начало отсчета точку O, расставляем векторы касательного $\vec{a}_к$, нормального $\vec{a}_н$ и полного $\vec{a}$ ускорений точки A.

Так как по условию задачи нить по блоку не проскальзывает, то касательное ускорение всех точек, лежащих на ободе, по модулю равно ускорению грузов: $a_к = a_о$.

Поскольку движение грузов равноускоренное и за время t они смещаются относительно друг друга на расстояние h, уравнение движения для каждого груза имеет вид:

$$\frac{h}{2} = \frac{a_0 t^2}{2}, \qquad (1)$$

так как ускорение у них одинаковое и каждый груз проходит расстояние $\dfrac{h}{2}$.

Записываем кинематические уравнения движения для блока, учитывая, что он вращается равноускоренно:

$$\omega = \alpha t \ \text{ и } \ \varphi = \frac{\alpha t^2}{2}. \qquad (2)$$

Угловая скорость ω и угловое ускорение α блока связаны с нормальным и касательным ускорениями точки A формулами

$$a_н = \omega^2 R \text{ и } \alpha = \frac{a_к}{R}. \qquad (3)$$

Полное ускорение точки A равно:

$$a = \sqrt{a_к^2 + a_н^2}. \qquad (4)$$

По условию задачи нам даны R, t и h, поэтому в составленной системе уравнений неизвестными являются a_0, ω, α, φ, $a_н$ и a. Решая уравнения совместно относительно искомых неизвестных φ, ω и a, получим:

$$\varphi = \frac{h}{2R}; \quad \omega = \frac{h}{Rt}; \quad a = \frac{h\sqrt{h^2 + R^2}}{Rt^2}.$$

Пример 7. Катушка с намотанной на нее нитью лежит на горизонтальной поверхности стола (рис. 1.6, *а*) и может катиться по ней без скольжения. С какой скоростью будет перемещаться ось катушки, если конец нити тянуть в горизонтальном направлении со скоростью $\vec{u}$? Радиус внутренней части катушки r, внешней —R. Каковы будут скорость и ускорение точки A?

Решение I. Качение катушки по столу можно представить как результат наложения двух одновременных независимых движений: переносного поступательного движения всех точек катушки с одинаковыми скоростями $\vec{v}_0$, равными по модулю скорости оси катушки, и относительного — вращения вокруг ее оси с некоторой угловой скоростью $\vec{\omega}_0$. Учитывая это, абсолютную (результирующую) скорость $\vec{u}$ произвольной точки катушки (в том числе и точки B), удаленной от ее оси на расстояние ϱ, можно представить как векторную сумму скоростей этой точки в переносном и относительном движении, т. е.

$$\vec{u} = \vec{v}_0 + \vec{v}, \qquad (1)$$

где $v = \omega_0 \varrho$ — линейная скорость точки, обусловленная круговым относительным движением.

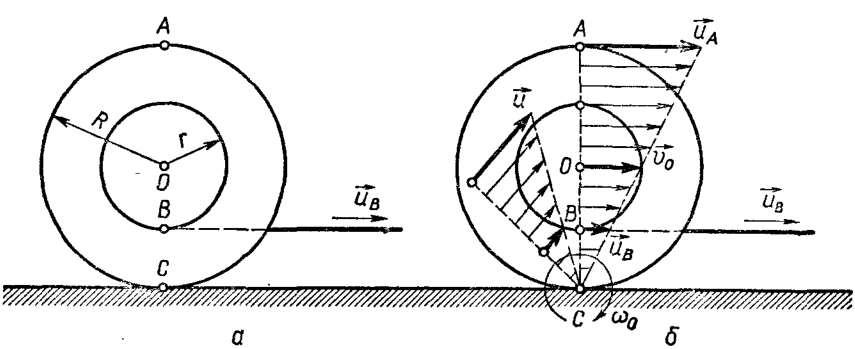

Рис. 1.6

Угловая скорость ω_0 определяется из условия, что катушка катится по поверхности стола без скольжения. Точка C катушки в момент соприкосновения с поверхностью стола не движется относительно стола, ее абсолютная скорость $u_c = 0$. Для этой точки $\varrho = R$ и, следовательно, относительная скорость движения, направленная влево, равна по модулю переносной скорости, направленной вправо, т. е.

$$\omega_0 R = v_0, \text{ откуда}$$

$$\omega_0 = \frac{v_0}{R}. \tag{2}$$

В задаче дана абсолютная скорость точки B, $\vec{u}_B$, равная по модулю скорости $\vec{u}$ конца нити, и надо найти переносную скорость $\vec{v}_0$ (абсолютную скорость оси катушки) и скорость $\vec{u}_A$ точки A.

Согласно выражениям (1) и (2) с учетом направления относительных скоростей точек B и A и того, что $\varrho_B = r$ и $\varrho_A = R$, получим для u и u_A соответственно:

$$u = v_0 - \frac{v_0}{R} r, \quad u_A = v_0 + \frac{v_0}{R} r,$$

откуда $v_0 = \dfrac{R}{R-r} u$ и $u_A = 2v_0 = \dfrac{2Ru}{R-r}$.

Переносное движение всех точек катушки является поступательным, поэтому для нахождения ускорения какой-либо точки катушки можно воспользоваться формулой (1.22).

Поскольку переносное движение катушки равномерное, то для всех точек $a_п = 0$ и их полное ускорение равно относительному ускорению: $\vec{a} = \vec{a}_0$. Относительное ускорение представляет собой нормальное ускорение, вызванное равномерным вращением катушки вокруг ее оси, поэтому

$$a_A = \omega_0^2 R = \frac{v_0^2}{R} = \frac{u^2 R}{(R-r)^2}.$$

Решение II. Движение катушки по столу есть плоскопараллельное движение твердого тела без проскальзывания, так как скорость точки C в данный момент времени равна нулю. Если принять ось, проходящую через точку C перпендикулярно плоскости чертежа, за мгновенную ось вращения, то качение катушки можно представить как непрерывный ряд мгновенных поворотов вокруг линии опоры с некоторой угловой скоростью ω_O (рис. 1.6,*б*). Связь между абсолютной скоростью u произвольной точки катушки, удаленной от мгновенной оси вращения на расстояние x, и ω_O дается формулой $u = \omega_O x$.

Учитывая, что для точек B, O и A $x_B = R - r$, $x_0 = R$, $x_A = 2R$ и что абсолютная скорость точки B равна скорости конца нити ($u_B = u$), получим для этих точек:

$$u = \omega_O (R - r); \quad v_0 = \omega_O R; \quad u_A = \omega_O R.$$

По условию задачи нам известны u, R и r, поэтому в составленных уравнениях неизвестными являются ω_O, v_0 и u_A. Решая систему относительно искомых неизвестных — скорости перемещения оси катушки v_0 и абсолютной скорости u_A точки A, получим:

$$v_0 = \frac{R}{R-r} u; \quad u_A = \frac{2Ru}{R-r}.$$

Несмотря на то что мы нашли скорость точки A, ее ускорение нельзя сразу определить по формуле нормального ускорения, так как нам неизвестен радиус кривизны траектории точки. Следует обратить внимание, что он равен не $2R$, как это может показаться, а $4R$ (рекомендуем доказать это читателю), поэтому для нахождения a_A нужно поступить точно так же, как это было сделано в первом случае.

При отклонении нити от горизонтального положения вверх — увеличении угла между нитью и плоскостью стола — угловая скорость вращения катушки вокруг мгновенной оси будет уменьшаться (поскольку уменьшается расстояние x при неизменной скорости u). В том случае, когда нить составит с горизонтом такой угол α_0, при котором продолжение нити пройдет через точку C (радиус $x = 0$), катушка будет вращаться на месте. При углах $\alpha > \alpha_0$ катушка начнет двигаться влево.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 1

1.1. Самолет летит горизонтально над землей. Тень его движется по земле со скоростью 525 км/ч. Чему равна скорость самолета?

1.2. С автобусной станции отправляются рейсовые автобусы в пункты A, B и C, расположенные на одной трассе к югу от станции. Автобусы первого маршрута выходят со станции в среднем через 10 мин, второго — через 8 мин, третьего — через 5 мин. На каком расстоянии в среднем идет один автобус от другого на трассе, если их скорость равна 30 км/ч?

1.3. Всадник проехал за первые 40 мин 5 км. Следующий час он передвигался со скоростью 10 км/ч, а оставшиеся 6 км пути — со скоростью 12 км/ч. Определите среднюю скорость всадника за все время движения, за первый час движения и на первой половине пути.

1.4. Из пункта A выехал автомобиль с постоянной скоростью v_0. Через промежуток времени, равный t, из того же пункта в том же направлении выходит другой автомобиль и нагоняет первый в пункте B, находящемся от A на расстоянии s_1. Постройте график движения автомобиля и по графику определите скорость второго автомобиля. Решите задачу аналитически.

1.5. Первую половину пути машина шла со скоростью 40 км/ч. Затем она стала двигаться под углом 180° (30°) к своему началь-