вая скорость вращения стержня вокруг его центра?

1.65. Стержень длиной $2l$ скользит по гладкой горизонтальной плоскости. В некоторый момент скорость одного конца стержня оказалась равной v_1 и направленной под углом α к стержню, скорость второго конца v_2. Определите: а) скорость середины стержня; б) угловую скорость вращения стержня вокруг его центра; в) ускорение концов стержня.

1.66. Автомобиль идет по прямому шоссе так, что его скорость изменяется по закону $v = 1 + 2t$ (величины измерены в единицах СИ). Определите скорость и ускорение точек колеса, лежащих на концах вертикального и горизонтального диаметров, спустя 0,5 с после начала ускоренного движения, если радиус колеса равен 1 м.

Глава 2

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

1 В динамике изучают законы движения тел с учетом причин, обусловливающих характер данного движения. Динамика делится на две части: динамику материальной точки и динамику твердого тела. Первую из этих частей, как более простую, изучают в курсе элементарной физики.

2. Механическое движение тел изменяется в процессе их взаимодействия друг с другом.

Меру взаимодействия тел, в результате которого тела деформируются или приобретают ускорение, называют силой. Сила — величина векторная; она характеризуется числовым значением, направлением действия и точкой приложения к телу.

Если к материальной точке (частице) приложено несколько сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$, их действие можно заменить действием одной силы $\vec{F}$, которая является равнодействующей данных сил:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \tag{2.1}$$

Если реально действующие силы заменены равнодействующей, то в дальнейшем нужно считать, что к частице приложено не несколько сил, а только одна — их равнодействующая.

3. При отсутствии внешних воздействий тела сохраняют состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Это свойство, присущее всем телам, называют инерцией, а тела, им обладающие,— инертными. Меру инертности тел при поступательном движении называют массой тел.

4. Основой динамики и всей классической механики служат три закона Ньютона, сформулированные для материальной точки и тел, движущихся поступательно в инерциальных системах отсчета.

а) I закон Ньютона. Если равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке, равна нулю, то точка находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения:

$$\text{при } \vec{F} = \sum \vec{F}_i = 0 \quad \vec{v} = \text{const}. \tag{2.2}$$

Из первого закона динамики следует, что свободное движение частиц с постоянной скоростью — движение по инерции есть такое же естественное состояние частиц, как и покой. Каждая частица может двигаться с какой угодно постоянной скоростью без каких бы то ни было внешних воздействий со стороны, но изменить свое движение — сообщить себе ускорение не может. Состояния покоя и равномерного прямолинейного движения с точки зрения динамики неразличимы.

б) II закон Ньютона. Изменение импульса частицы за единицу времени равно силе, приложенной к частице, и происходит по направлению прямой, вдоль которой действует эта сила:

$$\frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}. \tag{2.3}$$

Здесь $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1$ и $\vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2$ — импульсы (количества движения) частицы в начале и конце промежутка наблюдения Δt; $\vec{F}$ — сила, действующая на частицу в течение этого времени.

Если за время действия силы масса частицы не меняется ($m_1 = m_2 = m$), то согласно (2.3)

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \text{ откуда } \vec{F} = m\vec{a}. \tag{2.4}$$

Это уравнение является основным уравнением динамики материальной точки. При его использовании нужно иметь в виду следующее.

Действие сил на материальную точку не зависит друг от друга. Каждая из сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$, приложенных к частице, сообщает ей такое ускорение, как если бы других сил не было (принцип независимости действия сил):

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m}; \quad \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_2}{m}; \ \ldots; \quad \vec{a}_n = \frac{\vec{F}_n}{m}.$$

Результирующее ускорение $\vec{a}$ частицы, находящейся под действием нескольких сил, равно геометрической сумме ускорений $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$, сообщаемых каждой силой в отдельности. Модуль и направление ускорения $\vec{a}$ таковы, как если бы на частицу действовала одна сила, равная векторной сумме приложенных сил:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i = m\vec{a}, \tag{2.5}$$

т. е. основное уравнение динамики точки справедливо как для отдельных сил, так и для их равнодействующей.

Если равнодействующая сила $\vec{F}$ и скорость $\vec{v}$ направлены по одной прямой (под действием сил изменяется только модуль скорости), то движение материальной точки будет прямолинейным и ускоренным. Если же равнодействующая направлеиа под углом к вектору скорости, то движение материальной точки будет криволинейным. Если в течение всего времени движения равнодействующая перпендикулярна скорости, последняя меняется лишь по направлению. В общем же случае такого движения под действием сил изменяются и модуль, и направление скорости.

В тех случаях, когда на материальную точку действуют силы, равнодействующая которых с течением времени не меняется, движение точки будет равноускоренным: при $\vec{F} = \text{const}$ $\vec{a} = \text{const}$. В частном случае, когда $\vec{F} = 0$, то $\vec{a} = 0$ и $\vec{v} = \text{const}$.

Как и всякому векторному равенству, каждому из уравнений (2.2) — (2.5) на плоскости в декартовой системе координат Oxy соответствуют два скалярных уравнения, связывающие проекции сил и ускорений по соответствующим осям. Так, для уравнения (2.5) будем иметь:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = ma_x; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = ma_y. \tag{2.6}$$

Именно в таком виде основное уравнение динамики точки чаще всего и используют при решении задач.

При изучении криволинейного движения, заданного в естественной форме, и в частности движения по окружности, все силы $\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_n$, действующие на частицу в рассматриваемой точке, удобно разложить по направлению касательной и нормали к траектории движения (вектору скорости).

Равнодействующую $\vec{F}_\text{к}$ составляющих сил $\vec{F}_{i\text{к}}$ по касательной называют касательной или иначе тангенциальной силой. Эта сила сообщает частице касательное ускорение $\vec{a}_\text{к}$, и по второму закону динамики

$$\vec{F}_\text{к} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i\text{к}} = m\vec{a}_\text{к}. \tag{2.7}$$

Равнодействующую $\vec{F}_\text{н}$ составляющих сил $\vec{F}_{i\text{н}}$ по нормали называют нормальной силой. Эта сила сообщает частице нормальное ускорение $\vec{a}_\text{н}$, причем

$$\vec{F}_\text{н} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i\text{н}} = m\vec{a}_\text{н}; \quad |\sum \vec{F}_{i\text{н}}| = ma_\text{н} = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R. \tag{2.8}$$

Здесь R — радиус кривизны траектории частицы в данной точке пространства (в общем случае); при круговом движении R — радиус описываемой окружности.

Если на материальную точку действуют силы, равнодействующая которых $\vec{F}$ все время оказывается направленной перпендикулярно вектору скорости ($\vec{F} \equiv \vec{F}_\text{н}$) и с течением времени не меняется по модулю ($\vec{F} \perp \vec{v}$ и $F = \text{const}$), то модуль вектора скорости остается постоянным, а ее направление за любые равные промежутки времени меняется на одинаковый угол ($a_к = 0$, $a_н = \text{const}$). Нетрудно заметить, что в этом случае точка равномерно движется по окружности.

Материальная точка может описывать окружность (или дугу окружности) и в том случае, если равнодействующая приложенных сил образует с вектором скорости острый или тупой угол. Для этого необходимо, чтобы составляющие равнодействующей $\vec{F}$ по направлению вектора скорости и направлению, ему перпендикулярному, вызывающие касательное и нормальное ускорение точки (силы $\vec{F}_к$ и $\vec{F}_н$), изменялись так, чтобы в каждый момент времени имело место равенство (2.8) при постоянном R.

в) III закон Ньютона. Два тела действуют друг на друга с силами, равными по модулю и противоположными по направлению; приложены эти силы к разным телам.

Равенство модулей сил при взаимодействии имеет место всегда, независимо от того, находятся ли взаимодействующие тела в относительном покое или они движутся.

5. Механическое взаимодействие тел обусловлено их упругостью и свойством притягиваться друг к другу. Причина упругости кроется в электрическом взаимодействии атомов и молекул, составляющих тела.

а) Силу, вызванную деформацией тел и препятствующую изменению их формы и объема, называют упругой. Простейший случай упругого взаимодействия тел — взаимодействие груза с нитью, на которой он подвешен. Со стороны нити на груз вдоль нити в месте его закрепления действует сила упругости $\vec{T}$, называемая силой натяжения; с такой же по модулю силой груз действует на нить в противоположном направлении.

Второй, наиболее распространенный случай взаимодействия тел — это взаимодействие материальной точки с поверхностью. Силы $\vec{F}$, действующие со стороны груза (материальной точки) на опору и со стороны опоры на груз, называют соответственно силой давления и силой реакции опоры. В большинстве задач механики каждую из этих сил принято рассматривать не целиком, а по частям. Для этого силу давления и силу реакции опоры раскладывают по двум взаимно перпендикулярным направлениям: по нормали к поверхности соприкосновения и касательной. Составляющие $\vec{N}$ силы давления и реакции опоры по нормали называются силами нормального давления; составляющие силы взаимодействия тел вдоль касательной получили название сил трения $\vec{F}_{тр}$.

Различают три вида сухого трения: трение покоя, скольжения и качения. Сила трения покоя может меняться в пределах от $-\vec{F}_{тр.\,max}$ до $+\vec{F}_{тр.\,max}$. Модуль максимальной силы трения покоя определяют из соотношения

$$F_{тр.\,max} = \mu N, \qquad (2.9)$$

где μ — постоянный для данной пары соприкасающихся поверхностей коэффициент, называемый коэффициентом трения покоя. При малых скоростях скольжения по этой же формуле рассчитывают и силу трения скольжения, так как в этом случае коэффициент трения скольжения мало отличается от коэффициента трения покоя.

б) Две материальные точки (два однородных шара) притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними (между их центрами) (закон всемирного тяготения):

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (2.10)$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н · м^2 · кг$^{-2}$ — гравитационная постоянная. Если тело массой m находится над поверхностью Земли на высоте h, то на него действует сила земного притяжения, равная по модулю

$$F = G\frac{mM_з}{(R_з + h)^2}. \qquad (2.10')$$

Предоставленное действию одной этой силы, всякое тело падает ускоренно по направлению отвесной линии и одновременно с этим участвует в суточном вращении земного шара, обладая центростремительным ускорением. Эти ускорения создаются составляющими силы притяжения по направлению отвесной линии и радиусу окружности, описываемой телом вокруг земной оси.

Составляющую силы земного притяжения по отвесному направлению в данной точке земного шара, равную $m\vec{g}$, называют силой тяжести, а ускорение $\vec{g}$, создаваемое этой силой,— ускорением свободного падения. Ускорение свободного падения не зависит от массы тела; если не учитывать вращение Земли и считать ее шаром, то $m\vec{g} = \vec{F}$ и, стало быть,

$$g = G\frac{M_з}{(R_з + h)^2}. \qquad (2.11)$$

Если тело находится на поверхности Земли или на близком от нее расстоянии ($R_з \gg h$), то

$$g = g_0 = G\frac{M_з}{R_з^2} \qquad (2.11')$$

и можно считать, что ускорение свободного падения имеет для всех тел не только одинаковое, но и постоянное значение.

Из соотношений (2.11) и (2.11′) следует, что

$$g = \left(\frac{R_з}{R_з + h}\right)^2 g_0.$$

в) Весом тела называют силу, с которой тело действует на горизонтальную опору или нить, удерживающую его от свободного падения. Следует иметь в виду, что по модулю вес и сила тяжести могут сильно различаться друг от друга, как, например, при невесомости (или перегрузке), и отождествление их приводит к абсурду.

6. а) При изучении движения системы материальных точек силы, действующие на отдельные частицы системы, делят на внешние и внутренние.

Внешними называют силы, которые действуют на тело данной системы со стороны тел, не принадлежащих к ней. Внутренними называют силы, действующие между телами, входящими в данную систему. На основании третьего закона динамики во всякой механической системе векторная сумма внутренних сил всегда равна нулю. Систему называют замкнутой (изолированной), если геометрическая сумма внешних сил, действующих на материальные точки системы, равняется нулю.

б) При движении системы частиц существует такая точка, движение которой наиболее полно представляет механическое состояние системы в целом. Это центр масс (центр инерции) системы.

Центром масс системы, состоящей из n частиц, называется точка, радиус-вектор которой $\vec{r}_C$ относительно выбранной системы отсчета равен:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}, \tag{2.12}$$

где m_i и $\vec{r}_i$ — соответственно масса и радиус-вектор i-й частицы; M — масса всей системы.

Векторному уравнению (2.12) на плоскости соответствуют два скалярных уравнения для координат центра масс

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \tag{2.12$'$}$$

где x_i и y_i — координаты точки с номером i. В общем случае центр масс ни с одной из частиц системы не совпадает.

Если частицы, составляющие систему, движутся, то $\vec{r}_i$ меняются с течением времени. Дифференцируя обе части равенства (2.12) по t, получим:

$$\vec{v}_C \sum m_i = M\vec{v}_C = \sum m_i \vec{v}_i, \tag{2.13}$$

где $\vec{v}_C$ — скорость центра масс, $\vec{v}_i$ — скорость i-й частицы.

Центр масс системы материальных точек имеет смысл точки, масса и импульс которой равны массе и полному импульсу системы.

в) Из второго и третьего законов динамики вытекает, что для системы, состоящей из n материальных точек с массами m_1, m_2, ...

..., m_n, находящихся под действием внешних сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$, справедливо уравнение

$$\frac{\vec{p}_2-\vec{p}_1}{\Delta t}=\sum\vec{F}, \qquad (2.14)$$

где $\vec{p}_1=\sum m_i\vec{v}_i$ и $\vec{p}_2=\sum m_i'\vec{v}_i'$ — векторные суммы импульсов всех частиц в начале и конце промежутка наблюдения Δt. При неизменной массе частиц

$$\sum\vec{F}=\sum m_i\vec{a}_i=M\vec{a}_C, \qquad (2.15)$$

где $\vec{a}_i$ и $\vec{a}_C$ — соответственно ускорения i-й частицы и центра масс.

Если частицы обладают при этом одинаковым ускорением $\vec{a}$, то

$$\sum\vec{F}=\vec{a}\sum m_i=\vec{a}M. \qquad (2.16)$$

7. Законы Ньютона сформулированы для инерциальных систем отсчета — систем, связанных с телами, на которые не действуют внешние силы. В системах, движущихся ускоренно, эти законы не выполняются. Чтобы можно было пользоваться законами Ньютона в неинерциальных системах отсчета, нужно учесть, что все тела ведут себя в этих системах так, как если бы произошло изменение гравитационного поля и вектор ускорения свободного падения $\vec{g}$ получил приращение $-\vec{a}$, равное ускорению системы (относительно инерциальной системы), взятому с противоположным знаком. Иными словами, в неинерциальных системах отсчета, расположенных вблизи Земли, можно использовать те же законы, формулы и уравнения, что и в инерциальных, но всюду, где стоит вектор $\vec{g}$, заменить его вектором $\vec{g}'$, равным

$$\vec{g}'=\vec{g}+(-\vec{a}). \qquad (2.17)$$

Рекомендуем читателю проверить это сначала на элементарных примерах, когда ускоренное движение системы происходит вверх или вниз, затем рассмотреть ускоренное движение по горизонтали и после этого перейти к общему случаю.

Указанный способ расчета, несмотря на известный формализм и трудности его физического обоснования, позволяет быстро получить результат там, где обычные пути оказываются длинными и трудными. Само собой разумеется, что этот метод расчета не является единственным — систему отсчета можно связать не с телом, имеющим ускорение, а, например, с Землей, считая ее неподвижной, и использовать законы механики в их обычном виде.

8. Следствием второго и третьего законов Ньютона является один из фундаментальных законов природы — закон сохранения импульса.

В замкнутой системе тел векторная сумма импульсов всех тел с течением времени не изменяется, или, иначе, полный импульс замкнутой системы при любых изменениях, происходящих в этой системе, остается одним и тем же.

Если $\sum \vec{F} = 0$, то согласно (2.14) $\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = 0$, т. е. в замкнутой системе

$$\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_C = \text{const}. \tag{2.18}$$

Для практически наиболее распространенного случая — взаимодействия двух изолированных частиц закон сохранения импульса дает:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1'\vec{v}_1' + m_2'\vec{v}_2'. \tag{2.18$'$}$$

Из закона сохранения импульса системы следует:

а) Импульсы отдельных частиц, входящих в изолированную систему, могут изменяться под действием внутренних сил, но в сумме эти изменения равны нулю.

б) Поскольку векторному уравнению (2.18) соответствуют два скалярных уравнения для проекций векторов импульсов частиц (если векторы расположены в одной плоскости), то закон сохранения импульса может выполняться по отдельным осям, вдоль которых сумма проекций сил равна нулю. Иными словами, закон сохранения импульса может выполняться по оси Ox и при этом не выполняться по оси Oy, и наоборот.

в) Скорость центра масс в замкнутой системе с течением времени не изменяется.

г) В системе отсчета, связанной с центром масс замкнутой системы частиц, их суммарный импульс равен нулю:

$$\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i = 0,$$

где $\vec{v}_i$ — скорость частиц относительно центра масс.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

1. Основная задача динамики материальной точки состоит в том, чтобы найти законы движения точки, зная приложенные к ней силы, или, наоборот, по известным законам движения определить силы, действующие на эту точку.

Задачи механики о движении материальной точки, требующие применения законов Ньютона, решают в следующей последовательности:

а) Представив по условию задачи физический процесс, следует сделать схематический чертеж и указать на нем все кинематические характеристики движения, о которых говорится в задаче. При этом, если возможно, обязательно изобразить вектор ускорения.

б) Расставить все силы, приложенные к движущейся материальной точке, в текущий (произвольный) момент времени. Материальную точку нужно при этом изображать отдельно от