$$t_1 = n_1 T_1 = n_2 T_2;\quad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{a_1}};\quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{a_2}}$$

и разность показаний точных и неточных часов равна $\pm\Delta t = t_1 - t_2$, из составленных уравнений получим:

$$\pm\Delta t = t_1\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = t_1\left(1 - \sqrt{\frac{l_1 a_2}{l_2 a_1}}\right). \qquad (5.12)$$

Эта формула служит исходным соотношением для расчета поправки к маятниковым часам. Знак «плюс» соответствует случаю, когда $t_1 > t_2$ — неточные часы отстают; знак «минус», когда $t_1 < t_2$ — неточные часы спешат.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

Задачи о колебательном движении материальной точки можно разделить на две группы: задачи, требующие применения общих уравнений гармонических колебаний, и задачи о математических маятниках и маятниковых часах.

Основная трудность при решении задач первого типа заключается в составлении уравнений (5.1) — (5.9). Получив же эти уравнения и внимательно проанализировав их, можно легко довести решение до конца, так как все дальнейшие расчеты почти целиком сводятся к математическим выкладкам.

Следует обратить особое внимание на составление уравнения второго закона Ньютона для точки, совершающей гармонические колебания. Это уравнение в конечном итоге приводит к формуле $k = m\omega^2$, в которой коэффициент k должен быть выражен через те или иные величины, характеризующие колебательную систему. Нахождение развернутого выражения для этого коэффициента фактически и представляет основное содержание решения задач такого типа.

Задачи второй группы требуют детального анализа физического явления и глубокого понимания основных формул. Эти задачи включают в себя задачи, связанные с нахождением величин, характеризующих колебание маятников в инерциальных и неинерциальных системах, и задачи на расчет поправок к показаниям маятниковых часов.

При ускоренном движении точки подвеса математического маятника изменяется сила натяжения нити, что приводит к изменению равнодействующей силы и, следовательно, частоты и периода колебаний. Вывести формулу периода колебаний точки, обладающей не только относительным, но и переносным ускорением, элементарными методами сравнительно трудно. Однако ее легко получить для каждого конкретного случая, внося соответствующую поправку в формулу периода математического маятника (5.11).

Если маятник в том или ином направлении приобретает переносное ускорение $\vec{a}_п$, то причиной этому служит изменение силы натяжения $\vec{F}_н$ на некоторую величину $\Delta\vec{F}_н$, поскольку $m\vec{g}$ не меняется и на маятник другие силы не действуют. Ускорение $\vec{a}$, сообщаемое силой натяжения нити, здесь равно сумме ускорений $-\vec{g}$ и $\vec{a}_п$, сообщаемых силой $\vec{F}_н$ и ее приращением $\Delta\vec{F}_н$, т. е.

$$\vec{a} = -\vec{g} + \vec{a}_п.$$

Найдя обычными методами модуль этого ускорения и подставив его в соотношение (5.11), мы получим формулу периода колебаний математического маятника с учетом движения точки подвеса.

Пример 1. Небольшой груз совершает колебания по закону $x = 0{,}02 \sin \pi (t + 0{,}5)$ (все величины выражены в единицах СИ). Определите амплитуду, период, начальную фазу колебаний, а также максимальную скорость и ускорение груза. Через сколько времени после начала движения груз будет проходить через положение равновесия? За какое время после начала движения груз проходит расстояние, равное половине амплитуды колебаний? Чему равна средняя скорость движения груза на этом участке пути?

Р е ш е н и е. Сравнивая заданное уравнение с уравнением гармонических колебаний (5.1), записанным в общем виде, легко заметить, что в нашем примере $x_m = 0{,}02$ м. Фаза колебаний равна:

$$\varphi = \pi (t + 0{,}5) = \pi t + 0{,}5\pi,$$

откуда следует, что угловая частота $\omega = \pi$ $с^{-1}$, период $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2$ с, а начальная фаза $\varphi_0 = 0{,}5\pi$.

Зная амплитуду колебаний и угловую частоту, можно найти максимальную скорость и ускорение колеблющейся точки. Согласно (5.2′) и (5.3′) они будут равны:

$$v_m = 0{,}02\pi \ \text{м/с};$$
$$a_m = 0{,}02\pi^2 \ \text{м/с}^2.$$

Уравнение движения колеблющейся точки позволяет определить ее смещение в любой момент времени и найти время, по истечении которого точка сместится от положения равновесия на заданное расстояние. В момент прохождения положения равновесия $x = 0$. Подставляя это значение в закон движения точки, получим:

$$0 = 0{,}02 \sin \pi (t + 0{,}5),$$

откуда $\pi (t + 0{,}5) = n\pi$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, и, следовательно, промежутки времени, спустя которые груз будет проходить положение равновесия, определяются формулой

$$t = n - 0{,}5,$$

где t измеряется в секундах.

Первый раз груз пройдет положение равновесия через время $t = (1 - 0{,}5)$ с $= 0{,}5$ с $(n = 1)$ после начала отсчета движения.

Чтобы найти время прохождения расстояния s, равного первой половине амплитуды, нужно в законе движения груза положить $x = x_m - s = 0{,}5x_m = 0{,}01$ м и решить уравнение относительно t. Делая такую подстановку, находим $0{,}01 = 0{,}02 \sin \pi (t + 0{,}5)$, откуда $\pi/3 = \pi t$, и, следовательно, искомое время будет равно $t_1 = {}^1/_3$ с.

Средняя скорость $v_{ср}$ точки за это время по определению равна:

$$v_{ср} = \frac{x_m}{2t_1} = 0{,}03 \text{ м/с}.$$

Пример 2. Шарик массой $m = 20$ г колеблется с периодом $T = 2$ с. В начальный момент времени шарик обладал энергией $W = 0{,}01$ Дж и находился от положения равновесия на расстоянии $x_1 = 2{,}5$ см. Запишите уравнение гармонического колебания и закон изменения возвращающей силы с течением времени.

Решение. Законы изменения смещения и возвращающей силы можно записать, если мы знаем амплитуду, круговую частоту, начальную фазу и массу колеблющейся точки.

По условию задачи период колебаний нам известен, следовательно, круговая частота

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \qquad (1)$$

Кроме того, известна полная энергия колеблющейся точки, которая согласно формуле (5.7) независимо от положения точки равна:

$$W = \frac{m\omega^2 x_m^2}{2}. \qquad (2)$$

Наконец, используя последнее условие задачи, можно записать уравнение движения для начального момента, когда $t = 0$:

$$x_1 = x_m \cos \varphi_0. \qquad (3)$$

Из соотношений (1) — (3) находим:

$$\omega = \pi \text{ с}^{-1}; \qquad x_m = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2W}{m}}; \qquad x_m \approx 0{,}32 \text{ м};$$

$$\cos \varphi_0 = \frac{x_1}{x_m} \approx 0{,}78,$$

следовательно,

$$\varphi_0 \approx 51° \approx 0{,}3\pi.$$

Подставляя найденные значения x_m, ω и φ_0 в уравнения (5.1) и (5.4) и проводя упрощения, получим (в единицах СИ) ответ на вопрос задачи:

$$x = 0{,}32 \cos \pi (t + 0{,}3); \qquad F = 0{,}063 \cos \pi (t + 0{,}3).$$

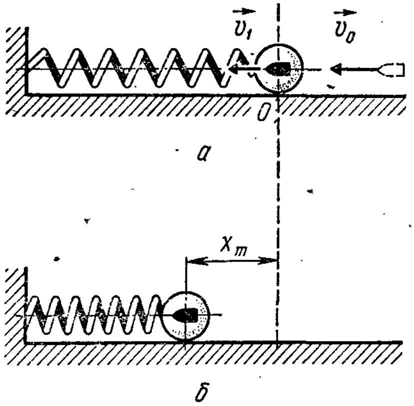

Рис. 5.2

Пример 3. На гладком горизонтальном столе лежит шар массой M, прикрепленный к пружине с жесткостью k. В шар попадает пуля массой m, имеющая в момент удара скорость $\vec{v}_0$, направленную вдоль оси пружины (рис. 5.2, *а*). Считая удар абсолютно неупругим и пренебрегая массой пружины и сопротивлением воздуха, определите амплитуду и период колебаний шара.

Решение. При соударении с шаром пуля сообщает ему кинетическую энергию, вследствие чего шар приходит в движение и сжимает пружину. Пружина сжимается до тех пор, пока кинетическая энергия полностью не перейдет в потенциальную энергию деформации. В этот момент кинетическая энергия шара станет равной нулю, потенциальная энергия пружины достигнет максимума, смещение шара от положения равновесия станет равно амплитудному значению (рис. 5.2, *б*). Дальше процесс пойдет в обратном порядке: форма пружины будет восстанавливаться, ее потенциальная энергия станет уменьшаться, кинетическая энергия шара будет возрастать и в положении равновесия (в точке O) первая обратится в нуль, вторая достигнет максимума. Скорость шара будет направлена вправо, и при своем движении он начнет растягивать пружину. Так как поверхность стола идеально гладкая и сопротивление воздуха ничтожно мало, кинетическая энергия шара полностью перейдет в потенциальную энергию деформации пружины и процесс начнет повторяться заново. Возвращающая сила упругости, приложенная к шару, всюду будет при этом пропорциональна смещению, и колебания шара будут гармоническими.

Чтобы определить амплитуду этих колебаний, нужно использовать закон сохранения импульса для системы пуля — шар и закон сохранения энергии для системы шар — пуля — пружина. Закон сохранения импульса позволяет определить скорость $\vec{v}_1$, с которой начнет двигаться система после удара пули. Пренебрегая, как обычно, смещением шара за время удара и учитывая, что пуля застревает в нем, получим:

$$mv_0 = (m + M)\,v_1. \qquad (1)$$

Для составления уравнения закона сохранения энергии $A = W_2 - W_1$ рассмотрим два состояния системы. За первое состояние примем состояние системы в момент окончания удара, когда деформации прекратились и шар начал двигаться. Энергия пружины здесь была равна нулю, шар вместе с пулей обладал энергией

$$W_1 = \frac{(m+M)\,v_1^2}{2}.$$

За второе состояние примем состояние системы в момент наибольшей деформации пружины, когда смещение x шара достигло амплитудного значения x_m. Энергия системы здесь равна только потенциальной энергии сжатой пружины

$$W_2 = \frac{kx^2}{2} = \frac{kx_m^2}{2}.$$

Внешние силы (реакция опоры $\vec{N}$ и сила тяжести, равная $m\vec{g}$) над системой шар — пуля — пружина работу не совершают, поэтому $A = 0$ и по закону сохранения энергии $0 = W_2 - W_1$ или

$$\frac{kx_m^2}{2} - \frac{(m+M)\,v_1^2}{2} = 0. \qquad (2)$$

Для нахождения периода колебаний системы нужно составить уравнение второго закона Ньютона для шара с пулей.

Согласно (5.4) в процессе сжатия пружины должно быть

$$F = -(m+M)\,\omega^2 x, \qquad (3)$$

где F — модуль силы упругости, ω — круговая частота, равная

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \qquad (4)$$

Силу F в данном примере можно выразить через жесткость пружины k и сжатие x:

$$F = -kx. \qquad (5)$$

Соотношения (1) — (5) полностью отражают явление, рассматриваемое в задаче, и служат исходной системой уравнений для нахождения неизвестных x_m и T.

Решая уравнения (1) и (2), получаем:

$$x_m = \frac{mv_0}{m+M}\sqrt{\frac{m+M}{k}}.$$

Из формул (3) — (5) находим:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}}.$$

Пример 4. Математический маятник, состоящий из нити длиной $l = 243$ см и стального шарика радиусом $r = 2$ см, совершает гармонические колебания с амплитудой $x_m = 10$ см. Определите скорость шарика при прохождении им положения равновесия и наибольшее значение равнодействующей всех сил, действующих на шарик. Плотность стали $\varrho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение. К математическому маятнику применимы все уравнения гармонических колебаний. Они дают возможность определить кинематические и динамические характеристики движения маятника, причем в отличие от общего случая к этим уравнениям добавляется формула периода колебаний математического маятника, позволяющая найти круговую частоту, если известна его длина.

Исходя из условий задачи, можно сразу определить период и, следовательно, круговую частоту колебаний маятника. Применяя формулу математического маятника к колебаниям шарика, необходимо учесть, что входящая в нее длина равна расстоянию $l+r$ от точки подвеса до центра тяжести колеблющегося тела, поскольку в данном примере шарик можно рассматривать как материальную точку. Кроме того, здесь $a=g$, так как точка подвеса находится в равновесии:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{g}{l+r}}. \qquad (1)$$

Зная угловую частоту и амплитуду, легко найти скорость маятника при прохождении им положения равновесия. В этом положении она имеет максимальное значение, равное согласно формуле (5.2′)

$$v_m=\omega x_m. \qquad (2)$$

Наибольшее значение возвращающая сила имеет в крайнем положении маятника, где смещение становится равным амплитуде, а ускорение достигает максимума:

$$F_m=ma_m=mx_m\omega^2. \qquad (3)$$

Массу колеблющегося шарика мы найдем, зная радиус и плотность материала:

$$m=\varrho\frac{4}{3}\pi r^3. \qquad (4)$$

Решая уравнения (1) — (4) совместно относительно скорости и силы, после подстановки числовых данных получим:

$$v_m=x_m\sqrt{\frac{g}{l+r}}; \quad v_m\approx 0{,}2\ \text{м/с}; \quad F_m=\frac{4\pi g\varrho r^3 x_m}{3(l+r)}; \quad F_m\approx 0{,}1\ \text{Н}.$$

Пример 5. Маятниковые часы, выверенные при комнатной температуре, уходят за сутки на $\Delta t=2$ мин вследствие изменения длины маятника, вызванного понижением температуры. Как нужно изменить длину маятника, чтобы часы шли верно?

Решение. Из-за понижения температуры длина l_1 маятниковых часов, выверенных при комнатной температуре, уменьшается и становится равной l_2. Период колебаний таких часов уменьшается, поскольку ускорение a остается неизменным. За сутки — время t_1 — эти часы сделают большее число колебаний, чем точные часы, и, следовательно, будут спешить. Согласно формуле

(5.9) показания маятниковых часов за сутки будут отличаться от показаний точных часов на время

$$-\Delta t = t_1\left(1 - \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}\right), \tag{1}$$

так как в данном случае $a_1 = a_2 = g_0$.

Чтобы часы шли точно, маятник часов нужно удлинить настолько, насколько он уменьшился при охлаждении. Относительное изменение длины, которое нам требуется определить, должно быть при этом равно $(l_1 - l_2)/l_2$.

Из уравнения (1) находим отношение l_1/l_2:

$$\frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{\Delta t}{t_1} + 1\right)^2 \approx \frac{2\Delta t}{t_1} + 1$$

(в задачах данного типа, если $\Delta t \ll t_1$, членом $\Delta t^2/t_1^2$ можно пренебречь и этим упростить вычисления). Решая последнее уравнение относительно искомого изменения длины, получим:

$$\frac{l_1 - l_2}{l_2} = \frac{2\Delta t}{t_1} = 2{,}8 \cdot 10^{-3},$$

т. е. длину маятника нужно увеличить на 0,3% по сравнению с длиной, которую он имел, когда часы спешили.

Пример 6. Самое высокое место, обжитое человеком на земном шаре, находится на высоте $h = 6200$ м над уровнем моря (Ронбургский монастырь в Гималаях). На сколько будут уходить за сутки маятниковые часы, выверенные на этой высоте, если их перенести на уровень моря?

Решение. При перемещении маятниковых часов с одного уровня на другой изменяется период колебаний маятника, так как ускорение свободного падения зависит от высоты. Выверенные на одном уровне, такие часы будут уходить вперед или отставать в зависимости от того, опускают их вниз или поднимают вверх. По условию задачи часы переносят на более низкий уровень, поэтому ускорение $a = g$ будет увеличиваться, и часы, выверенные в горах, станут уходить вперед. Это вызвано тем, что период колебаний маятника уменьшается, и за сутки такие часы делают больше колебаний, чем часы, идущие в монастыре.

Согласно формуле (5.9) показания маятниковых часов, перенесенных на уровень моря, за время t_1 будут больше показаний правильно идущих часов на время

$$-\Delta t = t_1\left(1 - \sqrt{\frac{g_2}{g_1}}\right), \tag{1}$$

так как в данном случае $l = \text{const}$. В этой формуле g_1 — модуль ускорения свободного падения на высоте h, равный

$$g_1 = G\frac{M_З}{(R_З + h)^2}, \tag{2}$$

g_2 — модуль ускорения свободного падения на уровне моря:

$$g_2 = g_0 = G \frac{M_З}{R_З^2}. \qquad (3)$$

Из формул (2) — (3) находим:

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{(R_З + h)^2}{R_З^2}.$$

Подставляя это отношение в уравнение (1), для разности показаний маятниковых часов при перемещении их на высоту h получим:

$$-\Delta t = t_1 \left(1 - \frac{R_З + h}{R_З}\right) = -t_1 \frac{h}{R_З}.$$

Откуда с учетом данных задачи найдем, что за сутки часы уйдут вперед на

$$\Delta t = 70 \text{ с}.$$

Пример 7. В ракете и на Земле установлены маятниковые часы. Ракета стартует без начальной скорости и за время равноускоренного движения поднимается на высоту H. Затем двигатели выключаются и ракета продолжает двигаться замедленно с вдвое меньшим по модулю ускорением, чем при разгоне. На сколько будут отличаться показания маятниковых часов от показаний точных часов в тот момент, когда ракета достигнет высоты $2H$? Изменением ускорения свободного падения с высотой пренебречь.

Решение. Если маятниковые часы находятся в системе, которая движется с ускорением, например в ракете, период колебаний маятника, а следовательно, и показания часов будут отличаться от показаний неподвижных часов. Это объясняется тем, что ускорение $\vec{a}$, создаваемое силой натяжения нити, становится по модулю больше или меньше ускорения $\vec{g}$, при котором обычно выверяются часы.

В нашем примере первую половину всего пути ракета двигалась ускоренно: сила натяжения нити $\vec{F}_{1н}$ была больше силы тяжести $m\vec{g}$ груза, т. е. $a_1 > g$, и, стало быть, маятниковые часы уходили вперед. Вторую половину пути ракета, а с ней и маятниковые часы двигались замедленно. Это возможно лишь при условии, что $F_{2н} < mg$, т. е. $a_2 < g$. Маятниковые часы в этом случае будут отставать. Чтобы определить разность показаний маятниковых часов, установленных в ракете, и часов, идущих правильно на Земле, нужно найти, на сколько они уйдут вперед при $a_1 > g$, отстанут затем при $a_2 < g$, и из первой поправки вычесть вторую.

При ускоренном подъеме ракеты на высоту H период колебаний маятника уменьшится, частота колебаний увеличится, и за время подъема t_{01} маятниковые часы уйдут вперед на

$$-\Delta t_1 = t_{01}\left(1 - \sqrt{\frac{a_1}{g}}\right), \qquad (1)$$

поскольку длина маятника останется неизменной.

Если ракета поднимается вверх с ускорением $\vec{w}_1$, то полное ускорение, создаваемое силой натяжения нити, по модулю будет равно:

$$a_1 = g + w_1. \qquad (2)$$

Ускорение $\vec{w}_1$ можно рассматривать как переносное и определить его из уравнения движения ракеты

$$H = \frac{w_1 t_{01}^2}{2}. \qquad (3)$$

При замедленном движении ракеты сила натяжения и сообщаемое ею ускорение уменьшаются. Период колебаний маятниковых часов увеличится, частота колебаний станет меньше, и за время t_{02} подъема ракеты с высоты H на высоту $2H$ маятниковые часы отстанут от правильно идущих часов на

$$\Delta t_2 = t_{02}\left(1 - \sqrt{\frac{a_2}{g}}\right). \qquad (1')$$

Ускорение, создаваемое силой натяжения нити при таком движении, будет равно:

$$a_2 = g - w_2, \qquad (2')$$

где согласно условию задачи

$$w_2 = \frac{w_1}{2}.$$

Точное время замедленного подъема можно определить из уравнения движения

$$H = v_0 t_{02} - \frac{w_2 t_{02}^2}{2}, \qquad (3')$$

где

$$v_0 = w_1 t_{01}.$$

Показания маятниковых часов в момент достижения ракетой высоты $2H$ будут отличаться от истинного времени (времени подъема) на величину

$$\Delta t = \Delta t_1 - \Delta t_2. \qquad (4)$$

Решая уравнения (1) — (4) совместно с учетом того, что $t_{01} = t$, получим:

$$\Delta t = \sqrt{t^2 + \frac{2H}{g}} + 0{,}59\sqrt{t^2 - \frac{H}{g}} - 1{,}59\, t.$$

Это и будет ответ на вопрос задачи.