4.35. На полу лежит стержень массой M и длиной L. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы стержень повернуть на полу на угол α вокруг одного из его концов? Коэффициент трения между стержнем и полом μ. Какие минимальные силы нужно приложить к концам стержня, чтобы вращать его на полу с постоянной угловой скоростью вокруг середины стержня?

4.36. На идеально гладкой горизонтальной плоскости лежит обруч массой M и радиусом R. По обручу начинает ползти жук массой m. Какие траектории описывают центр обруча и жук? На какое расстояние сместится жук относительно своего начального положения, пройдя четвертую часть кольца?

Глава 5

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

1. Колебательным движением называют движение, при котором происходит *частичная или полная повторяемость* состояния системы по времени. Если значения физических величин, характеризующих данное колебательное движение, повторяются через равные промежутки времени, колебания называют периодическими.

Самым простым колебательным движением является гармоническое колебание материальной точки. Гармоническим называют колебание, в процессе которого величины, характеризующие движение (смещение, скорость, ускорение, сила и т. д.), изменяются с течением времени по закону синуса или косинуса (гармоническому закону).

Основные законы гармонических колебаний материальной точки можно установить, анализируя равномерное круговое движение точки и движение ее проекции на оси прямоугольной системы координат Oxy, коллинеарные двум диаметрам окружности. Если точка B равномерно движется по окружности радиусом x_m со скоростью $\vec{v}_m$ (рис. 5.1), то ее проекция на горизонталь-

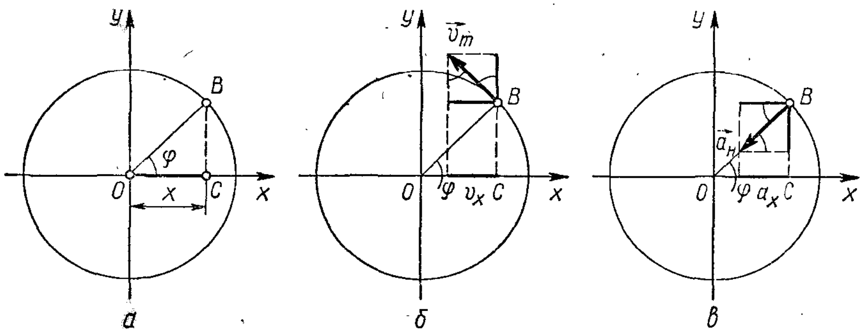

Рис. 5.1

ный диаметр — точка C совершает гармонические колебания вдоль оси Ox. Проекция точки B на вертикальный диаметр совершает гармонические колебания вдоль оси Oy.

Смещение точки C от начала отсчета движения O — ее координата x в каждый момент времени определяется уравнением

$$x = x_m \cos(\varphi + \varphi_0) \text{ или } x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (5.1)$$

где t — время, отсчитываемое от момента начала наблюдения за движением; φ_0 — угол, характеризующий положение точки в начальный момент времени (на чертеже $\varphi_0 = 0$); x_m — максимальное смещение точки; ω — угловая скорость вращения радиус-вектора точки B.

2. Проецируем вектор скорости $\vec{v}_m$ и вектор нормального ускорения $\vec{a}_н$ на оси Ox и Oy. Для проекций v_x и a_x получим:

$$v_x = -v_m \sin(\omega t + \varphi_0);$$
$$a_x = -a_н \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Поскольку $v_m = x_m\omega$ и $a_н = x_m\omega^2$, уравнения скорости и ускорения точки, совершающей гармонические колебания, можно представить в виде:

$$v_x = -x_m\omega \sin(\omega t + \varphi_0); \quad (5.2)$$
$$a_x = -x_m\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x. \quad (5.3)$$

Знак «минус» в последней формуле указывает на то, что ускорение при гармоническом колебании всегда направлено в сторону, противоположную смещению. Эти же результаты мы получили бы, взяв первую и вторую производную по времени от координаты колеблющейся точки (5.1).

Из формул (5.2) и (5.3) вытекает, что:

1) максимальные значения скорости и ускорения колеблющейся точки равны:

$$v_m = x_m\omega, \quad (5.2')$$
$$a_m = x_m\omega^2; \quad (5.3')$$

2) скорость и ускорение сдвинуты друг относительно друга по фазе на угол $\pi/2$. Там, где скорость наибольшая, ускорение равно нулю, и наоборот;

3) во всех точках траектории ускорение направлено к центру колебаний — точке O.

3. Согласно формуле (5.3), уравнение второго закона Ньютона для материальной точки массой m, совершающей гармонические колебания вдоль оси Ox, можно представить в виде:

$$F_x = ma_x = mx_m\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -m\omega^2 x, \quad (5.4)$$

где F_x — проекция равнодействующей всех сил, приложенных к точке.

Произведение $m\omega^2$, стоящее в правой части уравнения (5.4), — величина постоянная, поэтому материальная точка может совершать гармонические колебания лишь при условии, что в процессе движения сама возвращающая сила изменяется пропорционально смещению и направлена к положению равновесия, т. е. когда

$$F_x = -kx. \tag{5.5}$$

Здесь k — постоянный для данной системы коэффициент. В каждом конкретном случае его можно выразить через величины, характеризующие колебательную систему. Согласно формулам (5.4) и (5.5) коэффициент k в то же время всегда равен:

$$k = m\omega^2. \tag{5.6}$$

Сила, изменяющаяся по закону (5.5), называется квазиупругой силой.

4. Кинетическая энергия гармонически колеблющейся точки равна:

$$W_k = \frac{mv_x^2}{2} = \frac{mx_m^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2}. \tag{5.7}$$

В процессе гармонического колебания сила изменяется пропорционально смещению, поэтому в каждый момент времени потенциальная энергия точки равна:

$$W_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{mx_m^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2}. \tag{5.8}$$

Полная механическая энергия колеблющейся точки

$$W = W_k + W_p = \frac{m\omega^2 x_m^2}{2}. \tag{5.9}$$

5. Всякое колебательное движение, в том числе и гармоническое, характеризуется амплитудой, периодом колебаний, частотой, круговой частотой и фазой колебаний.

Амплитудой называют наибольшее значение колеблющейся величины (смещения, скорости, ускорения и т. д.). Число полных колебаний, совершаемых в единицу времени, называют частотой колебаний f:

$$f = \frac{n}{t}.$$

Круговая частота — это число полных колебаний, совершаемых в течение 2π с:

$$\omega = \frac{2\pi n}{t} = 2\pi f.$$

Периодом называют время, в течение которого совершается одно полное колебание:

$$T = \frac{t}{n} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}.$$

Величина $\omega t+\varphi_0$, стоящая под знаком тригонометрической функции в формулах (5.1) и характеризующая значение колеблющейся величины в данный момент времени, называется фазой колебаний. Величина φ_0, определяющая значение колеблющейся величины в начальный момент времени, называется начальной фазой колебаний.

6. Если на тело массой m действует квазиупругая сила, то согласно (5.6) независимо от природы этой силы тело совершает гармонические колебания с круговой частотой

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

В простейшем случае, когда тело массой m совершает колебания на пружине, коэффициентом k является жесткость пружины и период этих колебаний равен:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{5.10}$$

7. Материальная точка, подвешенная на легкой невесомой и нерастяжимой нити, совершающая колебания под действием силы тяжести и натяжения нити, называется математическим маятником. При малых углах отклонения нити от положения равновесия (точнее, бесконечно малых) колебания математического маятника являются гармоническими с периодом колебаний:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{a}}, \tag{5.11}$$

где l — длина нити маятника; a — модуль ускорения, сообщаемого грузу силой натяжения нити.

В наиболее распространенном частном случае, когда точка подвеса маятника находится в равновесии в поле земного тяготения и сила натяжения нити равна по модулю mg, ускорение $\vec{a}$ численно равно ускорению свободного падения на данной широте и направлено вертикально вверх. Полное ускорение математического маятника, как и во всяком гармоническом колебании, определяется уравнением (5.3).

8. Время, показываемое маятниковыми часами, пропорционально числу полных колебаний маятника n. Это число при заданном времени наблюдения t зависит от периода колебаний, а следовательно, от длины маятника и ускорения, создаваемого силой натяжения нити. Если за время t_1 маятниковые часы, идущие точно, делают n_1 полных колебаний, то при изменении l и a они за то же время t_1 будут делать n_2 колебаний — станут отставать или уходить вперед. Показания точных и неточных маятниковых часов окажутся при этом равными соответственно $t_1=Kn_1$ и $t_2=Kn_2$, где K — коэффициент пропорциональности, зависящий от конструкции часов. Учитывая, что

$$t_1 = n_1 T_1 = n_2 T_2; \quad T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{a_1}}; \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{a_2}}$$

и разность показаний точных и неточных часов равна $\pm\Delta t = t_1 - t_2$, из составленных уравнений получим:

$$\pm \Delta t = t_1 \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = t_1 \left(1 - \sqrt{\frac{l_1 a_2}{l_2 a_1}}\right). \qquad (5.12)$$

Эта формула служит исходным соотношением для расчета поправки к маятниковым часам. Знак «плюс» соответствует случаю, когда $t_1 > t_2$ — неточные часы отстают; знак «минус», когда $t_1 < t_2$ — неточные часы спешат.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

Задачи о колебательном движении материальной точки можно разделить на две группы: задачи, требующие применения общих уравнений гармонических колебаний, и задачи о математических маятниках и маятниковых часах.

Основная трудность при решении задач первого типа заключается в составлении уравнений (5.1) — (5.9). Получив же эти уравнения и внимательно проанализировав их, можно легко довести решение до конца, так как все дальнейшие расчеты почти целиком сводятся к математическим выкладкам.

Следует обратить особое внимание на составление уравнения второго закона Ньютона для точки, совершающей гармонические колебания. Это уравнение в конечном итоге приводит к формуле $k = m\omega^2$, в которой коэффициент k должен быть выражен через те или иные величины, характеризующие колебательную систему. Нахождение развернутого выражения для этого коэффициента фактически и представляет основное содержание решения задач такого типа.

Задачи второй группы требуют детального анализа физического явления и глубокого понимания основных формул. Эти задачи включают в себя задачи, связанные с нахождением величин, характеризующих колебание маятников в инерциальных и неинерциальных системах, и задачи на расчет поправок к показаниям маятниковых часов.

При ускоренном движении точки подвеса математического маятника изменяется сила натяжения нити, что приводит к изменению равнодействующей силы и, следовательно, частоты и периода колебаний. Вывести формулу периода колебаний точки, обладающей не только относительным, но и переносным ускорением, элементарными методами сравнительно трудно. Однако ее легко получить для каждого конкретного случая, внося соответствующую поправку в формулу периода математического маятника (5.11).

Если маятник в том или ином направлении приобретает переносное ускорение $\vec{a}_п$, то причиной этому служит изменение силы