Из закона сохранения механической энергии как следствие вытекает:

а) Если в какой-либо момент времени полная механическая энергия изолированной системы равна W_1, а в любой последующий момент времени W_2, то

$$W_2 - W_1 = 0. \qquad (3.11')$$

б) В применении к наиболее часто встречающемуся случаю, когда в задаче рассматривают изолированную систему, состоящую из двух тел — Земля плюс тяжелый предмет у ее поверхности, уравнение (3.11) можно представить в виде:

$$\frac{mv_2^2}{2} + mgh - \frac{mv_1^2}{2} = 0, \qquad (3.11'')$$

где v_1 и v_2 — модули скоростей тела относительно поверхности Земли в первом и втором состоянии; h — модуль перемещения тела по вертикали. Изменение энергии самой Земли при этом не учитывают.

в) Если на тело (систему тел) в процессе его перехода из одного состояния в другое, помимо силы земного притяжения, действуют другие силы, то работа этих сил равна изменению полной механической энергии:

$$A = W_2 - W_1. \qquad (3.12)$$

В том случае, когда в правой части этого уравнения изменение потенциальной энергии тяготения учтено, работа силы тяжести $m\vec{g}$ и ее составляющих в A не входит.

При движении тел под действием одной лишь силы тяжести их нельзя считать изолированными. Изолированной системой, в которой имеет место закон сохранения энергии, здесь является система тело — Земля, однако при составлении уравнения (3.11'') изменение энергии Земли не учитывается, так как оно мало.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

1. Правила решения задач о работе постоянной силы сводятся к следующим:

а) Установить, работу какой силы требуется определить, и записать исходную формулу: $A = Fs\cos\alpha$, где $\vec{F}$ может быть и равнодействующей, и отдельной силой.

б) Сделать чертеж, указав на нем силы, приложенные к телу.

в) Установить, чему равен угол α между направлением вектора силы, работу которой нужно вычислить, и направлением перемещения (скорости).

г) Если сила условием задачи не задана, ее следует найти из уравнения второго закона динамики.

д) Найти модуль перемещения (если оно неизвестно) по формулам кинематики.

е) Подставить найденные выражения для F и s в формулу работы и провести вычисления.

2. Задачи на работу переменной силы решают в основном по формулам (3.3). Для решения таких задач необходимо:

а) Установить, работу какой силы нужно определить, и записать одну из трех расчетных формул в зависимости от того, что в данной задаче считается известным и неизвестным.

б) Сделать чертеж, на котором указать все силы, приложенные к телу.

в) Определить, чему равна сила, совершающая работу над телом, и подставить ее выражение в исходную формулу (обычно такими силами являются сила упругости пружины, переменная сила трения, переменная выталкивающая сила жидкости).

г) Если конечное значение силы не задано, из дополнительных условий нужно определить коэффициент пропорциональности k и, подставив найденное выражение k в расчетную формулу (3.3), провести вычисления.

3. Решение задач механики, связанных с расчетом мощности, развиваемой постоянной силой, основано на применении формул (3.6) и (3.6′).

а) Приступая к решению задач такого типа, необходимо сначала установить, какую мощность требуется определить — среднюю или мгновенную. Далее следует записать исходную формулу, подразумевая под v в первом случае среднюю скорость на заданном участке пути, во втором — мгновенную скорость в конце рассматриваемого перемещения.

б) Сделать чертеж, указав на нем все силы, приложенные к телу, и заданные кинематические характеристики движения.

в) Составить основное уравнение динамики материальной точки и найти из него модуль силы тяги $\vec{F}_т$.

г) Если значения $v_{ср}$ или v не заданы, то определить их из формул кинематики.

д) Подставить в формулу мощности вместо v и $F_т$ их выражения и провести окончательный расчет.

4. Уравнение закона сохранения и превращения энергии (3.10), представляющее одну из самых общих формул динамики, позволяет при известном навыке решить почти все задачи элементарной динамики, включая многие из тех, что были разобраны в главе 2. Во многих задачах это уравнение является одним из основных, которое вместе с уравнением второго закона динамики и уравнением закона сохранения импульса составляет полную систему уравнений, описывающих данное явление. Особенно удобно (а во втором случае просто необходимо) использовать закон сохранения энергии при решении задач, где: а) дается два механических состояния или положения тела в пространстве при равнопеременном движении; б) рассматриваются два состояния или положения тела (или системы тел) в процессе неравномерного переменного движения.

Закон сохранения энергии связывает характеристики начального и конечного состояния системы взаимодействующих тел, поэтому его использование позволяет упростить решение многих задач и не рассматривать действующие между телами силы.

Общую схему решения задач, требующих составления уравнения закона сохранения энергии, можно представить так:

а) Сделать схематический чертеж и записать формулу закона сохранения и превращения энергии:

$$A = W_2 - W_1.$$

б) Установить первое и второе состояние (положение) рассматриваемого тела (системы тел). Ими обычно служат начальное и конечное положение движущегося тела.

в) Выбрать нулевой уровень отсчета потенциальной энергии. Его можно взять произвольно, но удобнее выбирать или по самому нижнему положению, которое занимает тело при своем движении, или отсчитывать от уровня, на который опускается тело, переходя из первого положения во второе.

Если потенциальная энергия тела или системы тел при переходе из одного состояния в другое не изменяется, то при составлении уравнения закона сохранения энергии ее вообще можно не рассматривать.

г) Расставить все внешние силы, действующие на тело в произвольной точке траектории, и отметить кинематические величины v и h, характеризующие механическое состояние тела (системы) в первом и втором положениях.

д) С помощью формул (3.1), (3.3), (3.7) и (3.8) составить выражения для работы внешних сил и полной механической энергии тела (системы) в положениях I и II — представить работу A как функцию модуля силы $\vec{F}$ и модуля перемещения $\vec{s}$ $(A = f(F, s))$, а энергии W_1 и W_2 как функции скоростей v и расстояний h. Подставить эти выражения в исходное уравнение закона сохранения энергии и найти из него ту величину, которая считается неизвестной. Если неизвестных оказывается больше одного, то к составленному уравнению закона сохранения энергии нужно добавить основное уравнение динамики материальной точки, уравнение закона сохранения импульса или формулы кинематики. В результате получится система уравнений, совместное решение которых позволит определить искомую величину.

Пример 1. Вагонетку массой $m = 3$ т поднимают по рельсам в гору, наклон которой к горизонту равен $\beta = 30°$. Какую работу совершила сила тяги на пути $s = 50$ м, если известно, что вагонетка двигалась с ускорением $a = 0{,}2$ м/с^2? Коэффициент трения принять равным $\mu = 0{,}1$; $g = 10$ м/с^2.

Р е ш е н и е. По условию задачи необходимо вычислить работу постоянной силы тяги $\vec{F}_т$. Эта работа определяется формулой

$$A = F_т s \cos \alpha. \qquad (1)$$

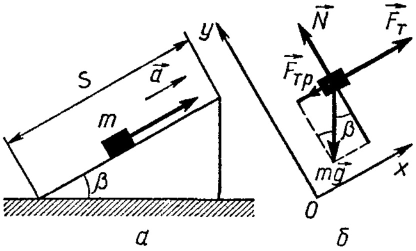

Рис. 3.1

Делаем чертеж (рис. 3.1) и расставляем силы, действующие на вагонетку: это сила тяги $\vec{F}_т$, сила тяжести, равная $m\vec{g}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$ и реакция опоры $\vec{N}$.

По условию задачи снла гяги направлена вдоль перемещения, поэтому угол α между $\vec{F}_т$ и перемещением равен нулю, и, следовательно, $\cos\alpha = 1$. (Этот угол не следует путать с углом наклона β плоскости.)

Чтобы определить силу тяги, нужно составить основное уравнение динамикн материальной точки. Выберем систему отсчета — Землю и связанную с ней прямоугольную систему координат. Ось Ox направим вдоль наклонной плоскости вверх, ось Oy — перпендикулярно наклонной плоскости. Проекции сил, действующих на вагонетку, по этим осям равны соответственно $F_т$, $-mg\sin\beta$, $-F_{тр}$, N и $-mg\cos\beta$.

Уравнение второго закона Ньютона в проекциях на ось Ox даст:

$$F_т - mg\sin\beta - F_{тр} = ma,$$

на ось Oy:

$$N - mg\cos\beta = 0.$$

Учитывая, что $F_{тр} = \mu N$, основное уравнение динамики в проекциях на ось Ox можно записать так:

$$F_т - mg\sin\beta - \mu mg\cos\beta = ma.$$

Найдя из этого уравнения силу тяги и подставив ее значение в уравнение (1), получим:

$$A = m(a + g\sin\beta + \mu g\cos\beta)s;\ A \approx 900\ \text{Дж}.$$

Пример 2. Две пружины одинаковой длины, имеющие соответственно жесткость, равную $k_1 = 9{,}8$ Н/см и $k_2 = 19{,}6$ Н/см, соединены между собой концами (параллельно). Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружины на $s_0 = 1$ см? Чему будет равна эта работа, если пружины будут соединены между собой только одним концом (последовательно)?

Р е ш е н и е. Чтобы растянуть или сжать пружину на заданную длину, к ней нужно приложить силу, модуль которой зависит от упругих свойств пружины. Эти свойства характеризуются ее жесткостью k. При небольших удлинениях или сжатиях упругих пружин можно с большой степенью точности считать, что удлинение s пружины прямо пропорционально приложенной к ней силе, т. е. $F = ks$. Работа такой силы, как мы знаем, может быть рассчитана по второй формуле (3.3), если известны удлинение и жесткость пружины. При параллельном или последовательном соединении пружин с известной жесткостью k_1 и k_2 их общую жесткость k_0 можно вычислить следующим образом.

При растяжении силой $\vec{F}_0$ двух пружин, соединенных паралельно, общее удлинение пружин

$$s_0 = s_1 = s_2, \qquad (1)$$

где s_1 и s_2 — удлинение первой и второй пружины. Если растянутые пружины находятся в равновесии и массы их ничтожно малы, то модуль силы, деформирующей пружины, равен сумме модулей сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ натяжений пружин, т. е.

$$F_0 = F_1 + F_2, \qquad (2)$$

поскольку все силы действуют по одной прямой.

Согласно формуле (3.2) для системы пружин и каждой пружины в отдельности можно записать:

$$F_0 = k_0 s_0; \quad F_1 = k_1 s_1; \quad F_2 = k_2 s_2. \qquad (3)$$

Исключая из уравнений (1) — (3) силы и удлинения, получим:

$$k_0 = k_1 + k_2. \qquad (4)$$

В общем случае при параллельном соединении n пружин их общая жесткость равна:

$$k_0 = \sum_{i=1}^{n} k_i.$$

Зная жесткость двух пружин, соединенных параллельно, и удлинение, легко найти работу, совершенную силой $\vec{F}_0$. Согласно формуле (3.3) она равна:

$$A_1 = \frac{k_0 s_0^2}{2} = \frac{(k_1 + k_2) s_0^2}{2}; \quad A_1 = 0{,}147 \text{ Дж}.$$

При растяжении двух пружин, соединенных последовательно, натяжение каждой пружины равно внешней приложенной силе:

$$F_1 = F_2 = F_0, \qquad (1)$$

а общее удлинение — сумме удлинений каждой пружины:

$$s_0 = s_1 + s_2. \qquad (2)$$

Кроме того, для системы пружин и каждой пружины в отдельности будут иметь место соотношения (3).

Исключая из уравнений (1), (2) и (3) силы и удлинения, получим:

$$\frac{1}{k_0} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2},$$

откуда

$$k_0 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}. \qquad (3)$$

В общем случае при последовательном соединении n пружин их общую жесткость можно найти из формулы

$$\frac{1}{k_0}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i}.$$

Работа по растяжению двух последовательно соединенных пружин согласно формуле (3.3) равна:

$$A_2=\frac{k_0 s_0^2}{2}=\frac{k_1 k_2 s_0^2}{2(k_1+k_2)};\quad A_2=0{,}037\ \text{Дж}.$$

Пример 3. Самолет массой $m=3$ т для взлета должен иметь скорость $v=360$ км/ч и длину разбега $s=600$ м. Какова должна быть минимальная мощность мотора, необходимая для взлета самолета? Силу сопротивления движению считать пропорциональной силе нормального давления, средний коэффициент сопротивления принять равным $\mu=0{,}2$. Движение при разгоне самолета считать равноускоренным.

Решение. В задаче требуется определить мгновенную мощность мотора в момент взлета самолета. Она и будет являться той минимальной мощностью, при которой самолет может еще набрать скорость, необходимую для отрыва от земли:

$$N_{\min}=F_{т}v. \qquad (1)$$

При разгоне самолета на его винт действует со стороны отбрасываемого воздуха сила тяги $\vec{F}_{т}$, кроме того, к самолету приложены следующие силы: сила тяжести, равная $m\vec{g}$, нормальная реакция опоры $\vec{Q}$ и сила сопротивления, равная по модулю μmg. Согласно второму закону Ньютона

$$F_{т}-\mu mg=ma. \qquad (2)$$

Поскольку известна длина s разбега самолета и скорость при отрыве v, ускорение самолета можно найти из формулы

$$a=\frac{v^2}{2s}. \qquad (3)$$

Исключая из уравнений (1) — (3) неизвестные величины $F_{т}$ и a, получим для минимальной мощности:

$$N_{\min}=m\left(\frac{v^2}{2s}+\mu g\right)v;\quad N_{\min}=3\ \text{МВт}.$$

Пример 4. Поезд массой $m=784$ т начинает двигаться под уклон и за $t=50$ с развивает скорость $v=18$ км/ч. Коэффициент сопротивления равен $\mu=0{,}005$, уклон $\varphi=0{,}005$. Определите среднюю мощность локомотива, считая силу сопротивления пропорциональной силе нормального давления.

Указание. Уклоном называют отношение высоты наклона плоскости к ее длине; уклон $\varphi=h/l=\sin\alpha$, где α — угол наклона плоскости к горизонту.

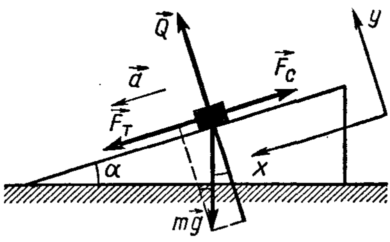

Рис. 3.2

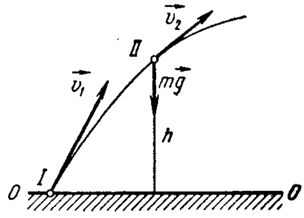

Рис. 3.3

Р е ш е н и е. Среднюю мощность, развиваемую силой тяги локомотива, можно определить по формуле

$$N_{\text{ср}} = F_{\text{т}} v_{\text{ср}}. \tag{1}$$

Силу тяги находим из уравнения второго закона Ньютона. Для его составления расставляем силы, приложенные к поезду (рис. 3.2): силу тяги $\vec{F}_{\text{т}}$, действующую со стороны рельсов (силой тяги здесь является сила трения сцепления колес с рельсами), силу тяжести, равную $m\vec{g}$, нормальную реакцию опоры $\vec{Q}$ и силу сопротивления движению $\vec{F}_{\text{c}}$.

Примем за тело отсчета Землю и свяжем с ней прямоугольную систему координат. Ось Ox направим вдоль наклонной плоскости вниз, ось Oy — вверх. Спроецировав силы на оси, составляем основное уравнение динамики в проекциях. Для оси Ox имеем $F_{\text{т}} + mg\sin\alpha - F_{\text{c}} = ma$, а так как по условию $F_{\text{c}} = \mu Q = \mu mg\cos\alpha$, то

$$F_{\text{т}} + mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma. \tag{2}$$

Формулы кинематики дают:

$$a = \frac{v}{t}; \quad v_{\text{ср}} = \frac{v}{2}. \tag{3}$$

Решая систему уравнений (1) — (3) относительно $N_{\text{ср}}$, получаем:

$$N_{\text{ср}} = m\left(\frac{v}{t} + \mu g\cos\alpha - g\sin\alpha\right)\frac{v}{2} \approx m\left(\frac{v}{t} + \mu g - g\varphi\right)\frac{v}{2},$$

$$N_{\text{ср}} = 200 \text{ кВт}.$$

Пример 5. Камень брошен под некоторым углом к горизонту со скоростью $\vec{v}_1$ (рис. 3.3). Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, на какой высоте от точки бросания скорость камня уменьшится вдвое.

Р е ш е н и е. Многие задачи динамики в курсе элементарной физики можно решить двумя способами: или с помощью уравнения второго закона Ньютона, или с помощью закона сохранения энергии. Данную задачу проще решить, применив уравнение закона сохранения энергии.

Записываем основное уравнение энергетического баланса:

$$A = W_2 - W_1.$$

Отмечаем первое (*I*) и второе (*II*) положение камня: в начальной точке траектории и на искомой высоте. За нулевой уровень отсчета потенциальной энергии принимаем нижнее положение, которое занимает камень по условию задачи,— уровень бросания *OO*

Расставляем силы, приложенные к камню. На него действует только сила тяжести, равная $m\vec{g}$. Указываем вектор скорости $\vec{v}_2$ и высоту h камня над уровнем *OO* в положении *II*.

Так как внешние силы на тело не действуют (в системе тело — Земля сила $m\vec{g}$ считается внутренней и ее работа учитывается изменением потенциальной энергии), то их работа

$$A = 0.$$

Полная механическая энергия камня в положении **I** и **II** соответственно равна

$$W_1 = \frac{mv_1^2}{2},$$

$$W_2 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh.$$

Подставляем выражения для A, W_1 и W_2 в исходную формулу:

$$0 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh - \frac{mv_1^2}{2},$$

откуда после упрощений получим:

$$0 = v_2^2 + 2gh - v_1^2$$

Так как по условию задачи $v_2 = \frac{v_1}{2}$, то

$$h = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} = \frac{3v_1^2}{8g}.$$

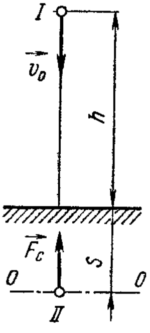

Рис 3.4

Несмотря на то что при решении задачи мы не использовали угол бросания α и в ответ он не вошел, полученный результат неявно зависит от α. Можно легко показать, что условие $v_2 = \frac{v_1}{2}$ имеет место лишь в том случае, если $\alpha \geqslant 60°$ Рекомендуем доказать это самим читателям

Пример 6. Груз массой $m = 1$ кг падает с высоты $h = 240$ м и углубляется в песок на $s = 0{,}2$ м (рис. 3.4). Определите среднюю силу сопротивления грунта, если начальная скорость падения груза $v_0 = 14$ м/с. Сопротивление воздуха не учитывать.

Р е ш е н и е. Делаем чертеж и записываем для груза исходное уравнение закона сохранения и превращения энергии:

$$A = W_2 - W_2.$$

Выбираем уровень OO отсчета потенциальной энергии по самому нижнему положению груза (но не от поверхности Земли!).

На груз при свободном падении внешние силы не действуют (в системе тело — Земля сила тяжести, равная $m\vec{g}$,— внутренняя сила). При перемещении груза в земле внешней силой, действующей на него, является сила сопротивления грунта $\vec{F}_c$. Работа этой силы равна:

$$A = -F_c s$$

(знак «минус» указывает, что сила направлена в сторону, противоположную перемещению, и образует с вектором скорости угол 180°, $\cos 180° = -1$). В положении I груз обладает механической энергией

$$W_1 = \frac{mv_0^2}{2} + mg(h + s).$$

В положении II кинетическая, а также потенциальная энергия относительно выбранного уровня равны нулю, т. е. $W_2 = 0$. Подставляя найденные выражения для работы и полной энергии в исходное уравнение, получим:

$$-F_c s = -\frac{mv_0^2}{2} - mg(h + s).$$

Откуда после подстановки числовых значений будем иметь:

$$F_c = \frac{m}{s}\left[\frac{v_0^2}{2} + g(h + s)\right]; \quad F_c \approx 12 \text{ кН}.$$

Пример 7. Тяжелый шарик соскальзывает без трения по наклонному желобу, образующему «мертвую петлю» радиусом R. С какой высоты шарик должен начать движение, чтобы не оторваться от желоба в верхней точке траектории?

Р е ш е н и е. Нам дана задача о переменном движении материальной точки по окружности. Причем в процессе этого движения изменяется положение точки по высоте. Эта и подобные задачи относятся ко второй группе задач о криволинейном движении, и, как указывалось выше, главным в их решении является составление уравнения закона сохранения энергии и уравнения второго закона Ньютона в проекциях на нормаль к траектории движения.

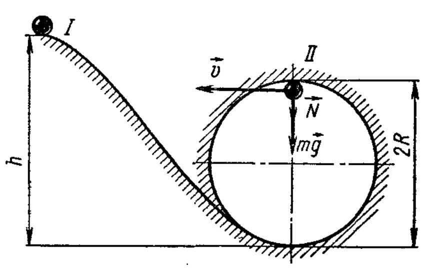

Рис. 3.5

Делаем чертеж (рис. 3.5) и записываем формулу закона сохранения энергии:

$$A = W_2 - W_1.$$

Первым считаем положение шарика в начале движения, вторым — положение в верхней точке траектории. Уровень отсчета высоты выберем на поверхности стола.

В процессе движения на шарик действуют две силы: сила тяжести, равная $m\vec{g}$, и нормальная реакция опоры $\vec{N}$. Работа силы тяжести учитывается в изменении потенциальной энергии, сила $\vec{N}$ работу не совершает, так как она перпендикулярна перемещению (в формуле работы $\cos\alpha = 0$), поэтому

$$A = 0.$$

Полная механическая энергия шарика в I и II положениях равна соответственно:

$$W_1 = mgh$$

и

$$W_2 = \frac{mv^2}{2} + mg2R.$$

Подставляя выражения для работы и энергии в исходное уравнение, получим:

$$0 = \frac{mv^2}{2} + 2mgR - mgh,$$

откуда

$$v^2 + 4gR - 2gh = 0. \qquad (1)$$

В верхней точке петли на шарик в общем случае действуют вниз две силы $m\vec{g}$ и $\vec{N}$. Следовательно, по второму закону Ньютона

$$N + mg = \frac{mv^2}{R}. \qquad (2)$$

При пуске с достаточно большой высоты шарик приобретает такую скорость, что в каждой точке петли давит на желоб с некоторой силой $\vec{N}$, различной в разных точках. По третьему закону Ньютона желоб действует на шарик с той же по модулю силой в противоположную сторону и отжимает его на дугу окружности радиусом R.

По мере уменьшения начальной высоты спуска скорость шарика в верхней точке петли уменьшается и при некотором значении становится такой, что он пролетает верхнюю точку петли, лишь касаясь желоба. Для этого предельного случая $N = 0$, и уравнение второго закона примет вид:

$$mg = \frac{mv^2}{R},$$

откуда

$$gR = v^2. \quad (3)$$

Такой же результат получается из анализа уравнения (2). При заданном радиусе R модуль N уменьшается с уменьшением скорости v, пока не достигнет нуля. Это соответствует минимальной высоте, когда шарик еще описывает «мертвую петлю».

Решая уравнения (1) и (3) совместно относительно h, получим:

$$h = 2{,}5R.$$

Пример 8. Груз массой m висит на легкой нити длиной l. Нить отклонили от вертикального положения на угол α_0 и отпустили. а) По какому закону изменяется сила натяжения нити при движении груза? б) На какой максимальный угол можно отклонить нить, чтобы при последующих качаниях она не оборвалась, если нить выдерживает силу натяжения, равную по модулю $2mg$?

Р е ш е н и е. В задаче рассматриваются два положения системы, которые проходит груз при неравномерном движении по дуге окружности. Для решения задачи нужно составить уравнение закона сохранения энергии и второго закона Ньютона в проекциях на направление радиуса.

а) Делаем чертеж (рис. 3.6), отмечаем первое положение груза, характеризуемое начальным углом отклонения α_0, и второе, характеризуемое произвольным углом α. Записываем уравнение закона сохранения энергии:

$$A = W_2 - W_1.$$

За начало отсчета потенциальной энергии примем произвольное положение груза — уровень OO.

Отмечаем высоту h и скорость $\vec{v}$ груза в положении II. На груз при его движении действует сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила тяжести, равная $m\vec{g}$. Во время движения сила натяжения всюду направлена под углом 90° к вектору скорости, поэтому при перемещении груза из положения I в положение II работа этой силы равна нулю:

$$A = 0.$$

Полная энергия груза в указанных положениях равна соответственно

$$W_1 = mgh \quad \text{и} \quad W_2 = \frac{mv^2}{2},$$

так как в положении I скорость груза, а в положении II высота

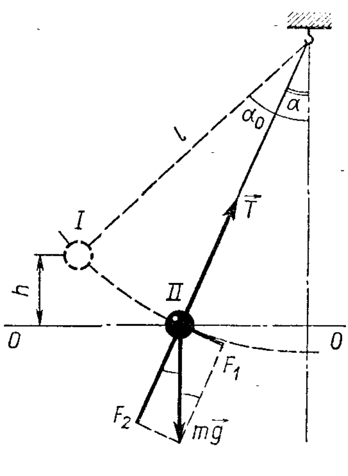

Рис. 3.6

груза над уровнем OO равны нулю. Подставляя найденные выражения для работы и полной энергии в исходную формулу, получим:

$$\frac{mv^2}{2} - mgh = 0,$$

откуда

$$v^2 = 2gh. \tag{1}$$

В тот момент времени, когда нить составляет с вертикалью угол α, на груз действует сила тяжести, равная $m\vec{g}$, и сила натяжения нити $\vec{T}$. Под действием этих сил груз движется по дуге окружности, обладая нормальным $a_н$ и касательным $a_к$ ускорениями. Спроецируем вектор $m\vec{g}$ на направления радиуса и касательной. Как видно из чертежа, соответствующие проекции равны: $F_1 = mg \sin \alpha$, $F_2 = mg \cos \alpha$. Согласно второму закону Ньютона

$$mg \sin \alpha = ma_к, \text{ откуда } a_к = g \sin \alpha.$$

Нетрудно заметить, что $T > F_2$ (от своего начального направления движения груз отклоняется вверх), поэтому уравнение второго закона Ньютона в проекциях на нормаль к траектории имеет вид:

$$T - mg \cos \alpha = \frac{mv^2}{l}, \tag{2}$$

где l — длина нити; v — скорость груза во II положении системы.

Для нахождения вида функции $T(\alpha)$ составленных уравнений недостаточно. К ним необходимо добавить связь между h, l, α_0 и α. Как видно из чертежа,

$$h = l(\cos \alpha - \cos \alpha_0). \tag{3}$$

Уравнения (1) — (3) содержат три неизвестные величины: T, v и h. Решая их относительно искомой силы натяжения, мы получим ответ на первый вопрос задачи: как меняется сила натяжения нити в зависимости от ее положения, характеризуемого углом α:

$$T = mg(1 + 2\cos \alpha - 2\cos \alpha_0).$$

Анализируя полученный результат, мы видим:

1) при $\alpha = 0$, т. е. в нижней точке траектории (при вертикальном положении нити) сила натяжения имеет максимальное значение, равное

$$T_{max} = mg(3 - 2\cos \alpha_0);$$

2) если в начальный момент нить занимает горизонтальное положение ($\alpha_0 = 90°$), то сила натяжения будет меняться по закону

$$T = mg(1 + 2\cos \alpha).$$

Она имеет максимальное значение $T_{max} = 3mg$ при $\alpha = 0$.

б) Наибольшее значение начального угла отклонения, при котором максимальная сила натяжения нити равна $T_{max} = 2mg$, можно найти из уравнений (1) (3) Так как максимальное натяжение нить испытывает в вертикальном положении, то, положив в них $\alpha = 0$ и $T_{max} = 2mg$, получим:

$$v^2 = 2gh,\ 2mg - mg = \frac{mv2}{l},$$

$$h = l(1 - \cos\alpha_0).$$

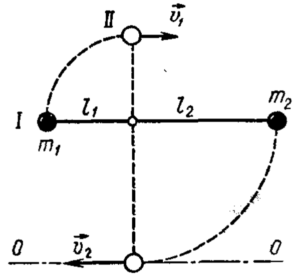

Рис 3.7

Решая эти уравнения совместно относительно α_0, получим $\cos\alpha_0 = 0{,}5$; $\alpha_0 = 60°$.

Таким образом, при отклонении нити в горизонтальное положение $T_{max} = 3mg$, при отклонении на угол $\alpha_0 = 60°$ $T_{max} = 2mg$.

Пример 9. Вокруг горизонтальной оси может без трения вращаться легкий рычаг (рис. 3,7), плечи которого равны l_1 и l_2. На концах рычага укреплены грузы массой, равной соответственно m_1 и m_2. Предоставленный самому себе, рычаг переходит из горизонтального положения в вертикальное. Какую скорость будет иметь в нижней точке второй груз?

Решение. В задаче рассматривается переменное движение системы материальных точек. Решать эту задачу нужно с помощью закона сохранения энергии. Приняв за первое положение системы начальное положение штанги, а за второе — ее положение в момент прохождения вертикали, записываем исходное уравнение:

$$A = W_2 - W_1.$$

Потенциальную энергию грузов будем отсчитывать от нижнего уровня OO.

Из внешних сил на движущийся рычаг с грузами действуют только силы со стороны оси. Если пренебречь трением, то можно считать, что работа этих сил равна нулю ($A = 0$) и поэтому полная энергия грузов не меняется. Поскольку масса рычага ничтожно мала, в горизонтальном положении система обладает механической энергией, равной сумме потенциальных энергий первого и второго грузов, т. е.

$$W_1 = m_1 gl_2 + m_2 gl_2$$

(кинетические энергии грузов в этом положении равны нулю)

В вертикальном положении механическая энергия системы равна:

$$W_2 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + m_1 g(l_1 + l_2) + \frac{m_2 v_2^2}{2},$$

где v_1 и v_2 — скорости соответственно первого и второго грузов.

Подставляя полученные выражения для полной энергии в исходную формулу и учитывая, что внешние силы работу не совершают, имеем:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + m_1 g (l_1 + l_2) + \frac{m_2 v_2^2}{2} - (m_1 + m_2) g l_2 = 0. \qquad (1)$$

В этом уравнении содержатся две неизвестные величины — скорости грузов. Второе недостающее уравнение получим, исходя из того, что в каждый рассматриваемый момент времени радиусы вращения всех точек рычага имеют одинаковую угловую скорость, и, следовательно, в положении *II*

$$\omega_2 = \frac{v_1}{l_1} = \frac{v_2}{l_2}. \qquad (2)$$

Исключая из уравнений (1) и (2) v_1, находим:

$$v_2 = l_2 \sqrt{\frac{2(m_2 l_2 - m_1 l_1) g}{m_2 l_2^2 + m_1 l_1^2}}.$$

Уровень отсчета высоты не обязательно проводить по нижнему положению тел, хотя ради общности в данной задаче мы поступили именно так. Если, например, уровень *OO* провести через начальное положение штанги, мы имели бы для энергий системы в *I* и *II* положениях:

$$W_1 = 0; \quad W_2 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + m_1 g l_1 + \frac{m_2 v_2^2}{2} - m_2 g l_2.$$

Обратите внимание, что потенциальная энергия второго груза здесь взята со знаком «минус», поскольку он оказался ниже уровня отсчета высоты. Подставив эти выражения энергии в исходную формулу, мы получили бы уравнение (1).

Пример 10. Для определения скорости пули применяется баллистический маятник (рис. 3.8), состоящий из деревянного бруска, подвешенного на легком стержне. При выстреле в горизонтальном направлении пуля массой m попадает в брусок и застревает в нем. Какова была скорость пули, если маятник поднимается на высоту h? Масса бруска равна M; трение в подвесе и массу стержня не учитывать. Какая часть кинетической энергии пули переходит в теплоту?

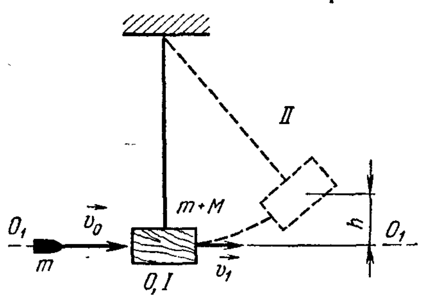

Рис 3.8

Решение. Это одна из распространенных задач на неупругий удар двух тел, в результате которого изменяется их положение по высоте.

Неупругим ударом называется удар, при котором происходит частичное или полное превращение механической энергии во внутреннюю. При неупругом ударе тел механическая энергия системы до соударения не равна механической энергии системы после удара; часть механической энергии расходуется на остаточную деформацию тел, вызывая их нагревание. Закон сохранения и превращения энергии для неупругого соударения тел имеет вид:

$$W_1 = W_2 + Q.$$

Здесь W_1 и W_2 — полная механическая энергия системы (всех тел) до удара и после удара; Q — количество теплоты, выделившейся при ударе.

Задачи на неупругое соударение тел решаются на основании закона сохранения импульса и закона сохранения энергии. Составление этих уравнений представляет главную часть решения почти всех задач подобного типа.

В данном примере рассматриваются три состояния системы: первое — до удара, второе — сразу же после удара и третье — конечное состояние тел в крайнем положении.

На чертеже (рис. 3.8) отмечаем эти состояния системы O, I, II, искомую скорость пули до удара $\vec{v}_0$, скорость $\vec{v}_1$ бруска и пули сразу же после того, как удар закончился и тела начали двигаться вместе, и, наконец, высоту подъема маятника h. Напомним, что во всех задачах на соударение тел, как неупругое, так и упругое, когда нет специальных оговорок, предполагается, что удар происходит очень быстро и за время взаимодействия тела не успевают заметно сместиться. Иными словами, мы считаем, что скорость $\vec{v}_1$ возникает мгновенно и во время удара маятник не отклоняется от вертикали.

До удара — в положении O — пуля имела скорость $\vec{v}_0$, брусок покоился и система имела импульс $\vec{p}_0 = m\vec{v}_0$, в конце удара — в положении I — пуля и брусок имеют скорость $\vec{v}_1$, импульс системы равен $\vec{p}_1 = (M + m)\vec{v}_1$. При нашем допущении относительно времени соударения можно считать, что во время удара внешние силы $\vec{T}$ и $m\vec{g}$ не влияют на скорости тел и, следовательно, система тело — брусок замкнутая. Согласно закону сохранения импульса

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_1 \quad \text{или} \quad mv_0 = (M + m)\,v_1. \tag{1}$$

Приступим теперь к составлению уравнения закона сохранения механической энергии, который имеет место при переходе системы из положения I в положение II.

Выбрав уровень O_1O_1 отсчета потенциальной энергии по нижнему положению тел и принимая во внимание, что при переходе системы из положения I в положение II внешние силы в системе тело — брусок — Земля работу не совершают, запишем формулу закона сохранения энергии:

$$W_2 - W_1 = 0.$$

Учитывая, что $W_1 = \frac{(m+M)v_1^2}{2}$, $W_2 = (m+M)gh$,

получим окончательно:

$$(m+M)gh - \frac{(m+M)v_1^2}{2} = 0 \quad \text{или} \quad v_1^2 = 2gh. \qquad (2)$$

Решая уравнения (1) — (2) относительно начальной скорости пули, получим:

$$v_0 = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}.$$

Чтобы ответить на второй вопрос задачи: найти $x = \frac{Q}{W_0}$ — часть кинетической энергии пули, перешедшей при ударе во внутреннюю энергию, нужно использовать закон сохранения и превращения энергии при переходе системы из состояния O в состояние I. Так как здесь происходит выделение теплоты, то

$$W_0 = W_1 + Q.$$

Следовательно,

$$x = \frac{W_0 - W_1}{W_0}. \qquad (3)$$

Поскольку $W_0 = \frac{mv_0^2}{2}$, $W_1 = \frac{(m+M)v_1^2}{2}$, то согласно (3) будем иметь:

$$x = 1 - \frac{m+M}{m}\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2. \qquad (4)$$

Исключая из уравнений (1) и (4) отношение скоростей, получим:

$$x = \frac{M}{m+M}.$$

Пример 11. Космический корабль массой M, летевший со скоростью $\vec{v}_1$, сталкивается с метеором массой m, летевшим со скоростью $\vec{v}_2$. Метеор попадает в середину лобовой части корабля под углом α к его продольной оси. Считая удар абсолютно упругим и пренебрегая трением между метеором и обшивкой корабля, определите скорость корабля после удара.

Решение. Абсолютно упругим ударом называется удар, при котором нет превращения механической энергии в другие виды энергии — полная механическая энергия системы остается неизменной.

Закон сохранения энергии для упругого соударения тел имеет вид:

$$W_1 = W_2,$$

где W_1 и W_2 — полная механическая энергия системы (всех тел) до и после удара.

Механизм взаимодействия идеально гладких тел при абсолютно упругом ударе вдоль линии центров тел можно представить примерно так. При соприкосновении и дальнейшем сближении тел возникают силы упругости, увеличивающиеся до тех пор, пока скорости тел не сравняются. В этот момент деформация и потенциальная энергия тел достигают наибольшего значения, а кинетическая энергия — минимального — тела движутся с одинаковой скоростью. Затем форма тел начинает восстанавливаться, силы упругости начинают расталкивать тела до тех пор, пока они не разойдутся. Потенциальная энергия деформации полностью переходит в кинетическую энергию. В результате кинетическая энергия перераспределяется между соударяющимися телами, причем ее суммарное значение не меняется.

Если в момент удара скорости тел направлены под углом α к линии их центров, то в процессе удара происходит не только деформация тел и сближение их центров, но и проскальзывание одного тела по поверхности другого. Помимо сил, направленных по нормали к поверхности соприкосновения, возникают силы трения скольжения, действие которых рассчитать очень трудно.

В тех случаях, когда тела достаточно гладкие и сила трения во много раз меньше силы упругого действия по нормали, задача об ударе решается сравнительно просто — она сводится к задаче о центральном ударе, поскольку при отсутствии трения импульс сил, направленных перпендикулярно линии центров, равен нулю и проекции векторов скорости на это направление не меняются.

Задачи на упругое соударение тел решают с помощью законов сохранения импульса и энергии. Обычно в этих задачах даются скорости тел до удара и нужно найти их скорости после соударения.

В данной задаче рассматриваются два состояния изолированной системы двух тел: первое — до удара, второе — после удара.

Обозначим скорости корабля и метеора до и после соударения соответственно через $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ и будем считать, что после удара корабль продолжал двигаться в прежнем направлении (рис. 3.9,*а*,*б*).

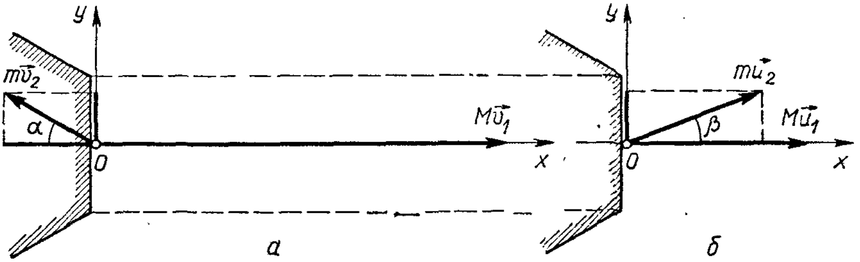

Рис. 3.9

Так как импульсы тел в момент удара направлены под углом α друг к другу, то для простоты решения спроецируем их на линию центров (примем ее за ось Ox) и нормаль к ней (ось Oy). Проекции импульсов корабля и метеора на эти оси равны:

$$\text{до удара: } Mv_1, \ -mv_2\cos\alpha, \quad mv_2\sin\alpha,$$
$$\text{после удара: } Mu_1, \ mu_2\cos\beta, \quad mu_2\sin\beta,$$

где β — угол, под которым отразится метеор.

Учитывая, что система корабль — метеор изолированная, запишем уравнение закона сохранения импульса по оси Ox:

$$Mv_1 - mv_2\cos\alpha = Mu_1 + mu_2\cos\beta. \tag{1}$$

Так как обшивка корабля идеально гладкая, то для проекций импульсов на ось Oy будем иметь:

$$mv_2\sin\alpha = mu_2\sin\beta. \tag{2}$$

Поскольку соударение корабля и метеора абсолютно упругое и внешние силы на них не действуют, в соответствии с законом сохранения энергии должно быть:

$$Mv_1^2 + mv_2^2 = Mu_1^2 + mu_2^2. \tag{3}$$

В отличие от закона сохранения импульса уравнение закона сохранения энергии в общем случае по осям не выполняется. Однако если взять прямоугольную систему координат, то в случае упругого удара уравнение закона сохранения механической энергии будет иметь место и для той ее части, которая приходится на движение тел по осям Ox и Oy (рекомендуем доказать это читателям). В данной задаче это уравнение для линии центров — оси Ox имеет вид[1]:

$$Mv_1^2 + mv_2^2\cos^2\alpha = Mu_1^2 + mu_2^2\cos^2\beta. \tag{4}$$

Чтобы найти из уравнений (1), (4) скорость корабля после столкновения, рекомендуется их сначала преобразовать, сгруппировав члены, содержащие одинаковую массу:

$$M(v_1 - u_1) = m(u_2\cos\beta + v_2\cos\alpha), \tag{5}$$
$$M(v_1^2 - u_1^2) = m(u_2^2\cos^2\beta - v_2^2\cos^2\alpha). \tag{6}$$

После этого нужно разделить первое уравнение на второе:

$$v_1 + u_1 = u_2\cos\beta - v_2\cos\alpha. \tag{7}$$

В результате мы получили два уравнения (5) и (7) первой степени, из которых гораздо легче найти скорости тел после удара, чем непосредственно из уравнений (1), (4). Умножая уравнение

[1] Для оси Oy мы имели бы $mv_2^2\sin^2\alpha = mu_2^2\sin^2\beta$, что эквивалентно уравнению (2).

(7) на m и вычитая его из (5), после простых преобразований для скорости корабля после удара получим:

$$u_1 = \frac{(M - m) v_1 - 2mv_2 \cos \alpha}{M + m}.$$

Аналогично для проекции вектора скорости метеора на ось Ox найдем:

$$u_{2x} \equiv u_2 \cos \beta = \frac{(M - m) v_2 \cos \alpha + 2Mv_1}{M + m}.$$

Из уравнения (2) проекция вектора скорости метеора на ось Oy равна:

$$u_{2y} = v_2 \sin \alpha.$$

Зная проекции u_{2x} и u_{2y}, можно найти модуль скорости $\vec{u}_2$:

$$u_2 = \sqrt{u_{2x}^2 + u_{2y}^2}.$$

Из уравнений (1), (2), (4) можно определить также направление вектора скорости метеора после удара:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{u_{2y}}{u_{2x}} = \frac{(M + m) v_2 \sin \alpha}{2Mv_1 + (M - m) v_2 \cos \alpha}.$$

Анализируя выражения для скоростей u_1 и u_2, которые тела будут иметь после абсолютно упругого удара, можно сделать следующие выводы:

1) при центральном лобовом соударении тел $\alpha = 0$ и скорости тел после удара равны:

$$u_1 = \frac{(M - m) v_1 - 2mv_2}{M + m},$$

$$u_2 \equiv u_{2x} = \frac{(M - m) v_2 + 2Mv_1}{M + m} \quad \text{и} \quad \beta = 0;$$

2) если при центральном лобовом соударении происходит упругое столкновение двух тел одинаковой массы ($m = M$), то $u_1 = -v_2$, $u_2 = v_1$, т. е. тела обмениваются скоростями.

Если при этом одно из тел покоилось, например $v_1 = 0$, то $u_1 = -v_2$, а $u_2 = 0$ — движущееся тело после удара остановится, неподвижное станет двигаться со скоростью второго тела;

3) если $\alpha \neq 0$, но $m = M$, для угла β разлета тел будем иметь:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_2}{v_1} \sin \alpha;$$

4) если $\alpha \neq 0$, $m = M$ и $v_1 = 0$, т. е. упругое тело налетает под углом α на неподвижное тело той же массы, тела разлетаются под углом 90°.