ком «плюс», против часовой стрелки — со знаком «минус». Если на тело действует несколько сил, расположенных в одной плоскости (плоская система сил), модуль результирующего момента этих сил относительно выбранной точки O равен алгебраической сумме отдельных моментов:

$$M=\sum_{i=1}^{n} M_i.$$

Систему двух равных антипараллельных сил, действующих на тело не по одной прямой, называют парой сил. Относительно любой точки, принадлежащей плоскости сил, пара сил создает одинаковый вращающий момент $M=Fl$, где F — модуль одной из сил, l — кратчайшее расстояние между их линиями действия (плечо пары).

Если на тело действует несколько сил, лежащих в одной плоскости, и тело находится в состоянии покоя или равномерного движения (поступательного или вращательного вокруг оси, проходящей через центр масс тела), геометрическая сумма приложенных сил и алгебраическая сумма моментов, взятых относительно произвольной точки, должны равняться нулю:

$$\sum\vec{F}=0; \quad \sum M=0. \tag{4.4}$$

Условия равновесия тела (4.4) можно представить в более удобном для практического применения виде, записав первое из них в форме (4.1′).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

Основная задача статики заключается в том, чтобы найти условия равновесия материальной точки, системы точек, тела или системы тел. Статические процессы представляют собой частный случай динамических процессов, при которых отсутствуют угловые и линейные ускорения, поэтому правила решения задач статики материальной точки принципиально ничем не отличаются от правил решения задач динамики. Вместо уравнения второго закона Ньютона здесь нужно составить вытекающее из него уравнение равновесия (4.1) или (4.1′).

Порядок действий при решении задач на статику такой.

1. а) Нужно сделать чертеж, на котором указать все силы, действующие на материальную точку, находящуюся в равновесии. (Если дана система материальных точек, это нужно проделать для каждой из них, освободив все точки от связей.)

б) Выбрать тело отсчета и связанную с ним прямоугольную систему координат Oxy и спроецировать на оси координат все силы, действующие на рассматриваемую точку. Как обычно, оси координат следует направлять так, чтобы максимум проекций обращалось в нуль. Найдя проекции сил, необходимо составить уравнения равновесия в проекциях по осям (4.1′) и решить полученную систему уравнений относительно неизвестной величины.

2. В общем случае решение задач на статику твердого тела сводится к составлению уравнений равновесия (4.4).

При условии $\sum \vec{F} = 0$ исключается всякое ускоренное поступательное движение тела, при условии $\sum M = 0$ исключается его ускоренное вращение. Главное в этих задачах — правильно расставить силы, действующие на тело, и затем составить уравнение моментов относительно той или иной точки. При этом нужно точно указать линии действия сил, которые отмечаются на чертеже. Составление уравнений равновесия в проекциях обычно не вызывает серьезных затруднений, если только все силы расставлены правильно.

Чтобы составить уравнение равновесия твердого тела, необходимо:

а) Сделать чертеж и указать все силы, приложенные к рассматриваемому телу. Само тело нужно изобразить свободным от связей, заменив их действие силами. Особое внимание здесь нужно обратить не только на количество и направление сил, но и на то, в какой точке тела эти силы приложены, как проходят линии действия сил.

б) Затем можно приступить к составлению уравнения моментов. Для этого нужно прежде всего выбрать точку O, относительно которой будут рассматриваться моменты действующих сил. Точку O можно брать произвольно, однако во многих случаях удачный выбор этой точки значительно упрощает решение и позволяет применять только одно уравнение моментов (без уравнения равновесия сил). Учитывая это, во всех задачах на статику тела, перед составлением уравнений равновесия, необходимо тщательно подумать над тем, как лучше составить уравнение моментов.

Если невозможно или не удается ограничиться одним уравнением моментов, то точку O в общем случае удобно выбирать так, чтобы через нее проходило как можно больше линий действия сил. Моменты этих сил относительно такой точки будут равны нулю (поскольку их плечи будут равны нулю), и уравнение моментов окажется предельно простым.

Выбрав точку O, нужно найти плечи всех сил относительно этой точки, помня, что плечо — это перпендикуляр, опущенный из точки O на линию действия силы. После этого можно приступить к составлению уравнения моментов, следя за знаками моментов рассматриваемых сил.

в) Если в полученное уравнение моментов входит две и более неизвестные величины, к нему можно добавить уравнения моментов, взятых относительно других точек, однако значительно проще использовать уравнения равновесия в проекциях. Для этого нужно выбрать оси координат Ox и Oy и спроецировать на них все силы, действующие на тело.

Поскольку тело находится в равновесии и в любом направлении у тела ускорения нет, проекции сил по осям должны быть связаны между собой уравнениями (4.1′).

Уравнение моментов и уравнения равновесия в проекциях дают систему трех независимых уравнений. Решая их совместно относительно искомой величины, мы и получим ответ на вопрос задачи.

г) Если тело, находящееся в равновесии, имеет закрепленную ось вращения, исключающую всякое поступательное движение, то можно ограничиться лишь составлением уравнения моментов, так как для равновесия такого тела достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов приложенных сил относительно какой-либо точки, лежащей на заданной оси, равнялась нулю.

д) Если на тело действует несколько сил, лежащих в одной плоскости и направленных под углом друг к другу (сходящаяся система сил), то равновесие тела возможно лишь при условии, что линии действия приложенных сил пересекаются в одной точке. В задачах на статику, когда дается сходящаяся система сил и направления линий действия сил очевидны или их можно найти, не прибегая к математическим выкладкам, ответ можно получить на основании векторного уравнения $\sum\vec{F}=0$, не используя уравнение моментов. Для этого все силы, действующие на тело (систему тел), нужно перенести по линии их действия в одну точку и воспользоваться подобием полученных треугольников сил и геометрических треугольников, образуемых элементами системы, находящейся в равновесии. Задача решается на основании построений и правил геометрии; математические выкладки здесь оказываются значительно проще, чем при составлении общих условий равновесия.

Пример 1. На ледяной горке с углом при основании $\alpha=30°$ находятся санки массой $m=10{,}2$ кг. Коэффициент трения между санками и горкой $\mu=0{,}1$. Какую минимальную силу нужно приложить к санкам, чтобы они находились в равновесии? Какой минимальной силой санки можно поднимать по наклонной плоскости?

Р е ш е н и е. Это задача на статику материальной точки (геометрические размеры санок не заданы). Анализируя задачу, нужно прежде всего обратить внимание на следующее. Санки не могут находиться в равновесии на горке, так как коэффициент трения $\mu<\operatorname{tg}\alpha$ $(0{,}1<\operatorname{tg}30°)$. Чтобы санки удержать в равновесии, к ним нужно приложить силу под некоторым углом β к наклонной плоскости так, чтобы сила препятствовала скольжению санок и прижимала их к поверхности, увеличивая силу трения.

Делаем схематический чертеж (рис. 4.1) и указываем на нем силы, действующие на санки: силу тяжести, равную $m\vec{g}$, максимальную силу трения покоя $\vec{F}_{тр}$, нормальную реакцию опоры $\vec{N}$ и искомую силу $\vec{F}$. Под действием приложенных сил санки находятся в равновесии (на грани скольжения), и, следовательно, уравнение равновесия в векторной форме имеет вид:

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = 0.$$

Чтобы найти связь между модулями векторов, входящих в это уравнение, и определить затем искомую силу, нужно записать условие равновесия санок в проекциях. Для этого выбираем оси координат Ox и Oy, как показано на рисунке, и проецируем на них силы, действующие на санки. Проекции сил по осям равны: $mg\sin\alpha$, $-F\cos\beta$, $-F_{тр}$, N, $-F\sin\beta$, $-mg\cos\alpha$.

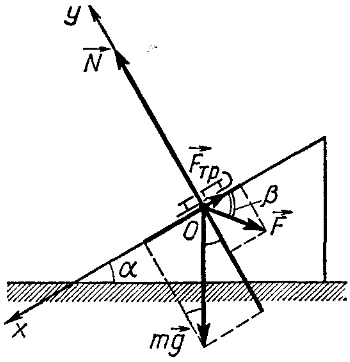

Рис. 4.1

Уравнение равновесия в проекциях на ось Ox имеет вид:

$$mg\sin\alpha - F\cos\beta - \mu N = 0; \qquad (1)$$

в проекциях на ось Oy:

$$N - mg\cos\alpha - F\sin\beta = 0. \qquad (2)$$

При составлении первого уравнения сразу учтено, что $F_{тр} = \mu N$.

Решая уравнения (1) и (2) совместно относительно искомой силы, получим:

$$F = \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\beta + \mu\sin\beta} mg. \qquad (3)$$

Из физических соображений и анализа последнего выражения видно, что с изменением угла β модуль силы $\vec{F}$, необходимой для удержания санок, будет изменяться. Наименьшим он окажется в том случае, когда знаменатель дроби будет наибольшим. Чтобы найти максимальное значение функции $\varphi(\beta) = \cos\beta + \mu\sin\alpha$, нужно найти производную $\varphi'(\beta)$, приравнять ее к нулю и, решив полученное уравнение, определить значение аргумента, при котором функция имеет экстремум.

$$\varphi'(\beta) = -\sin\beta + \mu\cos\beta = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\beta = \mu. \qquad (4)$$

В том, что при найденном значении угла β знаменатель дроби (3) имеет именно максимальное значение, легко убедиться, взяв вторую производную от φ по β,— она меньше нуля. Действительно,

$$\varphi''(\beta) = -\cos\beta - \mu\sin\beta < 0,$$

так как $\beta < \pi/2$.

Учитывая, что $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}$ и $\sin\beta = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}$, согласно (3) и (4) для минимальной силы, необходимой для удержания санок на горке, получаем выражение

$$F = F_{\min} = \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sqrt{1+\mu^2}} mg; \quad \operatorname{tg}\beta = \mu.$$

Подставляя числовые значения, найдем $F_{\min} = 41{,}4$ Н; $\beta \approx 5{,}7°$.

Если санки поднимать в горку равномерно, то сила трения будет действовать вниз — по оси Ox, препятствуя движению санок. Сила тяги $\vec{F}$ должна в данном случае не только смещать санки, но и отжимать их от поверхности, уменьшая тем самым силу трения. Нетрудно заметить, что при равномерном движении на санки действуют такие же силы, что и в предыдущем случае, но только проекция силы трения $F_{\text{тр}}$ и проекция $F\sin\beta$ имеют противоположные знаки. Учитывая это, согласно (1) и (2) можно записать:

$$mg\sin\alpha + \mu N - F\sin\beta = 0, \tag{5}$$
$$N + F\sin\beta - mg\cos\alpha = 0. \tag{6}$$

Решая уравнения совместно относительно модуля силы тяги $\vec{F}$ и анализируя полученный результат, аналогично предыдущему получим:

$$F = \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\beta + \mu\sin\beta} mg;$$

при

$$\operatorname{tg}\beta = \mu \quad F = F_{\min} = \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\sqrt{1+\mu^2}} mg = 58{,}6 \text{ Н}.$$

Пример 2. Однородный ящик, имеющий форму куба, опирается одним ребром на пол, другим — на вертикальную стену. Коэффициент трения между полом и ящиком, а также между ящиком и стеной равен μ. При каких значениях угла между полом и гранью ящика возможно его равновесие?

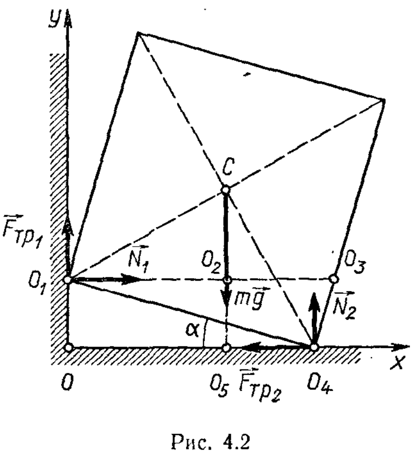

Рис. 4.2

Решение. Это задача на статику твердого тела, не имеющего закрепленной оси вращения.

Делаем чертеж (рис. 4.2) и, полагая ребро куба равным l, расставляем приложенные к нему силы. Со стороны стены на него действуют нормальная реакция опоры $\vec{N}_1$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр1}$, препятствующая скольжению ящика по стене вниз. Со стороны пола на ящик действуют реакция опоры $\vec{N}_2$ и сила трения $\vec{F}_{тр2}$, препятствующая скольжению куба вправо, со стороны Земли — сила тяжести, равная $m\vec{g}$, проходящая через центр куба.

Поскольку куб покоится, сумма моментов всех сил относительно любой точки O должна равняться нулю. Чтобы уравнение моментов было предельно простым, выбираем точку O так, чтобы через нее проходило наибольшее число линий действия сил. Такому условию в данной задаче удовлетворяют шесть точек O, O_1, ..., O_5. Через каждую из них проходят две линии действия сил. Возьмем одну из них, например O_4.

Относительно этой точки моменты сил $\vec{N}_2$ и $\vec{F}_{тр2}$ равны нулю, так как плечи этих сил относительно точки O_4 равны нулю.

Находим плечи сил $m\vec{g}$, $\vec{N}_1$ и $\vec{F}_{тр1}$ относительно O_4. Из треугольников OO_1O_4 и CO_4O_5 они получаются равными соответственно $l\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(45° + \alpha)$, $l\sin\alpha$ и $l\cos\alpha$.

Учитывая, что ящик стоит под предельным углом на грани скольжения и, следовательно, силы трения покоя имеют наибольшие значения, равные соответственно $F_{тр1} = \mu N_1$ и $F_{тр2} = \mu N_2$, а также знаки моментов, составляем уравнение моментов:

$$mgl\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(45° + \alpha) - N_1 l\sin\alpha - \mu N_1 l\cos\alpha = 0. \qquad (1)$$

Из полученного уравнения мы не можем найти угол наклона, поэтому нужно составить уравнение равновесия для проекций.

Проведем оси координат Ox и Oy, как показано на рисунке, и, поскольку все силы направлены по этим осям, записываем уравнение равновесия ящика в проекциях:
на ось Ox:

$$N_1 - \mu N_2 = 0; \qquad (2)$$

на ось Oy:

$$\mu N_1 - mg + N_2 = 0. \qquad (3)$$

Составив уравнения равновесия (1) — (3) и решая их совместно относительно искомого неизвестного α — минимального угла наклона ящика к горизонту, получим:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{1 + 2\mu}.$$

Максимальный угол, под которым может стоять ящик, равен, очевидно, $\pi/4$; таким образом,

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{1 + 2\mu} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

Пример 3. Пять шаров, массы которых равны соответственно m, $2m$, $3m$, $4m$ и $5m$, укреплены на стержне так, что их центры находятся на расстоянии l друг от друга. Пренебрегая массой стержня, найдите центр тяжести системы.

Р е ш е н и е. В основе решения задач на определение центра тяжести системы материальных точек (системы тел с известным положением центра тяжести каждого тела) лежит следующее обстоятельство. Если в центре тяжести системы частиц, жестко связанных друг с другом, приложить вертикально вверх уравновешивающую силу $\vec{F}$, равную по модулю силе тяжести всех частиц, то система будет находиться в равновесии. Сумма моментов всех сил (включая, конечно, и уравновешивающую силу) должна в этом случае равняться нулю относительно любой точки.

Пусть массы частиц системы равны m_0, m_1, ..., m_n и положение центра тяжести мы будем отсчитывать по горизонтали (ось Ox) от центра тяжести крайней левой частицы (рис. 4.3, a). Тогда расстояние от точки O до линии действия уравновешивающей силы — координату x_C центра тяжести системы можно найти из уравнения моментов, составленного относительно точки O:

$$m_0 g \cdot 0 + m_1 g x_1 + ... + m_n g x_n - F x_C = 0,$$

где x_1, x_2 и т. д.— плечи сил $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$, ..., $m_n\vec{g}$ относительно центра тяжести левой частицы. Подставляя в это уравнение вместо модуля уравновешивающей силы его выражение $F = m_0 g + m_1 g + ... + m_n g$ и решая уравнение относительно x_C, получим:

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n}{m_0 + m_1 + ... + m_n},$$ или, короче,

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=0}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M},$$

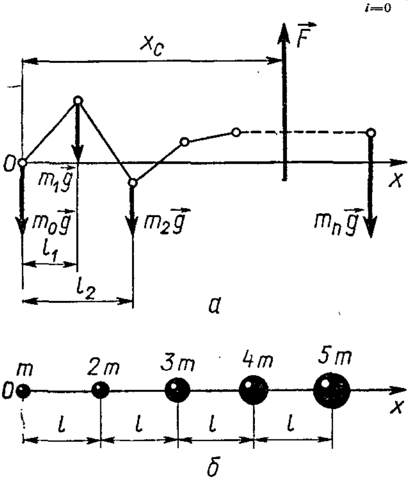

Рис. 4.3

где m_i и x_i — масса и координата i-й частицы; M — масса всех частиц.

Аналогично находится y_C — координата центра тяжести системы материальных точек по оси Oy.

Полученные выражения для x_C и y_C являются одними из основных формул механики, позволяющими определить координаты центра тяжести системы материальных точек на плоскости.

Решение нашей задачи основано на только что полученном результате.

Сделав чертеж (рис. 4.3, *б*), расставляем все силы, действующие на систему. Выбираем точку отсчета O в центре первого шара и на произвольном от нее расстоянии x мысленно прикладываем к стержню уравновешивающую силу $\vec{F}$, модуль которой равен модулю силы тяжести, действующей на всю систему:

$$F = mg + 2mg + 3mg + 4mg + 5mg.$$

Находим плечи всех сил относительно O. Они равны соответственно 0, l, $2l$, $3l$ и $4l$.

По формуле (4.5) определяем положение центра тяжести:

$$x = \frac{2ml + 3m \cdot 2l + 4m \cdot 3l + 5m \cdot 4l}{m + 2m + 3m + 4m + 5m} = \frac{8}{3} l.$$

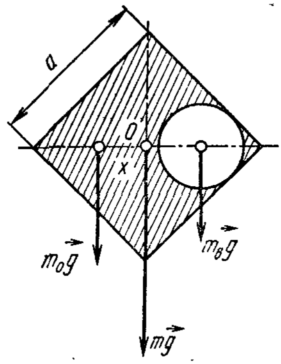

Рис. 4.4

Пример 4. Определите положение центра тяжести однородной квадратной пластинки со стороной a, в которой вырезано круглое отверстие радиусом $a/4$ так, как показано на рисунке 4.4.

Решение. На примере задачи мы рассмотрим, как определяется положение центра тяжести однородных плоских фигур, имеющих вырез. Элементарными методами эти задачи решаются лишь при условии, что положение центра тяжести целой фигуры и центра тяжести вырезанной части известно.

В задачах этого типа фигуру с вырезом желательно изобразить так, чтобы ось симметрии была горизонтальна. В основе вывода расчетного соотношения лежит следующее обстоятельство, имеющее общий характер. Если вставить вырезанную часть пластинки на прежнее место, то силу тяжести всего тела, равную $m\vec{g}$ (в данной задаче квадрата), можно представить как сумму двух параллельных сил — силы тяжести вырезанной части (диска), равной $m_в\vec{g}$, и силы тяжести оставшейся фигуры (квадрата с отверстием), равной $m_0\vec{g}$. Первая из этих сил приложена в центре тяжести невырезанной фигуры (квадрата), вторая — в центре тяжести вырезанной части (круга), третья — в неизвестном пока центре тяжести пластинки с отверстием. Если известны равнодействующая сила ($m\vec{g}$), одна из параллельных сил ($m_в\vec{g}$) и расстояние l между линиями действия этих сил, легко определить положение линии действия второй силы ($m_0\vec{g}$), а следовательно, и расстояние x между центрами тяжести вырезанной и целой фигур. Действительно, относительно точки O должно быть

$$m_0 g x = m_В g l \quad \text{или} \quad (m - m_В) x = m_В l,$$

так как модуль силы тяжести оставшейся части фигуры равен:

$$m_0 g = mg - m_В g.$$

Из предыдущего равенства находим

$$x = \frac{m_B l}{m - m_B},$$

или окончательно:

$$x = \frac{S_B}{S - S_B} l,$$

поскольку масса однородной пластинки одинаковой толщины h равна: $m = \varrho h S$, где S — площадь; ϱ — плотность материала.

В данном примере площадь вырезанной части $s_B = \pi \frac{a^2}{16}$, площадь всей фигуры $S = a^2$. Расстояние между центрами тяжести вынутого диска и квадрата равно:

$$l = \frac{\sqrt{2}}{4} a.$$

Подставляя в расчетную формулу для x вместо S_B, l и S их значения и проводя упрощения, получим:

$$x = \frac{\pi \sqrt{2}}{4(16 - \pi)} a.$$

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 4

4.1. Груз массой 50 кг прижат к вертикальной стене силой 118 Н. Какую минимальную силу необходимо приложить к грузу, чтобы удержать его в покое; чтобы поднимать равномерно вверх? Коэффициент трения скольжения равен 0,3. Что будет происходить с грузом, если в вертикальном направлении прикладывать силу 460 Н? 490 Н? Какова будет при этом сила трения?

4.2. В песчаном грунте была вырыта траншея, поперечное сечение которой имеет форму равносторонней трапеции с параллельными верхним и нижним основаниями. Когда песок высох, края траншеи осыпались и размеры ее стали такими: верхнее основание 9 м, нижнее основание 1 м, глубина 3 м. Определите коэффициент трения между песчинками в сухом грунте.

4.3. Какой груз можно удержать на наклонной плоскости длиной 1 м и высотой 0,5 м силой 49 Н, направленной параллельно наклонной плоскости, если коэффициент трения равен 0,4? Как изменится ответ, если силу прикладывать перпендикулярно наклонной плоскости?

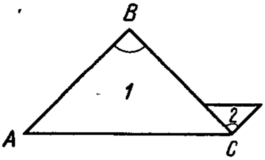

Рис. 4.5

4.4. На горизонтальной шероховатой доске лежат две пластинки, имеющие форму равнобедренных прямоугольных треугольников (рис. 4.5). Пластинку *1* сдвигают равномерно вправо вдоль гипотенузы на ее длину. Пластинка *2* при этом скользит по катету BC и проходит 3/4 его длины. Чему равен коэффициент трения между пластинками?