замкнутой системы при любых изменениях, происходящих в этой системе, остается одним и тем же.

Если $\sum \vec{F} = 0$, то согласно (2.14) $\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = 0$, т. е. в замкнутой системе

$$\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_C = \text{const}. \tag{2.18}$$

Для практически наиболее распространенного случая — взаимодействия двух изолированных частиц закон сохранения импульса дает:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1'\vec{v}_1' + m_2'\vec{v}_2'. \tag{2.18$'$}$$

Из закона сохранения импульса системы следует:

а) Импульсы отдельных частиц, входящих в изолированную систему, могут изменяться под действием внутренних сил, но в сумме эти изменения равны нулю.

б) Поскольку векторному уравнению (2.18) соответствуют два скалярных уравнения для проекций векторов импульсов частиц (если векторы расположены в одной плоскости), то закон сохранения импульса может выполняться по отдельным осям, вдоль которых сумма проекций сил равна нулю. Иными словами, закон сохранения импульса может выполняться по оси Ox и при этом не выполняться по оси Oy, и наоборот.

в) Скорость центра масс в замкнутой системе с течением времени не изменяется.

г) В системе отсчета, связанной с центром масс замкнутой системы частиц, их суммарный импульс равен нулю:

$$\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i = 0,$$

где $\vec{v}_i$ — скорость частиц относительно центра масс.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

1. Основная задача динамики материальной точки состоит в том, чтобы найти законы движения точки, зная приложенные к ней силы, или, наоборот, по известным законам движения определить силы, действующие на эту точку.

Задачи механики о движении материальной точки, требующие применения законов Ньютона, решают в следующей последовательности:

а) Представив по условию задачи физический процесс, следует сделать схематический чертеж и указать на нем все кинематические характеристики движения, о которых говорится в задаче. При этом, если возможно, обязательно изобразить вектор ускорения.

б) Расставить все силы, приложенные к движущейся материальной точке, в текущий (произвольный) момент времени. Материальную точку нужно при этом изображать отдельно от связей, заменив их действие силами. (Связями в механике называют тела, нити, опоры, подставки и т. д, ограничивающие свободу движения рассматриваемого тела.)

в) Следует помнить, что, говоря о движении какого-либо тела, например поезда, самолета, автомобиля и т. д., мы подразумеваем под этим движение материальной точки. Расставляя силы, приложенные к телу, необходимо все время руководствоваться третьим законом Ньютона, помня, что силы могут действовать на это тело только со стороны каких-то других тел: со стороны Земли это будет сила тяжести, равная $m\vec{g}$, со стороны нити — сила натяжения $\vec{T}$, со стороны поверхности — силы нормальной реакции $\vec{N}$ и трения $\vec{F}_{тр}$. К данному телу всегда приложено столько сил, сколько имеется других взаимодействующих с ним тел.

Полезно также иметь в виду и то обстоятельство, что для тел, расположенных вблизи поверхности Земли, надо учитывать только силу тяжести и силы, возникающие в местах непосредственного соприкосновения тел.

Силы притяжения, действующие между отдельными телами, настолько малы по сравнению с силой земного притяжения, что во всех задачах, где нет специальных оговорок, ими пренебрегают.

г) Расставив силы, приложенные к материальной точке, необходимо составить основное уравнение динамики:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = m\vec{a} \text{ —}$$

основную расчетную формулу.

Чтобы найти связь между модулями векторных величин, входящих в это уравнение, можно поступить двояко. Пользуясь правилом параллелограмма и теоремой косинусов, находят равнодействующую заданных сил (ее модуль и направление) и, спроецировав ее на направление ускорения тела (оно всегда совпадает с направлением равнодействующей $\vec{F}$), записывают уравнение второго закона Ньютона для модулей векторов $\vec{F}$ и $\vec{a}$:

$$|\sum \vec{F}_i| = F = ma.$$

Такой метод расчета в задачах динамики точки удобно использовать, когда на тело действуют силы по одной прямой или когда для нахождения равнодействующей достаточно использовать теорему косинусов только один раз. Если же эти условия не выполняются, выгоднее поступать так: движение частиц на плоскости описывать двумя скалярными уравнениями — уравнениями второго закона Ньютона в проекциях по осям. Для этого все силы, приложенные к частице, и ее ускорение нужно спроецировать на касательную к траектории движения (ось Ox) и нормаль к траектории (ось Oy), найти проекции F_x, F_y, a_x и a_y и затем составить основное уравнение динамики точки для проекций:

$$\sum F_x = ma_x; \quad \sum F_y = ma_y.$$

Положительное направление осей удобно выбирать так, чтобы оно совпадало с направлением ускорения частицы. При указанном выборе осей легко устанавливать, какие из приложенных сил (или их составляющие) влияют на модуль вектора скорости, какие — на направление.

Само собой разумеется, что, если все силы действуют по одной прямой, уравнение динамики в проекциях записывается только для одной оси.

При наличии трения силу трения, входящую в уравнение динамики, нужно сразу же представить через коэффициент трения и силу нормального давления, если известно, что тело скользит по поверхности или находится на грани скольжения. В противном случае пользоваться формулой (2.9) нельзя.

д) Составив основное уравнение динамики и, если можно, упростив его (проведя возможные сокращения), необходимо еще раз прочитать задачу и определить число неизвестных в уравнении. Если число неизвестных оказывается больше числа уравнений динамики, то недостающие соотношения между величинами, фигурирующими в задаче, составляют на основании формул кинематики, законов сохранения импульса и энергии. После того как получена полная система уравнений, можно приступать к ее решению относительно искомого неизвестного.

2. Выписав числовые значения заданных величин в единицах СИ и подставив их в окончательную формулу, прежде чем делать арифметический подсчет, нужно проверить правильность решения методом сокращения наименований. В задачах динамики, особенно там, где ответ получается в виде сложной формулы, этого правила в начальной стадии обучения желательно придерживаться всегда.

3. Задачи на динамику движения материальной точки по окружности можно разделить на две группы.

Первая группа включает задачи о равномерном движении точки по окружности. Задачи такого типа решают только на основании законов Ньютона и формул кинематики с тем же порядком действий, о котором говорилось в п. 1, но только уравнение второго закона динамики здесь нужно записывать в форме

$$|\sum \vec{F}_i| = m\frac{v^2}{R} \quad \text{или} \quad |\sum \vec{F}_i| = m\omega^2 R.$$

Следует при этом помнить, что вектор суммы всех сил, приложенных к частице, направлен по радиусу к центру окружности. Для нахождения этой суммы можно или воспользоваться правилом параллелограмма и, складывая силы попарно, выразить ее через заданные величины, или спроецировать предварительно все силы по линии радиуса и линии, ей перпендикулярной, а затем найти сумму проекций по R, которая и будет равна модулю искомой суммы действующих сил.

Вторую группу составляют задачи о неравномерном движении, когда по условию задачи точка переходит по дуге окружности с одного уровня на другой. Решение этих задач требует применения не только законов Ньютона, но и закона сохранения энергии. На нескольких примерах мы покажем, как нужно решать такие задачи.

4. Задачи на применение второго закона Ньютона в общем виде:

$$\vec{F}\Delta t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1,$$

где $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$; $\vec{p}_2 = m\vec{v}_2$, встречаются сравнительно редко. Как правило, это задачи на соударение тел. При решении таких задач и составлении исходного уравнения особое внимание следует обращать на векторный характер величин, входящих во второй закон динамики.

Общая схема решения задач этого типа такова:

а) Проанализировав условие задачи, нужно сделать чертеж с указанием векторов начального $\vec{p}_1$ и конечного $\vec{p}_2$ импульсов частицы, а также вектора импульса силы $\vec{F}\Delta t$.

б) Записать уравнение второго закона Ньютона, обращая внимание на то, что вектор импульса силы всегда равен геометрической разности векторов импульсов частиц и, стало быть, вектор $\vec{p}_2$ должен являться диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{F}\Delta t$ и $\vec{p}_1$. Это обстоятельство полезно иметь в виду и при выполнении чертежа.

Далее можно перейти от векторной записи основного уравнения к скалярной. Пользуясь теоремой косинусов, легко установить, что в общем случае связь между модулями векторов импульсов частицы и модулем вектора импульса силы дается соотношением

$$(F\Delta t)^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\alpha,$$

где α — угол между векторами $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$.

в) Затем, как обычно, следует записать математически все дополнительные условия задачи и решить полученную систему уравнений относительно искомого неизвестного.

5. Курс элементарной механики включает задачи динамики системы материальных точек, к которым прежде всего относятся задачи о поступательном движении связанных друг с другом тел и задачи на закон сохранения импульса.

Задачи о движении системы связанных материальных точек (например, движение грузов на блоке) можно свести к задаче динамики отдельной материальной точки. Для этого нужно изобразить силы, действующие на каждую материальную точку системы, и составить для нее уравнение второго закона динамики в проекциях. Сами тела, как обычно, следует рассматривать при этом отдельно, свободными от всяких связей, заменяя действие связей силами.

Составив уравнение динамики для каждой материальной точки, мы получим систему уравнений, в которую искомая величина входит одним из неизвестных. Если число неизвестных больше числа уравнений динамики, к ним добавляют формулы кинематики. После этого дальнейшее решение задачи сводится к математическим выкладкам и числовым расчетам. Указанный способ решения следует применять в тех случаях, когда по условию задачи необходимо определить силы, действующие между отдельными телами заданной системы, или когда тела имеют разные ускорения.

В задачах на систему материальных точек возможны случаи, когда движущиеся тела взаимодействуют друг с другом трением и силы трения увеличивают скорость тел. Перед тем как расшифровать силы трения с помощью формулы (2.9), здесь нужно проанализировать условие задачи и установить, находятся ли соприкасающиеся тела на грани скольжения или нет.

Если по смыслу задачи все тела, принадлежащие к данной системе, имеют одинаковые ускорения и о внутренних силах в условии не спрашивается и они не заданы, основное уравнение динамики можно составлять сразу для всей системы материальных точек, участвующих в движении, не рассматривая тела в отдельности. При составлении уравнения в этом случае необходимо:

а) Расставить внешние силы, действующие на систему. Ими, как правило, являются сила тяжести $m\vec{g}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$ и различного рода силы тяги. Силы, действующие между отдельными телами движущейся системы ($\vec{T}$ и $\vec{N}$), к внешним не относятся и в решении не используются.

б) Составить основное уравнение динамики для системы материальных точек или в форме $\sum\vec{F}=\vec{a}\sum m$, или в проекциях $\sum F_x=a_x\sum m$ и $\sum F_y=a_y\sum m$, выбрав предварительно оси координат и спроецировав на них все внешние силы.

в) Добавить при необходимости к составленному уравнению (уравнениям) формулы кинематики и решить уравнения совместно относительно искомой величины.

В общем случае, если тела, входящие в данную систему, обладают одинаковым ускорением, для составления уравнений динамики систему следует «разрезать» только в тех местах, где по условию задачи требуется определить внутренние силы.

После этого нужно расставлять силы, действующие на каждую из полученных частей системы, и рассматривать их движение по отдельности.

6. Закон сохранения импульса связывает начальные и конечные значения импульсов, изменяющихся под действием внутренних сил системы тел. В формулу этого закона не входят силы взаимодействия, мы можем их полностью игнорировать, и поэтому закон сохранения импульса удобно использовать в таких задачах динамики, в которых силы меняются с течением времени по сложным законам или эти законы вообще неизвестны.

Задачи, требующие применения закона сохранения импульса, включают задачи о разрыве одного тела на части (или, наоборот, о соединении нескольких тел в одно), задачи на удар и задачи о движении одних тел по поверхности других в полностью или частично изолированной системе. Решая такие задачи, удобно придерживаться следующих правил:

а) Прежде всего нужно установить, является ли рассматриваемая система тел изолированной полностью или же эта система изолирована по какому-либо одному направлению. Следует при этом иметь в виду, что если в системе происходит быстрое изменение импульсов, вызванное взаимодействием тел (удар, взрыв и т. д.), продолжительность взаимодействия считается бесконечно малой. Это упрощающее предположение, хотя оно часто и не оговаривается, позволяет применять закон сохранения импульсов даже в тех случаях, когда на систему действуют внешние силы. Импульс этих сил за ничтожно малое время взаимодействия тел будет тоже ничтожно мал и практически не повлияет на скорость тел. Именно по этой причине не учитывается действие силы тяжести и силы сопротивления на тела, находящиеся у поверхности Земли, при их столкновениях или разрывах.

Такое предположение эквивалентно тому, что при разрывах и соударениях тел в неизолированных системах мы обычно считаем, что внутренние силы системы намного превосходят внешние и поэтому изменение импульса тел в этих процессах практически обусловлено лишь действием внутренних сил. Изменение импульса тел под действием внешних сил за время быстрых процессов не учитывается. Как в первом, так и во втором случаях при решении задач на закон сохранения импульсов предполагается, что в процессе быстрого взаимодействия тела не успевают заметно сместиться и, следовательно, их скорости изменяются в данной точке пространства мгновенно.

б) Сделать чертеж, на котором для каждого тела системы изобразить векторы импульса в начале и в конце рассматриваемого процесса.

в) Выбрать прямоугольную систему координат и спроецировать на оси Ox и Oy каждый вектор импульса $\vec{p}$.

Оси координат удобно выбирать так, чтобы большинство проекций импульсов было равно нулю и чтобы по крайней мере вдоль одной из осей система была изолированной. В тех случаях, когда векторы $\vec{p}$ направлены по одной прямой и внешние силы вдоль нее не действуют или в сумме равны нулю, следует выбирать только одну ось Ox и, установив на ней положительное направление, находить проекции только на эту ось.

г) Составить уравнение закона сохранения импульса частиц в проекциях на оси Ox и Oy или в форме уравнений

$$\sum p_{ix} - \sum p'_{ix} = 0 \quad \text{и} \quad \sum p_{iy} - \sum p'_{iy} = 0,$$

или, что делают чаще, в форме равенств

$$\sum p_{ix} = \sum p'_{ix} \quad \text{и} \quad \sum p_{iy} = \sum p'_{iy},$$

где p_{ix}, p'_{ix}, ...— проекции векторов импульсов тел соответственно до и после изменения.

Составляя эти уравнения, нужно внимательно следить за знаками проекций векторов. Если направление вектора $\vec{p}_i$ совпадает с положительным направлением координатной оси или образует с ней острый угол, то проекция импульса имеет знак «плюс», если нет, то знак «минус».

д) Затем, как обычно, необходимо выписать численные значения заданных величин, определить число неизвестных в уравнениях закона сохранения импульсов, добавить к ним, если неизвестных больше числа уравнений, формулы кинематики и решить полученную систему относительно искомой величины.

В заключение отметим, что при составлении уравнения закона сохранения импульса скорости тел и их изменения рассматриваются относительно неподвижной системы отсчета, связанной с Землей.

Если в задаче дана скорость тел относительно друг друга, то абсолютную скорость движения нужно представить как векторную сумму относительной и переносной скоростей.

Пример 1. На концах нити, переброшенной через блок, висят на одинаковой высоте две гирьки массой по $m_1 = 96$ г каждая. Если на одну из гирек положить перегрузок, вся система придет в движение и через $t = 3$ с расстояние между гирьками станет равным $h = 1{,}8$ м. Определите ускорение тел, массу m_2 перегрузка, силу натяжения нити $\vec{T}$, силу давления $\vec{N}$ перегрузка на гирьку при движении и силу давления N_1 на ось блока. Нить можно считать невесомой и нерастяжимой, массой блока пренебречь, трение в блоке не учитывать.

Решение. В задаче надо определить все внутренние силы, действующие между отдельными телами системы. Согласно сказанному в п. 5 систему следует мысленно «разрезать» на части в тех местах, где нужно найти эти силы, заменить действие связей силами и рассмотреть движение каждого тела отдельно. В результате задача сведется к задаче динамики материальной точки.

Почти во всех задачах о движении грузов на блоках делается ряд упрощающих предположений, которые намного облегчают решение. В них, если нет специальных оговорок, предполагается, что нить, связывающая грузы, невесома, нерастяжима и трение на блоке отсутствует.

Пренебрегая массой нити по сравнению с массой грузов, можно принять (с большой степенью точности) их движение за равноускоренное. Если не учитывать растяжение нити, можно считать, что в каждый момент времени грузы на ее концах имеют одинаковые по модулю ускорения.

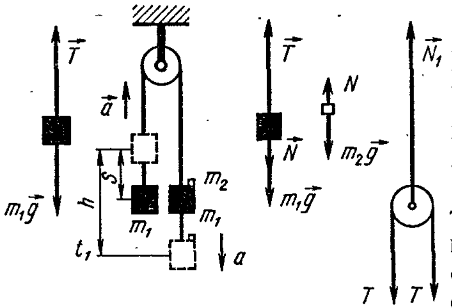

Рис. 2.1

Условие об отсутствии трения на блоке позволяет считать равными силы натяжения нити в любом ее сечении (конечно, при условии, что ее масса ничтожно мала).

Делаем схематический чертеж (рис. 2.1). Изображаем каждое тело отдельно и расставляем приложенные к нему силы. На левую гирьку со стороны Земли действует сила тяжести, равная $m_1\vec{g}$, со стороны нити — сила натяжения нити $\vec{T}$. По условию задачи под действием приложенных сил эта гирька поднимается вверх с ускорением $\vec{a}$, поэтому $T > m_1 g$. Проецируя силы и ускорение на ось, направленную так же, как ускорение гирьки, составляем уравнение второго закона Ньютона в проекциях:

$$T - m_1 g = m_1 a. \qquad (1)$$

На перегрузок действует со стороны Земли сила тяжести, равная $m_2\vec{g}$, и со стороны нижней гирьки нормальная реакция опоры $\vec{N}$. Под действием приложенных сил перегрузок движется вниз с ускорением $\vec{a}$, поэтому $m_2 g > N$. Проецируя силы и ускорение на ось, направленную так же, как ускорение перегрузка, составляем уравнение второго закона Ньютона в проекциях:

$$m_2 g - N = m_2 a. \qquad (2)$$

(Обратите внимание: положительное направление оси каждого из рассматриваемых тел системы разное. Его удобно выбирать в направлении вектора ускорения тел.)

На правую гирьку действуют: сила тяжести, равная $m_1\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила нормального давления $\vec{N}$ перегрузка, численно равная силе, действующей со стороны гири на перегрузок. (Здесь часто допускают ошибку, считая, что сверху на гирю действует не сила нормального давления $\vec{N}$, а сила тяжести перегрузка, равная $m_2 g$.) Под действием приложенных сил правая гирька опускается вниз с ускорением $\vec{a}$, поэтому $(m_1 g + N) > T$.

Проецируя силы и ускорение на ось, направленную так же, как ускорение этой гирьки, составляем уравнение второго закона Ньютона в проекциях:

$$m_1 g + N - T = m_1 a. \qquad (3)$$

На блок действуют силы натяжения нити $\vec{T}$ (вниз) и нормальная реакция опоры $\vec{N}_1$ со стороны оси (вверх). Под действием этих сил блок находится в равновесии, его ускорение равно нулю ($a = 0$); следовательно,

$$2T - N_1 = 0. \qquad (4)$$

Наконец, используя заданные характеристики движения, составляем кинематическое уравнение для одной из гирек, учитывая, что за указанное время каждая из них проходит расстояние, вдвое меньшее h:

$$\frac{h}{2}=\frac{at^2}{2}. \qquad (5)$$

Система уравнений (1) — (5) содержит пять неизвестных: a, m_2, T, N и N_1, которые нам требуется найти.

Решая уравнения (1) — (5) совместно относительно этих величин и подставляя числовые значения, получим:

$$a=\frac{h}{t^2}=0{,}2 \text{ м/с}^2; \quad m_2=\frac{2m_1a}{g-a}=4\cdot10^{-3} \text{ кг};$$
$$T=m_1(g+a)=0{,}96 \text{ Н}; \quad N=2m_1a=3{,}8\cdot10^{-3} \text{ Н};$$
$$N_1=2T\approx 1{,}9 \text{ Н}.$$

Пример 2. На столе лежит кубик массой m. К кубику прикреплена идеально гладкая цепочка, свешивающаяся со стола. К свободному концу цепочки подвешен грузик массой $4m$. Предоставленная самой себе, система приходит в ускоренное движение. Определите натяжение в середине цепочки в тот момент, когда со стола свисает 2/3 цепочки. Коэффициент трения между кубиком и поверхностью стола равен μ, масса цепочки M.

Решение. По условию задачи нужно определить внутреннюю силу, действующую во время движения между половинками цепочки, поэтому систему нужно «разрезать» в середине цепочки и рассмотреть движение каждой из образовавшихся частей системы отдельно.

Делаем схематический чертеж (рис. 2.2, *а*), указываем на нем вектор ускорения $\vec{a}$ в тот момент, когда со стола свешивается 2/3 цепочки. Движение системы будет неравномерно ускоренным с возрастающим ускорением, поскольку за счет перемещения цепочки сила тяги в направлении движения возрастает.

Рисуем обе части системы отдельно и расставляем приложенные к ним внешние силы (рис. 2.2,*б*). На кубик и верхнюю половину цепочки действуют сила тяжести кубика, равная $m\vec{g}$, сила тяжести горизонтальной части цепочки, равная $\frac{\vec{Q}}{3}$ (здесь $\vec{Q}=M\vec{g}$), сила тяжести свисающей части цепочки, равная $\frac{\vec{Q}}{6}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$, реакции стола $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, сила натяжения $\vec{T}$ (со стороны нижней половины цепочки). Под действием этих сил кубик и половина цепочки имеют в рассматриваемый момент времени ускорение $\vec{a}$, направленное в сторону движения. Согласно второму закону динамики для этой части системы будем иметь:

$$T+\frac{Mg}{6}-F_{тр}=\left(m+\frac{M}{2}\right)a.$$

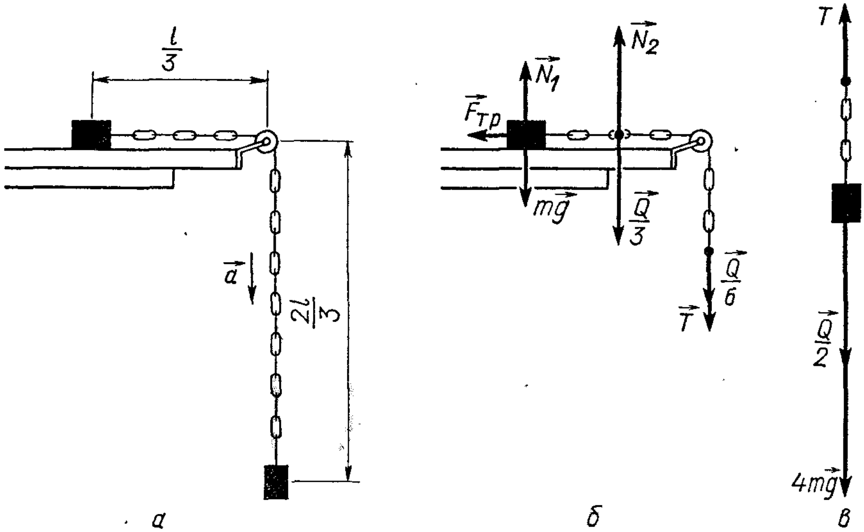

Рис. 2.2

Если задан коэффициент трения (или его надо найти), то силу трения необходимо представить в развернутом виде: $F_{тр} = \mu N_1 = \mu mg$ (поскольку в данном случае $N_1 = mg$) — и переписать основное уравнение более подробно:

$$T + \frac{Mg}{6} - \mu mg = \left(m + \frac{M}{2}\right) a. \qquad (1)$$

К грузу и второй половине цепочки приложены силы тяжести, равные соответственно $4m\vec{g}$ и $\frac{\vec{Q}}{2}$, и сила натяжения $\vec{T}$, действующая со стороны верхней половины цепочки. По условию задачи эта часть рассматриваемой системы опускается вниз с ускорением $\vec{a}$, поэтому, проецируя силы и ускорение на ось, направленную так же, как ускорение, уравнение второго закона Ньютона в проекциях запишем так:

$$4mg + \frac{Mg}{2} - T = \left(4m + \frac{M}{2}\right) a. \qquad (2)$$

Система уравнений (1) — (2) содержит две неизвестные величины a и T. Решая их совместно относительно искомого неизвестного — силы натяжения, действующей в середине цепочки, получаем:

$$T = \frac{(8m + M)(3m + M + 3\mu m)}{30m + 6M}.$$

Пример 3. На наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30°$, находится груз массой $m_2 = 2$ кг (рис. 2.3,*а*). К грузу привязан легкий шнур, перекинутый через блок, укрепленный на вершине наклонной плоскости. К другому концу шнура подвешена гиря массой $m_1 = 20$ кг. Предоставленная самой себе, система приходит в равноускоренное движение. Определите ускорение грузов и силу давления на ось блока при условии, что коэффициент трения между грузом и плоскостью равен $\mu = 0{,}1$. Массу блока не учитывать.

Решение. В задачах о движении тел по наклонной плоскости рекомендуется прежде всего установить направление движения. Для этого необходимо расставить все внешние силы, действующие на систему грузов в целом, и, спроецировав их на линию скорости и перпендикуляр к ней, определить направление ускорения. Можно легко доказать, что в данном примере гиря будет опускаться, а груз подниматься по наклонной плоскости.

а) Рассмотрим движение каждого тела отдельно. На гирю действуют сила тяжести, равная $m_1\vec{g}$, и сила натяжения шнура $\vec{T}$. Поскольку гиря опускается ускоренно, то

$$m_1 g - T = m_1 a. \qquad (1)$$

б) На груз действуют сила тяжести, равная $m_2\vec{g}$, сила натяжения шнура $\vec{T}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$ и нормальная реакция опоры $\vec{N}$ (рис. 2.3, *б*).

Чтобы составить основное уравнение динамики для груза и выявить причины изменения модуля и направления вектора скорости, выбираем систему отсчета — наклонную плоскость и связанную с ней прямоугольную систему координат. Ось Ox направим вдоль наклонной плоскости в сторону движения груза, ось Oy — перпендикулярно наклонной плоскости.

Находим проекции сил на оси Ox и Oy. Они равны соответственно $-m_2 g \sin\alpha$, T, $-F_{тр}$, 0, $-m_2 g \cos\alpha$, 0, 0, N.

Под действием приложенных сил груз массой m_2 ускоренно поднимается по наклонной плоскости, поэтому основное уравне-

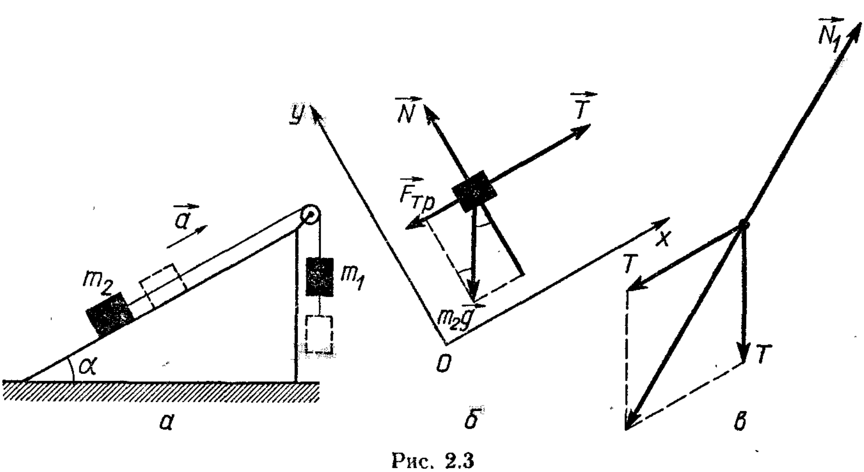

Рис. 2.3

ние динамики в проекциях на ось Ox имеет вид:

$$T - m_2 g \sin\alpha - F_{\text{тр}} = m_2 a, \qquad (2)$$

или

$$T - m_2 g \sin\alpha - \mu N = m_2 a.$$

В направлении, перпендикулярном наклонной плоскости, скорость груза не изменяется, поэтому на основании второго закона Ньютона можно записать:

$$N - m_2 g \cos\alpha = 0. \qquad (3)$$

При составлении основного уравнения динамики для груза, находящегося на наклонной плоскости, можно поступить так. Зная, что ускорение $\vec{a}$ груза, а стало быть, и равнодействующая приложенных сил направлены вверх по наклонной плоскости, можно было бы найти модуль суммы сил $m_2\vec{g}$, $\vec{T}$, $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$ их попарным сложением и приравнять его произведению $m_2 a$. Иными словами, мы могли бы представить основное уравнение динамики в векторном виде:

$$m_2\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = m_2\vec{a},$$

и искать попарным сложением выражение для модуля суммы, стоящей в левой части равенства. Получился бы точно такой же результат, что и при проецировании сил. Однако этот прием требует большего времени, поскольку в данном случае на груз действует сравнительно много сил.

Так как по условию задачи масса блока не учитывается, то можно считать, что на него действуют только две силы натяжения $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ со стороны шнура ($T_1 = T_2 = T$) и нормальная реакция опоры $\vec{N}_1$ со стороны оси (рис. 2.3, *в*). Согласно третьему закону Ньютона блок действует на ось с такой же по модулю силой, но направленной в противоположную сторону. Эту силу нам нужно определить.

Под действием приложенных сил блок находится в равновесии: его ускорение равно нулю. Согласно второму закону динамики должно быть:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{N}_1 = 0.$$

Здесь, как и раньше, мы могли бы спроецировать силы на какие-либо две оси и записать уравнение динамики в проекциях с учетом того, что $a = 0$. Однако в данном случае условие равновесия проще представить в векторном виде и сразу перейти от него к скалярной записи, сложив предварительно силы натяжения по правилу параллелограмма. Как видно из чертежа, диагональ параллелограмма равна:

$$|\vec{T}_1 + \vec{T}_2| = 2T\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$$

и, стало быть, уравнение равновесия блока в скалярной форме с учетом направления векторов можно записать так:

$$2T\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - N_1 = 0. \qquad (4)$$

Система уравнений (1) — (4) содержит четыре неизвестные величины: T, a, N и N_1. Решая систему относительно a и N_1, найдем:

$$a = \frac{m_1 - m_2 \sin\alpha - \mu m_2 \cos\alpha}{m_1 + m_2} g; \quad a \approx 4 \text{ м/с}^2;$$

$$N_1 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g (1 + \sin\alpha + \mu\cos\alpha)\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$N_1 = 202 \text{ Н}.$$

Пример 4. К концам легкой нити, перекинутой через блок, укрепленный на динамометре, подвешены два груза массами $m_1 = 0{,}1$ кг и $m_2 = 0{,}2$ кг. Определите ускорение грузов, натяжение нити и показание динамометра при условии, что блок вместе с грузами поднимается на динамометре вверх с ускорением $a_п = 1{,}2$ м/с^2. Массой блока и динамометра пренебречь.

Р е ш е н и е. Решение задач динамики, в которых тела одновременно участвуют в двух ускоренных движениях — относительном и переносном, принципиально ничем не отличается от только что рассмотренных. Особое внимание здесь нужно обратить на то, что в основном уравнении динамики точки под $\vec{a}$ всегда подразумевается полное (абсолютное) ускорение относительно неподвижного тела отсчета — Земли и его приходится представлять как сумму относительного и переносного ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_о + \vec{a}_п.$$

Если в сложном движении участвуют не одно, а несколько тел (как, например, в данной задаче), то независимо от того, требуется или нет определять внутренние силы системы, движение каждого тела необходимо рассматривать отдельно, поскольку они имеют разные абсолютные ускорения.

В данной задаче грузы перемещаются относительно блока (относительное движение) и одновременно с этим поднимаются вверх вместе с блоком (переносное движение). Делаем схематический чертеж (рис. 2.4), где прежде всего проставляем векторы относительного ускорения $\vec{a}_о$ и переносного $\vec{a}_п$.

На левый груз действуют сила тяжести, равная $m_1\vec{g}$, и сила натяжения нити $\vec{T}$. Под действием этих сил груз движется вертикально вверх с некоторым ускорением $\vec{a}_1$ относительно неподвижного тела отсчета — Земли, поэтому

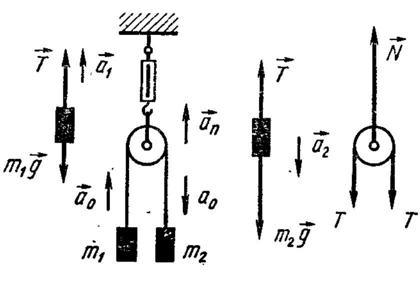

Рис. 2.4

$$T - m_1 g = m_1 a_1. \qquad (1)$$

Модуль ускорения $\vec{a}_1$ связан с модулем относительного $\vec{a}_о$ и переносного $\vec{a}_п$ ускорений соотношением

$$a_1 = a_о + a_п, \qquad (2)$$

поскольку оба эти ускорения направлены вверх.

На правый груз также действуют две силы: $m_2\vec{g}$ и $\vec{T}$, однако сразу установить, какая из них больше, какая меньше, и определить тем самым направление полного ускорения $\vec{a}_2$ этого груза нельзя. В зависимости от значений величин $m_1 g$ и $m_2 g$ при заданном a бо́льший груз может им ть относительно Земли ускорение, направленное или вверх (при $T > m_2 g$), или вниз (если $T < m_2 g$), или даже находиться в состоянии покоя (при $T = m_2 g$).

Предположим, что направление полного ускорения $\vec{a}_2$ совпадает с направлением относительного движения, т. е. $m_2 g > T$ и вектор $\vec{a}_2$ направлен вниз (груз опускается, приближаясь к земле). Тогда основное уравнение динамики в проекциях на ось, направленную в сторону предполагаемого движения этого груза, будет иметь вид:

$$m_2 g - T = m_2 a_2. \qquad (3)$$

При нашей договоренности о направлении $\vec{a}_2$ относительное ускорение должно быть больше переносного ($a_о > a_п$), и, следовательно,

$$a_2 = a_о - a_п. \qquad (4)$$

Блок взаимодействует с тремя телами: Землей, динамометром и нитью. Основное уравнение динамики (при условии, что масса блока ничтожно мала) дает:

$$N - 2T = 0. \qquad (5)$$

Решая уравнения (1) — (5) совместно относительно искомых неизвестных (a_1, a_2, T и N), находим:

$$a_1 = \frac{(m_2 - m_1) g - 2m_2 a_п}{m_1 - m_2}; \quad a_1 = 4{,}87\ \text{м/с}^2;$$

$$a_2 = \frac{(m_2 - m_1) g - 2m_1 a_п}{m_1 + m_2}; \quad a_2 = 2{,}47\ \text{м/с}^2;$$

$$T = \frac{2m_1 m_2 (g + a_п)}{m_1 + m_2}; \quad T = 1{,}47\ \text{Н};$$

$$N = 2T = 2{,}94\ \text{Н}.$$

При подстановке числовых значений в формулу, полученную для ускорения a_2, оно получилось положительным. Это значит, что мы выбрали правильное направление ускорения — груз массой m_2 движется вниз.

Пример 5. Грузы массами $m = 9{,}8$ кг и $2\,m$ связаны легкой нитью, переброшенной через блок, укрепленный на краю горизонтальной плоскости (рис. 2.5). Система находится в равновесии на грани скольжения. Каково будет ускорение большего груза и натяжение нити, если плоскость начнет двигаться в горизонтальном направлении с ускорением $a = 3$ м/с^2?

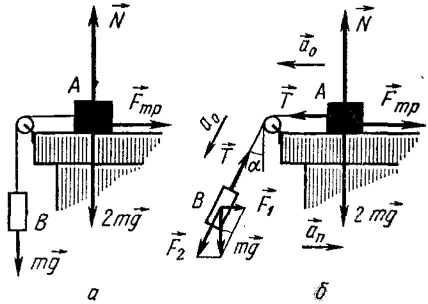

Рис. 2.5

Решение. Прежде чем приступить к непосредственному решению задачи, необходимо выяснить, как будут двигаться грузы при ускоренном движении плоскости.

Так как взаимодействие груза с плоскостью в горизонтальном направлении осуществляется только за счет трения, самая большая сила, с которой плоскость может действовать на груз вдоль поверхности соприкосновения, равна максимальной силе трения покоя μN. Именно с этой силой плоскость и действует на груз A в сторону, противоположную направлению его возможного движения, т. е. вправо, когда груз находится на грани скольжения. Если к плоскости приложить некоторую силу и сообщить плоскости вправо ускорение $\vec{a}$, то она не сможет увлечь за собой груз A с ускорением $\vec{a}$, поскольку сила взаимодействия между ними уже имела максимальное значение, равное μN, и при неизменных μ и N увеличиться не может. В результате груз A начнет перемещаться относительно плоскости с некоторым ускорением $\vec{a}_0$, направленным противоположно $\vec{a}$. Как только груз A придет в движение относительно плоскости, груз B станет опускаться.

Относительно неподвижной системы отсчета (например, поверхности Земли) каждый груз будет участвовать в сложном движении, которое можно представить как результат двух равноускоренных перемещений — движения вместе с плоскостью относительно Земли с ускорением $\vec{a} \equiv \vec{a}_п$ (переносное движение) и движения относительно самой плоскости с ускорением $\vec{a}_0$ (относительное движение). Полное ускорение каждого груза по отношению к Земле равно векторной сумме ускорений $\vec{a}_п$ и $\vec{a}_0$.

Делаем схематический чертеж для двух состояний системы: когда она находится на грани скольжения (рис. 2.5, *а*) и когда ей сообщено переносное ускорение (рис. 2.5, *б*). Изображаем векторы переносного $\vec{a}_п$ и относительного $\vec{a}_0$ ускорений и действующие силы. В первом случае систему рассматриваем целиком, во втором — «разрезаем» на части, поскольку требуется определить внутреннюю силу (силу натяжения) и, кроме того, полные ускорения грузов неодинаковы.

В первом случае ускорение системы равно нулю, и основное уравнение динамики в скалярной форме дает для нее:

$$mg - F_{\text{тр}} = 0,$$

или, учитывая, что $F_{\text{тр}} = \mu N$, а $N = 2mg$, будем иметь $mg - \mu 2mg = 0$, откуда $\mu = 0{,}5$.

Условие о нахождении груза на грани скольжения является вспомогательным; оно позволяет определить коэффициент трения скольжения, который понадобится в дальнейшем.

Рассмотрим второй случай. На груз A действует сила тяжести, равная $2m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$, сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и нормальная реакция $\vec{N}$. Предположим, что $T > F_{\text{тр}}$ и вектор полного ускорения этого груза $\vec{a}_1$ направлен к блоку. Выберем систему отсчета, жестко связанную с Землей, и направим ось Ox вдоль поверхности стола, ось Oy по нормали к ней. Проецируя силы на выбранные оси, составляем основное уравнение динамики для груза A в проекциях. По оси Ox будем иметь: $T - F_{\text{тр}} = 2ma_1$ или $T - \mu N = 2ma_1$. По оси Oy: $N - 2mg = 0$. Таким образом,

$$T - \mu 2mg = 2ma_1. \tag{1}$$

Так как мы считаем, что вектор $\vec{a}_1$ направлен к блоку, то относительное ускорение должно быть больше переносного, т. е.

$$a_1 = a_0 - a. \tag{2}$$

На груз B действуют сила тяжести, равная $m\vec{g}$, и сила натяжения нити $\vec{T}$, направленная под некоторым углом α к вертикали. Под действием приложенных сил груз одновременно участвует в двух равноускоренных движениях: переносном (вместе со всей системой) и относительном (вдоль направления нити). Ускорения в этих движениях равны соответственно $\vec{a}$ и $\vec{a}_0$. Чтобы выявить причины появления ускорений, необходимо разложить действующие силы по горизонтальному направлению и вдоль нити. В данном случае нужно разложить только силу тяжести на составляющие $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Как видно из чертежа, модули составляющих равны:

$$F_1 = mg \operatorname{tg} \alpha, \quad F_2 = mg/\cos \alpha.$$

Согласно второму закону Ньютона уравнения движения в скалярной форме для этих направлений будут иметь вид:

$$mg \operatorname{tg} \alpha = ma \tag{3}$$

и

$$mg/\cos \alpha - T = ma_0. \tag{4}$$

Из уравнения (3) следует, что $\operatorname{tg} \alpha = a/g$, т. е. угол наклона нити к вертикали при ускоренном движении точки подвеса определяется лишь горизонтальным ускорением a системы (у нас $a = a_{\text{п}}$). Этот результат имеет общий характер, и его полезно помнить.

Исключая из уравнений (1) — (4) $\operatorname{tg}\alpha$, $\cos\alpha$ и a_0 и решая их относительно искомых неизвестных a_1 и T, получаем:

$$a_1 = \frac{\sqrt{g^2+a^2} - 2\mu g - a}{3}; \quad a_1 \approx 2{,}16 \text{ м/с}^2;$$

$$T = \frac{2m\left(\sqrt{g^2+a^2} + \mu g - a\right)}{3}; \quad T \approx 10{,}1 \text{ Н}.$$

При подстановке числовых значений в формулу, полученную для ускорения a_1, оно получилось положительным. Это значит, что мы выбрали правильное направление полного ускорения большего груза — влево.

Пример 6. Брусок массой M находится на гладкой горизонтальной поверхности, по которой он может двигаться без трения. На бруске лежит маленький кубик массой m (рис. 2.6). Коэффициент трения между кубиком и бруском равен μ. При каком минимальном значении силы $\vec{F}$, приложенной к кубику, он начнет скользить по бруску? Какую скорость будет иметь брусок в тот момент, когда кубик упадет с бруска, если сила тяги будет равной $2F$? Длина бруска L.

Решение. Двигаясь в горизонтальном направлении, кубик будет увлекать за собой брусок вследствие того, что между ними есть трение. Максимальная сила, с которой кубик может действовать на брусок в направлении движения, равна максимальной силе трения покоя μN. Эта сила будет сообщать бруску некоторое предельное ускорение $\vec{a}_2$, которое при заданных μ и N увеличиваться не может. Если при этом потянуть за кубик так, чтобы сам он двигался с ускорением $a_1 > a_2$, кубик начнет обгонять брусок, скользя по его поверхности, пока не упадет с него.

1. Рассмотрим первый случай, когда тела находятся на грани проскальзывания и движутся с одинаковым ускорением. На кубик действуют сила тяжести, равная $m\vec{g}$, сила тяги $\vec{F}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}_1$ и максимальная сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$. Поскольку кубик перемещается вправо с ускорением $\vec{a}_1$, то, проецируя силы и ускорение на ось, направленную так же, как ускорение кубика, основное уравнение динамики в проекциях можно записать так:

$$F - F_{тр} = ma_1.$$

Или, учитывая, что $F_{тр} = \mu N_1$ и $N_1 = mg$, будем иметь:

$$F - \mu mg = ma_1. \qquad (1)$$

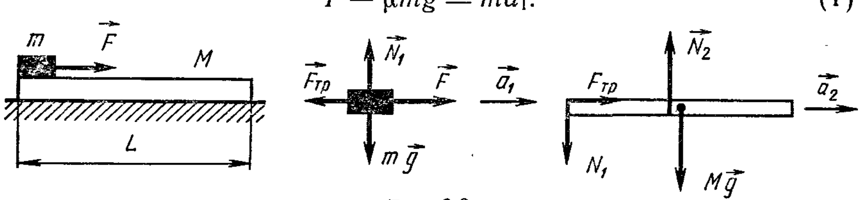

Рис. 2.6

К бруску приложена сила тяжести, равная $M\vec{g}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}_2$, сила нормального давления $\vec{N}_1$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$, действующая со стороны кубика в направлении движения и сообщающая бруску ускорение $\vec{a}_2$. Основное уравнение динамики для бруска дает:

$$F_{тр} = Ma_2 \quad \text{или} \quad \mu mg = Ma_2. \tag{2}$$

Если кубик не скользит по бруску, то независимо от того, находятся ли тела на грани скольжения или нет, их ускорения одинаковы и к составленным уравнениям нужно добавить условие:

$$a_1 = a_2. \tag{3}$$

Уравнения (1) — (3) содержат три неизвестные величины: искомую силу тяги F и ускорения a_1 и a_2. Решая уравнения относительно F, мы получим ответ на первый вопрос задачи:

$$F = \mu mg\left(1 + \frac{m}{M}\right). \tag{4}$$

2. Если сила тяги окажется больше силы F, которую мы нашли, ускорение кубика увеличится. Так как ускорение бруска при этом возрасти не может и останется равным a_2, кубик станет скользить по бруску в направлении движения бруска. За время t, в течение которого кубик находится на бруске и увлекает его за собой, брусок приобретет скорость

$$v = a_2 t. \tag{5}$$

За это же время кубик сместится относительно бруска на расстояние

$$L = \frac{(a_1 - a_2)\,t^2}{2}, \tag{6}$$

где L — длина бруска; $(a_1 - a_2)$ — ускорение кубика относительно бруска.

Чтобы найти скорость бруска в момент падения кубика, нужно совместно решить уравнения (1), (2), (4) — (6) относительно v, подставив в них вместо F силу $2F$, считая ее известной. Проведя вычисления, получим:

$$v = m\sqrt{\frac{2\mu gL}{(m + M)M}}.$$

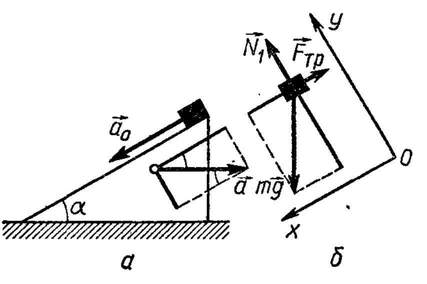

Рис. 2.7

Пример 7. Тяжелое тело находится на вершине наклонной плоскости на грани скольжения (рис. 2.7, *а*). За какое время тело спустится с наклонной плоскости, если она станет двигаться в горизонтальном направлении с ускорением $a = 0{,}5$ м/с²? Длина наклонной плоскости $l=1$ м, угол наклона ее к горизонту равен $\alpha=30°$.

Решение. В задаче рассматриваются два состояния тела: первое, когда оно находится на грани скольжения, второе — в равноускоренном движении.

Условие о нахождении тела на грани скольжения имеет вспомогательное значение. Оно позволяет определить коэффициент трения скольжения μ между телом и плоскостью.

1. Для определения μ (это самостоятельная задача) нужно составить основное уравнение динамики с учетом того, что ускорение тела равно нулю.

На тело, находящееся на наклонной плоскости, действуют сила тяжести, равная $m\vec{g}$, реакция опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Выберем систему отсчета — Землю и свяжем с ней прямоугольную систему координат. Ось Ox направим вдоль наклонной плоскости вниз, ось Oy — перпендикулярно наклонной плоскости вверх. Находим проекции сил на оси Ox и Oy. Они равны соответственно:

$$mg\sin\alpha,\quad -F_{тр},\quad -mg\cos\alpha \text{ и } N.$$

Под действием приложенных сил тело находится на наклонной плоскости в равновесии на грани скольжения, следовательно, основное уравнение динамики в проекциях на оси координат будет иметь вид:

$$mg\sin\alpha - F_{тр} = 0 \text{ и } N - mg\cos\alpha = 0, \text{ причем } F_{тр} = \mu N.$$

Решая уравнения совместно относительно коэффициента трения, находим:

$$\mu = \operatorname{tg}\alpha.$$

Полученная формула для коэффициента трения скольжения имеет место лишь для случая, когда тело равномерно скользит по наклонной плоскости или находится на грани скольжения. Если угол наклона плоскости больше или меньше предельного, пользоваться этой формулой для определения μ (или α) нельзя.

2. Сообщая горизонтальное ускорение наклонной плоскости, мы тем самым как бы вынимаем ее из-под груза и уменьшаем силу давления плоскости на груз в направлении нормали. В результате сила нормального давления $\vec{N}$, а стало быть, и сила трения, препятствующая скольжению груза по плоскости, уменьшаются: $mg\sin\alpha$ станет больше $F_{тр}$ и груз начнет перемещаться относительно плоскости с некоторым ускорением $\vec{a}_0$.

Движение груза относительно неподвижного тела отсчета (Земли) будет сложным, оно складывается из двух прямолинейных движений — переносного с ускорением $\vec{a}_п \equiv \vec{a}$ (вместе с наклонной плоскостью) и относительного с ускорением $\vec{a}_0$ вдоль наклонной плоскости.

На груз, находящийся в ускоренном движении, действуют такие же силы, что и при его равновесии: $m\vec{g}$, $\vec{N}_1$ и $\vec{F}_{тр}$ (рис. 2.7, *б*), но модули сил $\vec{N}_1$ и $\vec{F}_{тр}$ будут другими. Проецируем силы и ускорения на координатные оси Ox и Oy. Проекции сил равны соответственно $mg\sin\alpha$, $-F_{тр}$, $-mg\cos\alpha$ и N_1, проекции относительного и переносного ускорений равны a_0, 0, $-a\cos\alpha$ и $-a\sin\alpha$.

Под действием приложенных сил тело ускоренно движется вниз по наклонной плоскости (по оси Ox) с некоторым ускорением $\vec{a}_1$ относительно Земли и в направлении, перпендикулярном наклонной плоскости вместе с наклонной плоскостью с ускорением, проекция которого на ось Oy равна $-a\sin\alpha$.

Основное уравнение динамики для проекций на ось Ox имеет вид:

$$mg\sin\alpha - \mu N_1 = ma_1. \qquad (1)$$

Перемещение тела с ускорением $\vec{a}_1$ можно рассматривать как состоящее из двух: движения относительно наклонной плоскости с ускорением $\vec{a}_0$ и движения в противоположную сторону вместе с плоскостью с ускорением, модуль которого $a\cos\alpha$. Поэтому

$$a_1 = a_0 - a\cos\alpha. \qquad (2)$$

Основное уравнение динамики для проекций на ось Oy имеет вид:

$$N_1 - mg\cos\alpha = -ma\sin\alpha. \qquad (3)$$

В заключение остается записать кинематическое уравнение, обратив внимание на то, что относительно наклонной плоскости тело движется с ускорением $\vec{a}_0$:

$$l = \frac{a_0t^2}{2}. \qquad (4)$$

Уравнения (1) — (4) содержат четыре неизвестные величины: a_1, a_0, N_1 и t. Решая их совместно, для времени спуска тела с наклонной плоскости получим:

$$t = \sqrt{\frac{2l\cos\alpha}{a}}; \quad t = 1{,}87 \text{ с}.$$

Пример 8. Космический корабль, имеющий скорость $v = 10$ км/с, попадает в неподвижное облако микрометеоров. В объеме $V_0 = 1 м^3$ пространства находится $n = 1$ микрометеор. Масса каждого микрометеора $m_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ кг. На сколько должна возрасти сила тяги двигателя, чтобы скорость корабля при прохождении через облако не изменилась? Лобовое сечение корабля $S = 49$ м^2. Удар микрометеоров об обшивку корабля считать неупругим.

Решение. При движении космического корабля в облаке микрометеоров частицы получают импульс со стороны обшивки, в результате чего их скорость возрастает от 0 до скорости корабля

v, поскольку удар неупругий. Одновременно такой же импульс, как и частицы, получает корабль, но в сторону, противоположную движению. В результате скорость корабля должна уменьшаться и для ее сохранения сила тяги двигателя должна возрасти. Прирост силы тяги должен быть тем большим, чем больше изменение импульса частиц за единицу времени.

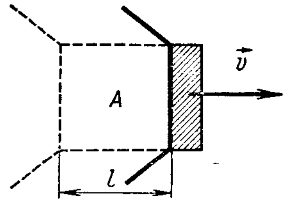

Рис. 2.8

Выделим (рис. 2.8) часть микрометеорного облака, которой был сообщен импульс за небольшой промежуток времени Δt, в течение которого движение корабля можно считать равномерным.

Если за время Δt корабль пройдет расстояние l, то импульс частиц, находящихся в объеме цилиндра A, возрастет от 0 до $m\vec{v}$, частицы станут двигаться вместе с кораблем. Это изменение импульса частиц произойдет за счет импульса силы $\vec{F}\Delta t$, действующего на выделенную часть облака со стороны обшивки корабля. Сила $\vec{F}$ будет равна при этом по модулю и направлению искомому увеличению силы тяги.

С учетом того, что вначале частицы покоились и направления векторов $\vec{F}\Delta t$ и $m\vec{v}$ совпадают, согласно второму закону Ньютона для модулей векторов будем иметь:

$$F\Delta t = mv. \qquad (1)$$

Масса частиц, увлекаемых за время Δt, равна:

$$m = \frac{nm_0}{V_0} Sl. \qquad (2)$$

При малом Δt можно с достаточной степенью точности считать, что движение на участке l равномерное, и, следовательно,

$$l = v\Delta t. \qquad (3)$$

Из уравнений (1) — (3) находим, что искомое увеличение силы тяги равно:

$$F = \frac{nm_0 Sv^2}{V_0}; \quad F \approx 100 \text{ кН}.$$

Решение задач динамики о равномерном движении материальной точки по окружности принципиально не отличается от решения только что разобранных задач. Если до этого основное внимание уделялось выявлению причин изменения модуля вектора скорости и составлению уравнения второго закона Ньютона в проекциях на соответствующие оси, то сейчас нас будут интересовать главным образом причины изменения направления вектора $\vec{v}$ и условия, при которых материальная точка находится на окружности. Задача состоит в составлении того же уравнения динамики, но ось будет направлена по радиусу окружности.

Некоторые из предлагаемых задач требуют применения закона всемирного тяготения. Обычно это задачи на движение небесных тел и искусственных спутников Земли. Их решение рекомендуется тоже начинать с составления уравнения второго закона Ньютона. Получив это уравнение, нужно представить в развернутом виде входящую в него силу тяжести с помощью закона всемирного тяготения, добавить при необходимости формулы кинематики и затем решить полученную систему уравнений совместно. Очень часто при этом приходится использовать формулу (2.11′), позволяющую исключить из уравнений массу Земли.

Пример 9. Автомобиль с двумя парами ведущих колес движется по мосту, имеющему форму дуги окружности радиусом $R = 40$ м, обращенной своей выпуклостью вверх. Какое максимальное ускорение в горизонтальном направлении может развивать автомобиль на вершине моста, если скорость его в этой точке равна $v = 54$ км/ч? Коэффициент трения колес автомобиля о мост равен $\mu = 0{,}6$.

Решение. Делаем схематический чертеж (рис. 2.9) и указываем на нем скорость автомобиля $\vec{v}$ и касательное ускорение $\vec{a}_к$. Автомобиль взаимодействует с двумя телами: Землей и поверхностью моста. Со стороны Земли на него действует сила тяжести, равная $m\vec{g}$, со стороны моста — нормальная реакция $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$.

Здесь прежде всего необходимо обратить внимание на направление силы трения. При вращении колес покрышки ведущих колес отталкиваются от поверхности дороги, действуя на нее в сторону, противоположную движению машины. По третьему закону Ньютона поверхность действует на колеса в направлении движения. Сцепление колес с поверхностью дороги осуществляется за счет трения, поэтому при качении автомобиля движущей силой является сила трения сцепления, направленная в сторону движения по касательной к поверхности дороги.

Под действием приложенных сил изменяется и модуль, и направление вектора скорости. Модуль скорости меняется за счет силы трения, сообщающей телу касательное ускорение. Согласно второму закону динамики

$$F_{тр} = ma_к.$$

По условию задачи ускорение $a_к$ максимально, поэтому колеса находятся на грани пробуксовки и сила трения имеет наибольшее значение, равное $F_{тр} = \mu N$. Поэтому

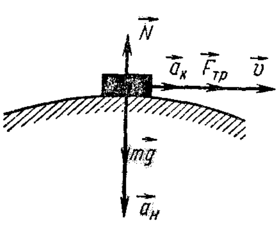

Рис. 2.9

$$\mu N = ma_к. \qquad (1)$$

По нормали к траектории (вдоль радиуса окружности) действуют две силы: $m\vec{g}$ и $\vec{N}$. В сумме они не равны нулю и изменяют направление вектора скорости. При движении по выпуклому мосту вектор скорости отклоняется от своего начального направления в сторону центра окружности. Это возможно лишь при условии, что нормальная реакция оказывается меньше силы тяжести. Последнее объясняется тем, что мост из-за своей кривизны как бы уходит из-под машины.

Равнодействующая сил $m\vec{g}$ и $\vec{N}$ является в данном примере силой, сообщающей автомобилю ускорение, направленное к центру окружности. Модуль равнодействующей равен разности $mg - N$, и согласно второму закону Ньютона для проекций сил и ускорения на нормаль к траектории автомобиля в верхней ее точке имеем:

$$mg - N = ma_{\text{н}} = m\frac{v^2}{R}. \qquad (2)$$

Решая уравнения (1) и (2) совместно относительно касательного ускорения, получим:

$$a_{\text{к}} = \mu\left(g - \frac{v^2}{R}\right); \quad a_{\text{к}} \approx 1{,}9 \text{ м/с}^2.$$

Пример 10. Какую скорость относительно поверхности Земли должен иметь искусственный спутник, чтобы лететь по круговой орбите, расположенной в плоскости экватора, на высоте $h = 1600$ км над Землей? Радиус Земли принять равным $R_З = 6400$ км, ускорение свободного падения у ее поверхности $g_0 = 9{,}8$ м/с^2.

Решение. Если пренебречь силами притяжения, действующими на спутник со стороны небесных тел, и не учитывать сопротивление среды, можно с достаточной степенью точности считать, что на спутник при его движении действует только сила земного притяжения $\vec{F}_{\text{т}}$.

Под действием этой силы спутник равномерно движется по окружности радиусом $R_З + h$ с некоторой скоростью $\vec{v}$ относительно центра Земли. Сила притяжения $\vec{F}_{\text{т}}$ сообщает спутнику нормальное ускорение $\vec{a}_{\text{н}}$, равное по модулю $v^2/(R_З + h)$ и направленное к центру Земли. Согласно второму закону Ньютона $F_{\text{т}} = ma_{\text{н}}$, или

$$F_{\text{т}} = mv^2/(R_З + h), \qquad (1)$$

где m — масса спутника. Модуль силы тяготения $\vec{F}_{\text{т}}$ в уравнении второго закона Ньютона нужно представить в развернутом виде, используя закон всемирного тяготения:

$$F_{\text{т}} = G\frac{mM_З}{(R_З + h)^2}. \qquad (2)$$

Если в решении задач подобного типа фигурирует масса Земли $M_З$, расчеты можно значительно упростить, исключив произведение $GM_З$ с помощью формулы

$$g_0 = G\frac{M_З}{R_З^2}. \qquad (3)$$

Скорость спутника относительно поверхности Земли равна:

$$u = v \pm v_0, \tag{4}$$

где v_0 — линейная скорость точек Земли на экваторе, которую можно найти из соотношения

$$v_0 = \frac{2\pi R_З}{\tau}, \tag{5}$$

зная радиус Земли и период ее суточного вращения $\tau = 24$ ч.

Знак «плюс» или «минус» в уравнении (4) берется в зависимости от того, запущен ли спутник с востока на запад или с запада на восток.

Уравнения (1) — (5) содержат шесть неизвестных величин: $F_т$, m, $M_З$, v, v_0 и u.

Решая систему относительно скорости спутника, находим:

$$u = \sqrt{\frac{g_0 R_З^2}{R_З + h}} \pm \frac{2\pi R_З}{\tau}.$$

Подставляя числовые значения в выражение для скорости, получим:

$$u_1 \approx 7{,}6 \text{ км/с} \quad \text{и} \quad u_2 \approx 6{,}6 \text{ км/с}.$$

Эти результаты показывают, что запускать искусственные спутники Земли легче в направлении с запада на восток, чем в противоположном.

Пример 11. Тяжелый шарик подвешен на нити длиной l. Нить равномерно вращается в пространстве, образуя с вертикалью угол α (конический маятник). Сколько оборотов делает шарик за время t? Решите задачу при условии, что конический маятник установлен в ракете, поднимающейся вертикально вверх с ускорением $\vec{a}$.

Решение. 1. При вращении нити на шарик действуют две силы: со стороны Земли сила тяжести, равная $m\vec{g}$, и со стороны нити сила натяжения $\vec{T}$. Под действием приложенных сил шарик движется равномерно в горизонтальной плоскости по окружности радиусом R с некоторой скоростью v (рис. 2.10, a). Это возможно лишь при условии, что равнодействующая $\vec{F}$ сил $m\vec{g}$ и $\vec{T}$ оказывается направленной перпендикулярно скорости к центру окружности O и, следовательно, сообщает шарику нормальное ускорение:

$$\vec{F} = m\vec{a}_н, \text{ где } a_н = v^2/R.$$

Изобразив силы, действующие на шарик, составляем основное уравнение динамики материальной точки в проекциях по нормали к окружности:

$$F = |m\vec{g} + \vec{T}| = \frac{mv^2}{R}. \tag{1}$$

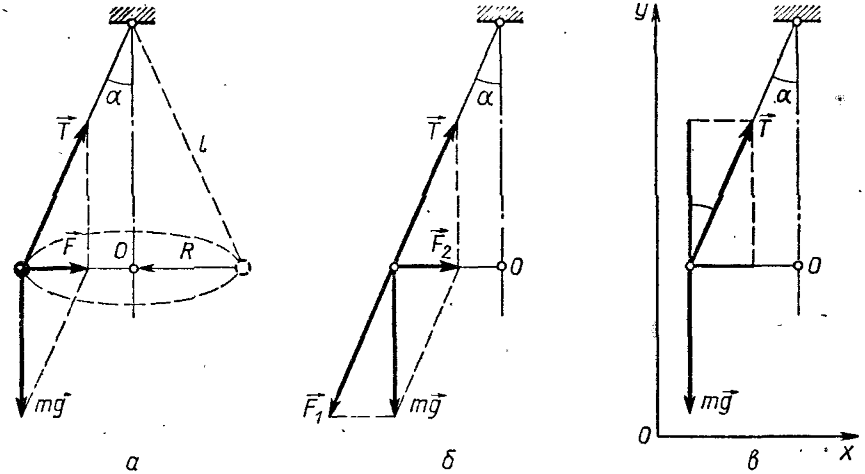

Рис. 2.10

Чтобы найти из этого соотношения какую-либо величину, в частности модуль суммы $m\vec{g}+\vec{T}$, нужно определить длину диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{T}$ и $m\vec{g}$. Сделать это можно различными способами.

а) Сложить силы $m\vec{g}$ и $\vec{T}$ по правилу параллелограмма и найти его диагональ, зная, что равнодействующая этих сил направлена по радиусу. Как видно из рисунка 2.10,*а*,

$$|m\vec{g}+\vec{T}| = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha = T\sin\alpha = \sqrt{T^2-(mg)^2}.$$

б) Разложить вектор $m\vec{g}$ по направлению нити и радиуса вращения на составляющие $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Из рисунка 2.10,*б* видно, что модули составляющих равны $F_1 = mg/\cos\alpha$, $F_2 = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Поскольку нить нерастяжима и вдоль нее ускорения нет, то согласно второму закону Ньютона $\vec{T}+\vec{F}_1=0$ и, стало быть, $m\vec{g}+\vec{T}= \vec{F}_2+\vec{F}_1+\vec{T}=\vec{F}_2$.

Следовательно, составляющая силы тяжести $\vec{F}_2$ равна равнодействующей всех сил, приложенных к шарику, т. е. она сообщает ему нормальное ускорение.

в) Для вычисления равнодействующей сил $\vec{T}$ и $m\vec{g}$ можно использовать метод проекций. Выберем для этого систему отсчета, например Землю, и связанную с ней прямоугольную систему координат. Ось Ox направим по радиусу вращения, ось Oy — вертикально вверх (рис. 2.10, *в*). Проекции сил по этим осям равны $T\sin\alpha$, $T\cos\alpha$ и $-mg$.

Так как по вертикальному направлению скорость шарика не изменяется, то основное уравнение динамики для проекций на ось Oy дает:

$$T\cos\alpha - mg = 0.$$

По оси Ox есть только одна проекция $T\sin\alpha$, которую можно рассматривать как проекцию равнодействующей всех сил, приложенных к шарику.

Сравнивая все три результата, нетрудно заметить, что в данном примере модуль равнодействующей силы равен:

$$F = |m\vec{g} + \vec{T}| = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha = T\sin\alpha = \sqrt{T^2 - (mg)^2}$$

и согласно (1) уравнение второго закона Ньютона в скалярной форме можно представить в одном из трех видов:

$$mg\,\mathrm{tg}\,\alpha = m\frac{v^2}{R};\; T\sin\alpha = m\frac{v^2}{R} \text{ и } \sqrt{T^2 - (mg)^2} = m\frac{v^2}{R}.$$

Какое из этих уравнений нужно использовать в том или ином конкретном случае, зависит от вопроса задачи и исходных данных.

Если не задана масса частицы, как, например, в нашем примере, уравнение второго закона удобно записать в первой форме:

$$mg\,\mathrm{tg}\,\alpha = m\frac{v^2}{R},$$

откуда

$$gR\,\mathrm{tg}\,\alpha = v^2. \quad (2)$$

Составив уравнение динамики, записываем дополнительные условия:

$$v = \frac{2\pi Rn}{t}, \quad (3)$$

где n — число оборотов шарика и $R = l\sin\alpha$. (4)

Исключая из уравнений (2) — (4) v и R и решая их относительно n, получим:

$$n = \frac{t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}.$$

2. Если конический маятник установлен в ракете, поднимающейся вертикально вверх с ускорением $\vec{a}$, число сил, действующих на шарик, остается тем же. Однако сила натяжения действует на шарик не так, как в первом случае; она не только (совместно с силой $m\vec{g}$) обеспечивает движение шарика по кругу, но и сообщает ему ускорение $\vec{a}$, равное ускорению ракеты. Так как шарик участвует в двух ускоренных движениях (равномерном по окружности и прямолинейном вверх), для нахождения связи между действующими силами $\vec{T}$ и $m\vec{g}$ и ускорениями нужно составить основное уравнение динамики в проекциях на оси прямоугольной системы координат Oxy, учитывая, что проекции ускорений на эти оси равны a и v^2/R Для оси Ox будем иметь:

$$T\sin\alpha = m\frac{v^2}{R}, \quad (5)$$

для оси Oy:

$$T\cos\alpha - mg = ma. \qquad (6)$$

Решая уравнения (3), (5) и (6) совместно относительно n, получим:

$$n = \frac{t}{2\pi}\sqrt{\frac{g+a}{l\cos\alpha}}.$$

Анализируя ответ, можно заметить следующее: 1) в системе, поднимающейся ускоренно вверх, явление протекает так, как если бы ускорение свободного падения увеличилось на a; 2) по мере увеличения числа оборотов маятника в единицу времени (n/t) угол α увеличивается и становится равным 90° при бесконечно большой скорости вращения. Из этого следует, что груз на нити в горизонтальной плоскости вращаться не может.

Пример 12. Стержень, изогнутый так, как показано на рисунке 2.11, вращается с постоянной угловой скоростью ω относительно оси $O'O''$. На стержень надета бусинка, размеры которой очень малы. Определите, на каком максимальном расстоянии l от точки O' бусинка может находиться в равновесии относительно стержня, если коэффициент трения между ними равен μ.

Р е ш е н и е. При вращении стержня на бусинку действуют три силы: сила тяжести, равная $m\vec{g}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}$, направленная перпендикулярно стержню, и сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$, направленная вдоль стержня к точке O'. То, что сила трения направлена вниз, а не вверх, следует из того, что расстояние l должно быть максимальным. Действительно, находясь на максимальном расстоянии, бусинка при увеличении скорости вращения стала бы сразу двигаться вверх, по раскручивающейся спирали, а это возможно лишь в том случае, когда $\vec{F}_{тр}$ имеет указанное направление. Нетрудно заметить, что, если бы речь шла о минимальном l, силу трения следовало бы направить вверх.

Под действием приложенных сил бусинка равномерно движется по окружности радиусом

$$R = l\sin\alpha \qquad (1)$$

в горизонтальной плоскости. Такое движение может происходить лишь при условии, что силы $m\vec{g}$, $\vec{N}$ и $\vec{F}_{тр}$ в сумме оказываются направленными к центру окружности C и изменяют только направление вектора скорости, сообщая бусинке только нормальное ускорение $\vec{a}_н$. Действие этих сил можно заменить

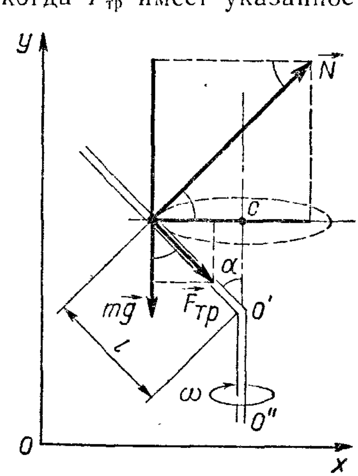

Рис. 2.11

действием одной силы — их равнодействующей, равной векторной сумме приложенных сил. Согласно второму закону Ньютона для модуля F равнодействующей должно выполняться равенство

$$F = |m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}| = ma_{\text{н}}, \text{ где } a_{\text{н}} = \omega^2 R.$$

Чтобы найти из этого равенства какую-либо величину, нужно вычислить модуль суммы, стоящей в левой части равенства. Проще всего это сделать так. Выберем систему отсчета — Землю и свяжем с ней прямоугольную систему координат. Ось Ox направим по радиусу вращения бусинки, ось Oy — вертикально вверх. Спроецируем силы, приложенные к бусинке, и ее ускорение на оси координат. Как видно из чертежа, проекции векторов на ось Ox равны: $N\cos\alpha$, $F_{\text{тр}}\sin\alpha$, 0 и $\omega^2 R$, проекции на ось Oy равны: $N\sin\alpha$, $-F_{\text{тр}}\cos\alpha$, $-mg$ и 0.

Составляем основное уравнение динамики для проекций на оси:

$$N\cos\alpha + F_{\text{тр}}\sin\alpha = m\omega^2 R, \tag{2}$$

$$N\sin\alpha - F_{\text{тр}}\cos\alpha - mg = 0. \tag{3}$$

Из этих уравнений следует:

$$F = N\cos\alpha + F_{\text{тр}}\sin\alpha.$$

Поскольку бусинка находится на грани скольжения (расстояние l наибольшее), то

$$F_{\text{тр}} = \mu N. \tag{4}$$

Составленные уравнения полностью отражают динамику движения бусинки. Решая их относительно l, получим:

$$l = \frac{(1 + \mu \operatorname{tg}\alpha) g}{\omega^2 (\operatorname{tg}\alpha - \mu) \sin\alpha}.$$

Анализируя этот результат, нетрудно заметить, что при $\alpha = 90°$ $\operatorname{tg}\alpha = \infty$ и $l = \frac{\mu g}{\omega^2}$. При $90° < \alpha < 180°$ $\operatorname{tg}\alpha < 0$, и, следовательно,

$$l = \frac{(\mu \operatorname{tg}\alpha - 1) g}{\omega^2 (\operatorname{tg}\alpha + \mu) \sin\alpha}.$$

Пример 13. Конькобежец массой M, стоя на коньках на льду, бросает шайбу массой m под углом α к горизонту. Определите начальную скорость конькобежца, если шайба брошена со скоростью $\vec{u}$: а) относительно Земли; б) относительно человека. Смещением тел за время бросания пренебречь.

Решение. а) Начальную скорость конькобежца можно определить из закона сохранения импульса, поскольку в задаче рассматриваются два состояния системы тел и характер сил взаимодействия неизвестен. Если пренебречь смещением тел за то время, в течение которого человек сообщает скорость шайбе, то даже при наличии трения можно с большой степенью точности считать, что на систему Земля — человек — шайба внешние силы не действуют, т. е. эта система является изолированной и закон сохранения импульса в ней выполняется.

Делаем схематический чертеж (рис. 2.12) и изображаем на нем импульсы каждого тела до и после изменения их движения — до и после броска.

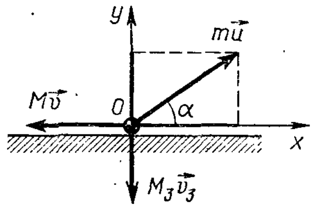

Рис. 2.12

Перед бросанием все тела находились в покое, импульс каждого тела был равен нулю, равнялась нулю и их векторная сумма. В конце броска импульс шайбы равен $m\vec{u}$, конькобежца $M\vec{v}$, земного шара $M_3\vec{v}_3$. Здесь $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{v}_3$ — скорости тел относительно точки пространства, где находился конькобежец в момент бросания. Эту точку можно считать неподвижной, так как по условию задачи смещение тел за время бросания ничтожно мало.

Согласно закону сохранения импульса

$$0 = m\vec{u} + M\vec{v} + M_3\vec{v}_3.$$

Поскольку импульсы тел направлены под углом друг к другу, для упрощения вычислений удобно перейти от векторной записи уравнения к скалярной, представив его в проекциях по осям прямоугольной системы координат Oxy. Выберем начало координат в точке бросания O и направим оси Ox и Oy вдоль поверхности Земли и по нормали к ней. Спроецируем векторы $M\vec{v}$, $m\vec{u}$ и $M_3\vec{v}_3$ на эти оси. Как видно из чертежа, проекции импульсов тел по осям равны: $-Mv$, $mu\cos\alpha$, 0 и 0, $mu\sin\alpha, -M_3v_3$.

Учитывая, что до броска импульсы всех тел были равны нулю, записываем уравнение закона сохранения импульса в проекциях.

Для оси Ox мы имеем:

$$0 = mu\cos\alpha - Mv. \qquad (1)$$

Для оси Oy:

$$0 = mu\sin\alpha - M_3v_3. \qquad (2)$$

Из уравнения (1) скорость конькобежца получается равной

$$v = \frac{m}{M}u\cos\alpha.$$

Уравнение (2) позволяет оценить скорость Земли, которую она приобретает во время толчка. Решая его относительно v_3, получим:

$$v_3 = \frac{m}{M_3}u\sin\alpha.$$

Из выражения для этой скорости видно, что она ничтожно мала, поскольку масса Земли M_3 во много раз больше массы груза.

б) Если дается скорость тела относительно человека, то уравнение закона сохранения импульса для проекции на ось Ox

будет иметь вид:

$$0 = -Mv + m(u\cos\alpha - v). \qquad (3)$$

Уравнение закона сохранения импульса мы составляем в системе отсчета, связанной с неподвижной точкой бросания, поэтому скорости всех тел, входящие в это уравнение, нужно брать относительно точки бросания. Горизонтальная проекция скорости тела относительно неподвижной системы координат, связанной с точкой O, равна в данном случае разности $u\cos\alpha - v$. Это объясняется тем, что за то время, когда телу сообщается относительно руки скорость $\vec{u}$, сам человек приобретает скорость $\vec{v}$. Вертикальная проекция скорости тела равна $u\sin\alpha - v_3 \approx u\sin\alpha$, так как v_3 ничтожно мала.

Решая уравнение (3) относительно скорости конькобежца, получим:

$$v = \frac{m}{m+M} u\cos\alpha.$$

Анализируя ответ, мы видим, что при $m \ll M$ результат будет такой же, как и в случае а).

Пример 14. Лодка длиной l и массой M стоит в спокойной воде. На носу и корме лодки сидят два рыбака, массы которых равны m_1 и m_2. На сколько сместится лодка, если рыбаки пройдут по лодке и поменяются местами? Сопротивлением воды пренебречь.

Решение. Если не учитывать сопротивление воды и считать, что при движении лодки вода ею не увлекается, то систему тел лодка — рыбаки можно считать изолированной по любому направлению вдоль поверхности воды, так как внешние силы в горизонтальной плоскости на систему не действуют.

Вначале все тела находились в состоянии покоя и, следовательно, сумма импульсов тел равнялась нулю. Как только один рыбак пойдет по лодке, она станет двигаться ему навстречу под действием внутренних сил (сил трения). Согласно закону сохранения импульса какие бы перемещения в нашей системе тел ни начались, векторная сумма всех импульсов в любой момент времени должна оставаться равной нулю.

Предположим, что в некоторый момент времени скорость первого рыбака относительно лодки равна $\vec{v}_1$, а скорость лодки относительно берега $\vec{u}_1$. Тогда, пренебрегая движением воды и учитывая, что импульсы всех тел все время направлены по одной прямой, можно представить уравнение закона сохранения импульса в проекциях так:

$$0 = m_1(v_1 - u_1) - (M + m_2)u_1.$$

Напомним, что, составляя уравнение закона сохранения импульсов, мы договорились всегда брать абсолютную скорость тел относительно неподвижного тела отсчета (в данном случае воды).

Нетрудно сообразить, что у рыбака она равна разности между его скоростью относительно лодки и скоростью самой лодки, которую можно рассматривать для рыбака как переносную. При этом v_1 будет всегда больше u_1, поскольку обратное предположение противоречило бы закону сохранения импульсов.

Вследствие того что человек и лодка движутся одновременно и время, затрачиваемое на разгон и замедление в начале и в конце движения рыбака, мало, можно считать, что

$$v_1 = \frac{l}{t} \quad \text{и} \quad u_1 = \frac{x_1}{t},$$

где t и x_1 — соответственно время движения рыбака и модуль перемещения лодки за это время. Учитывая все это, уравнение закона сохранения импульсов можно переписать так:

$$m_1 (l - x_1) - (M + m_2) x_1 = 0. \tag{1}$$

Проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, составляем такое же уравнение для второго рыбака. Если через x_2 обозначить смещение лодки при переходе второго рыбака, то

$$m_2 (l - x_2) - (M + m_1) x_2 = 0. \tag{2}$$

Результирующее смещение лодки равно разности:

$$s = x_1 - x_2. \tag{3}$$

Решая уравнения (1) — (3) совместно относительно искомой величины s, получим:

$$s = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M} l.$$

Следует заметить, что, как только рыбаки остановятся, остановится и лодка. Делая последний шаг, рыбак останавливает себя и лодку. Полученный результат не зависит от характера движения рыбаков.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 2

2.1. После прекращения тяги локомотива состав остановился на горизонтальном участке пути через 60 с. Определите расстояние, пройденное поездом за это время, если известно, что сила сопротивления движению не зависит от скорости и составляет 2% веса всего состава.

2.2. Через сколько секунд тело, брошенное вертикально вверх со скоростью 44,8 м/с, упало на землю, если сила сопротивления воздуха не зависела от скорости и составляла в среднем $^1/_7$ силы тяжести?

2.3. Динамометр вместе с прикрепленным к нему грузом сначала поднимают вертикально вверх, затем опускают. В обоих случаях движение происходило с ускорением, равным 6 м/с^2. Чему