Если в произвольном сечении установившегося потока выбрать достаточно тонкий слой жидкости, центр тяжести которого находится на высоте h от нулевого уровня отсчета, то вдоль всего потока должно выполняться соотношение (закон Бернулли)

$$p + \varrho g h + \frac{\varrho v^2}{2} = \text{const}, \tag{6.5}$$

где p — внешнее давление; v — скорость движения жидкости через данное сечение.

Сумма $p + \varrho g h$ представляет статическое давление, член $\varrho \frac{v^2}{2}$ — динамическое давление жидкости. Все вместе дает полное давление жидкости в движущемся слое.

С энергетической точки зрения давление p есть работа, совершаемая внешними силами над единичным объемом жидкости, произведения $\varrho g h$ и $\varrho v^2/_2$ соответственно представляют собой потенциальную и кинетическую энергию жидкости, заключенной в этом объеме.

Согласно формуле (6.5) для двух произвольных сечений потока идеальной жидкости

$$p_1 + \varrho g h_1 + \frac{\varrho v_1^2}{2} = p_2 + \varrho g h_2 + \frac{\varrho v_2^2}{2}. \tag{6.5'}$$

Если $v_1 = 0$, $h_2 = 0$ и $p_1 = p_2$ (жидкость вытекает из малого отверстия широкого открытого сосуда), то

$$v = \sqrt{2gh} \text{ (формула Торричелли)}, \tag{6.5''}$$

где $v = v_2$, $h = h_1$ — глубина, на которой находится отверстие в сосуде.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

Законы гидромеханики (6.2) — (6.5) позволяют решать многие задачи как по статике, так и по динамике жидкостей. Среди этих задач нужно прежде всего выделить задачи на уравнение второго закона Ньютона, в которых движущимся телом является слой жидкости. В этих задачах приходится учитывать не силы, действующие между телами, а производимые ими давления.

1. Правила решения задач этой группы почти такие же, как задач на статику или динамику тела, движущегося поступательно. Различие состоит лишь в том, что уравнения равновесия или второго закона Ньютона нужно записывать не через силы, а через давления. Выразить левую часть основного уравнения динамики через давление можно следующим образом. Выбрав слой жидкости, для которого составляется уравнение, надо представить его массу как произведение $\varrho S l$, где ϱ — плотность жидкости, S — площадь поперечного сечения, проведенного перпендикулярно направлению движения жидкости, l — толщина слоя. Тогда урав-

нение второго закона Ньютона можно записать так:

$$\sum \vec{F} = \varrho S l \vec{a}, \text{ откуда } \sum p = \varrho l a.$$

В левой части последнего равенства стоит алгебраическая сумма давлений, производимых на движущийся слой жидкости.

2. Задачи, связанные с нахождением давления и сил давления в какой-либо точке внутри покоящейся жидкости, решают на основании закона Паскаля и вытекающих из него следствий. Методика решения таких задач состоит в следующем:

а) Необходимо сделать чертеж и отметить все равновесные уровни жидкости, которые она занимала по условию задачи. Если даны сообщающиеся сосуды с разнородной жидкостью, нужно отметить уровни каждой из них и указать границы раздела. Затем следует провести поверхность нулевого уровня — поверхность, от которой будут отсчитываться высоты столбов жидкости. Эта поверхность должна проходить через однородную жидкость — по самой нижней границе раздела сред (жидкость — жидкость, жидкость — воздух). Если по условию задачи происходит перетекание жидкости из одной части сосуда в другую и при этом имеются два или несколько равновесных состояний жидкости, необходимо отметить высоты всех уровней, отсчитывая их от поверхности нулевого уровня.

б) Указав высоты всех столбов и расстояния, на которые смещаются уровни жидкости, можно приступать к составлению уравнения равновесия жидкости. Для двух произвольных точек, лежащих на поверхности нулевого уровня, должно быть

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{k=1}^{m} p'_k,$$

или подробнее:

$$p_0 + \varrho_1 g h_1 + \ldots + \varrho_n g h_n = p'_0 + \varrho'_1 g h'_1 + \ldots + \varrho'_k g h'_k.$$

В этом уравнении p_0 — давление на свободной поверхности верхнего слоя (обычно атмосферное), h_1, ϱ_1, h', ϱ' и т. д.— высоты элементарных столбов жидкостей и их плотности.

в) Если до наступления момента равновесия жидкость переливалась из одной части сосуда в другую, то к составленному уравнению добавляют условие несжимаемости жидкости: при уменьшении объема жидкости в какой-либо части сосуда на V_1 в другой части сосуда объем возрастет на такую же величину. Если сосуды имеют форму цилиндров, то условие несжимаемости $V_1 = V_2$ можно записать так:

$$S_1 h_1 = S_2 h_2,$$

где S_1 и S_2 — площади поперечного сечения; h_1 и h_2 — высоты столбов переливаемой жидкости.

Составив уравнение равновесия и, если нужно, уравнение несжимаемости, следует записать математически все остальные условия задачи. Как правило, они связывают между собой высоты h_1, h_2 и т. д.

г) Затем надо выписать числовые значения известных величин, проверить число неизвестных в полученных уравнениях и решить их совместно относительно искомой величины.

д) В заключение остановимся на задачах, где требуется найти давление внутри жидкости, находящейся в сосуде, движущемся ускоренно. При решении их нужно учесть замечания к п. 7 гл. 2. Давление на глубине, отсчитанной от установившейся поверхности жидкости, движущейся с ускорением $\vec{a}$, можно вычислить по формуле

$$p = p_0 + \varrho g' h, \quad \text{где} \quad g' = |\vec{g} + (-\vec{a})|.$$

3. Решение задач о плавании тел основано на законах динамики поступательного движения твердого тела с учетом архимедовой силы. Принципиально решение таких задач не отличается от решения задач динамики материальной точки.

а) Нужно сделать чертеж и, руководствуясь третьим законом Ньютона, расставить силы, действующие на тело, погруженное в жидкость.

Если в задаче говорится о весе тела в воде, то тело удобно изобразить подвешенным на нити в жидкости или лежащим на дне сосуда и помнить, что вес в воде по модулю равен силе натяжения нити или нормальной реакции дна (но не силе тяжести, равной $m\vec{g}$). Не следует также забывать, что сила давления верхнего слоя жидкости, действующая на погруженное тело, в выталкивающей силе учтена.

Если тело плавает на границе раздела двух жидкостей, модуль выталкивающей силы, действующей на тело, равен:

$$F_в = \varrho_1 g V_1 + \varrho_2 g V_2,$$

где V_1 и V_2 — объем частей тела, находящихся в жидкостях с плотностями ϱ_1 и ϱ_2 соответственно.

б) Следует составить основное уравнение динамики поступательного движения

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

в проекциях на вертикальное направление и подставить в него вместо модулей действующих сил, если эти силы не заданы, их выражения:

$$mg = \varrho_т g V_т \qquad \text{и} \qquad F_в = \varrho_ж g V.$$

Здесь $V_т$ и $\varrho_т$ — объем и плотность погруженного тела; V — объем погруженной части тела, равный объему вытесненной жидкости.

Если погруженное тело находится в равновесии относительно жидкости, то основное уравнение упрощается, поскольку правая

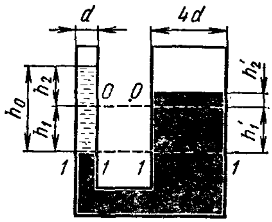

Рис. 6.1

часть обращается в нуль, и задача сводится к задаче статики. Для ее решения нужно составить уравнение равновесия в проекциях и редко уравнение моментов.

в) Далее, руководствуясь общими правилами решения задач механики, необходимо составить дополнительные уравнения, выписать числовые значения заданных величин, проверить число неизвестных в полученной системе уравнений и решить ее относительно искомой величины.

Пример 1. В сообщающихся сосудах находится ртуть. Диаметр одного сосуда в четыре раза больше диаметра другого. В узкий сосуд наливают столб воды высотой $h_0 = 0{,}7$ м. На сколько поднимется уровень ртути в одном сосуде и опустится в другом?

Решение. Делаем чертеж (рис. 6.1), на котором отмечаем начальный уровень ртути *0 — 0*, и выбираем поверхность нулевого уровня по границе раздела воды и ртути *1 — 1*.

Разбиваем столбы жидкости над этой поверхностью в левом и правом сосудах на элементарные части и обозначаем их высоты: h_1 и h_2' — понижение и повышение уровней в левом и правом колене; h' — расстояние между уровнями *0 — 0* и *1 — 1* в правом колене; h_2 — высота столба воды над начальным уровнем.

Записываем условие равновесия жидкости в сообщающихся сосудах: на поверхности *1 — 1* давление в любых точках, находящихся в левом колене, равно давлению в точках, находящихся в правом:

$$\varrho_в g h_1 + \varrho_в g h_2 = \varrho_р g h_1' + \varrho_р g h_2', \qquad (1)$$

где $\varrho_в = 10^3$ кг/м^3 и $\varrho_р = 1{,}36 \cdot 10^4$ кг/м^3 (табличные значения плотности воды и ртути).

Обратите внимание, что на поверхности *0 — 0*, проходящей через разнородные жидкости, давления в левом и правом коленах разные.

Условие несжимаемости и дополнительные условия задачи позволяют составить еще три уравнения:

$$S_1 h_1 = S_2 h_2' \quad \text{или} \quad d^2 h_1 = 16 d^2 h_2'; \qquad (2)$$

$$h_1 + h_2 = h_0; \qquad (3)$$

$$h_1 = h_1'. \qquad (4)$$

Решая уравнения (1) — (4) совместно относительно искомых неизвестных h_2' и h_1, после подстановки числовых значений получим:

$$h_2' = \frac{\varrho_в h_0}{17 \varrho_р}; \quad h_2' \approx 0{,}003 \text{ м}; \quad h_1 = \frac{16}{17}\frac{\varrho_в h_0}{\varrho_р}; \quad h_1 \approx 0{,}0048 \text{ м}.$$

Пример 2. Какова должна быть масса камня, который нужно положить на плоскую льдину толщиной $h = 0{,}20$ м, чтобы он вместе с льдиной полностью погрузился в воду, если площадь льдины равна $S = 1$ м^2? Плотность льда $\varrho_л = 900$ кг/м^3, плотность камня $\varrho_к = 2200$ кг/м^3. С какой силой камень давит на льдину в воде?

Р е ш е н и е. Так как льдина и камень находятся в погруженном состоянии в равновесии и по условию задачи требуется определить не только массу камня, но и внутреннюю силу, действующую между этими телами, необходимо составить уравнения равновесия отдельно для каждого тела.

На льдину действуют сила тяжести, равная $m_л\vec{g}$, и сила нормального давления камня $\vec{N}$ (эти силы направлены вертикально вниз), а также выталкивающая сила со стороны воды $\vec{F}_1$, направленная вертикально вверх. Под действием этих сил льдина находится в покое, ее ускорение равно нулю, следовательно,

$$F_1 - m_л g - N = 0. \quad (1)$$

Поскольку величины $m_л$ и F_1, входящие в это уравнение, не заданы, их нужно выразить через известные величины:

$$m_л = \varrho_л hS; \quad F_1 = \varrho_в ghS, \quad (2)$$

где $\varrho_л$ и $\varrho_в$ — плотность льда и воды; h и S — толщина и площадь льдины (объем погруженного тела равен объему вытесненной жидкости).

На камень действует сила тяжести, равная $m_к\vec{g}$, выталкивающая сила $\vec{F}_2$ воды и нормальная реакция опоры $\vec{N}$ (со стороны льдины). Так как камень находится в равновесии, то

$$F_2 + N - m_к g = 0 \quad (3)$$

(при записи уравнения мы учли направления действующих сил). Как и в первом случае, силу тяжести и выталкивающую силу нужно выразить через плотности и объемы.

$$m_к = \varrho_к V_к; \quad F_2 = \varrho_в g V_к, \quad (4)$$

где $m_к$ — искомая масса камня.

Исключая из уравнений (1) — (4) неизвестные величины F_1, $m_л$, F_2 и $V_к$, находим:

$$m_к = \frac{(\varrho_в - \varrho_л)\varrho_к hS}{\varrho_к - \varrho_в}; \quad m_к \approx 3{,}7 \text{ кг};$$

$$N = (\varrho_в - \varrho_л) ghS; \quad N \approx 19{,}6 \text{ Н}.$$

Пример 3. Прямой деревянный цилиндр плавает в воде так, что в нее погружена $n = 0{,}9$ объема цилиндра. Какая часть цилиндра будет погружена в воду, если на воду налить слой масла, полностью закрывающий цилиндр? Плотность масла принять равной $\varrho_м = 800$ кг/м^3.

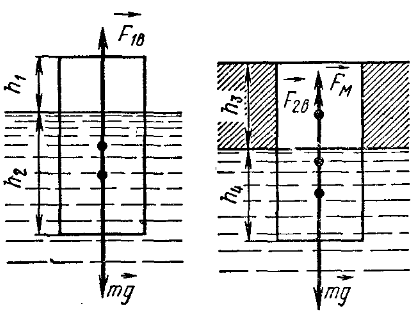

Рис. 6.2

Решение. Делаем чертеж (рис. 6.2), на котором изображаем два положения цилиндра: до и после того, как было налито масло. Обозначаем площадь цилиндра через S, высоты частей цилиндра, находящихся в воздухе и в воде (первый случай), через h_1 и h_2, в масле и воде (второй случай) — через h_3 и h_4. В первом случае на цилиндр действуют сила тяжести, равная $m\vec{g}$, и выталкивающая сила со стороны воды $\vec{F}_{1в}$; во втором — сила тяжести, равная $m\vec{g}$, и выталкивающая сила со стороны воды $\vec{F}_{2в}$ и масла $\vec{F}_м$. (На тела, находящиеся частично в жидкости, частично в воздухе, действует выталкивающая сила воздуха. В большинстве случаев ею пренебрегают, так как она очень мала.)

В обоих случаях цилиндр находится в равновесии, поэтому

$$F_{1в} - mg = 0; \quad F_{2в} + F_м - mg = 0.$$

Учитывая, что

$$m = \varrho_0 (h_1 + h_2) S, \quad F_{1в} = \varrho_в g h_2 S,$$
$$F_{2в} = \varrho_в g h_4 S, \quad F_м = \varrho_м g h_3 S,$$

где ϱ_0 и $\varrho_в$ — соответственно плотность материала цилиндра и воды, записываем условия равновесия более подробно:

$$\varrho_в h_2 - \varrho_0 (h_1 + h_2) = 0 \text{ (после сокращения на } S \text{ и } g), \quad (1)$$
$$\varrho_в h_4 + \varrho_м h_3 - \varrho_0 (h_1 + h_2) = 0. \quad (2)$$

Кроме того,

$$h_1 + h_2 = h_3 + h_4, \quad (3)$$

и по условию задачи

$$\frac{h_2}{h_1 + h_2} = n. \quad (4)$$

Из составленной системы уравнений надо определить отношение

$$x = \frac{h_4}{h_3 + h_4}. \quad (5)$$

Система уравнений (1) — (5) содержит шесть неизвестных величин: все высоты, ϱ_0 и x. Такая система имеет определенное решение, если требуется найти не все неизвестные, а только некоторые из них или их отношение. Уравнения (1) — (4) позволяют сразу определить плотность дерева:

$$\varrho_0 = \frac{h_2}{h_1 + h_2} \varrho_в = \varrho_в n.$$

Второе уравнение с учетом равенства (3) можно представить после несложных преобразований так:

$$\varrho_в \frac{h_4}{h_3 + h_4} + \varrho_м \frac{h_3}{h_3 + h_4} - \varrho_0 = 0,$$

откуда

$$x=\frac{h_4}{h_3+h_4}=\frac{\varrho_0-\varrho_м}{\varrho_в-\varrho_м},$$

или с учетом выражения для плотности дерева:

$$x=\frac{n\varrho_в-\varrho_м}{\varrho_в-\varrho_м}=0{,}5.$$

Пример 4. Полый медный шар весит в воздухе $P=2{,}6\cdot10^{-2}$ Н, в воде $T=2{,}17\cdot10^{-2}$ Н. Определите объем внутренней полости шара. Плотность меди $\varrho_м=8{,}8\cdot10^3$ кг/м^3. Выталкивающей силой воздуха пренебречь.

Решение. При взвешивании шара в воде на него вниз действует сила тяжести, равная по модулю весу тела P в воздухе (так как выталкивающей силой воздуха можно пренебречь), вверх — сила натяжения $\vec{T}$ нити, на которой шар подвешен к динамометру (численно она равна весу тела в воде), и выталкивающая сила воды $\vec{F}_в$. Поскольку взвешиваемое тело находится в равновесии и все силы действуют по одной прямой, то должно быть:

$$F_в+T-P=0.$$

Выразив $F_в$ через плотность воды $\varrho_в$ и объем погруженной части тела, равный объему тела V_0, получим:

$$\varrho_в g V_0+T-P=0. \qquad (1$$

Объем полости $V_п$ равен объему всего тела V_0 без объема $V_м$, который занимает материал тела (в нашем примере медь):

$$V_п=V_0-V_м, \quad \text{или} \quad V_п=V_0-\frac{P}{\varrho_м g}. \qquad (2)$$

Исключая из уравнений (1) и (2) объемы тел, находим объем полости:

$$V_п=\frac{P-T}{\varrho_в g}-\frac{P}{\varrho_м g}; \qquad V_п=1{,}3\cdot10^{-5}\ \text{м}^3.$$

Пример 5. Тонкая палочка плотностью ϱ закреплена шарнирно на одном конце и опущена свободным концом в жидкость плотностью $\varrho_0<\varrho$. Какая часть длины палочки будет находиться в жидкости при равновесии?

Решение. Палочка шарнирно закреплена одним концом и может совершать только вращательное движение. Следовательно, условием ее равновесия будет равенство нулю алгебраической суммы моментов всех действующих сил относительно оси, проходящей через шарнир.

Допустим, что палочка имеет длину l, при равновесии образует с горизонталью угол α и в жидкости находится ее часть длиной x (рис. 6.3).

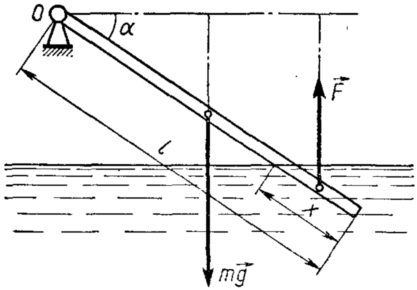

Рис. 6.3

Чтобы составить уравнение моментов, изобразим сначала внешние силы, действующие на палочку (все силы, кроме силы, действующей со стороны шарнира, так как ее момент относительно точки O равен нулю). Со стороны Земли на палочку действует сила тяжести, равная $m\vec{g}$, приложенная в середине палочки; со стороны жидкости — выталкивающая сила $\vec{F}$, приложенная в центре тяжести жидкости, находившейся на месте погруженной части тела, т. е. на расстоянии $x/2$ от свободного конца палочки.

Плечо силы $m\vec{g}$ относительно точки O равно $\frac{l}{2}\cos\alpha$, а плечо силы $\vec{F}$ равно $\left(l-\frac{x}{2}\right)\cos\alpha$ и условие равновесия — уравнение моментов относительно неподвижной оси вращения, проходящей через точку O, будет иметь вид:

$$mg\frac{l}{2}\cos\alpha - F\left(l-\frac{x}{2}\right)\cos\alpha = 0. \qquad (1)$$

Силы, входящие в уравнение моментов, не заданы, поэтому их нужно выразить через плотности и объемы тела и жидкости:

$$m = \varrho lS; \quad F = \varrho_0 gxS. \qquad (2)$$

По условию задачи требуется определить отношение x/l. Подставляя в уравнение (1) выражения для m и F, после простых преобразований получим:

$$\varrho_0\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\varrho_0\left(\frac{x}{l}\right) + \varrho = 0.$$

Решая квадратное уравнение относительно искомого отношения, находим:

$$\frac{x}{l} = \frac{\varrho_0 - \sqrt{\varrho_0^2 - \varrho_0\varrho}}{\varrho_0}.$$

(Второй, больший корень уравнения, как нетрудно заметить, показывает, какая часть длины находится в воздухе, если под x подразумевать длину палочки над водой.)

Пример 6. Стальной цилиндр плотностью ϱ, диаметром d и высотой h опущен в воду на тонкой цепочке длиной l и массой m_1. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы вынуть цилиндр из воды за цепочку?

Р е ш е н и е. Чтобы совершить минимальную работу при подъеме тела, к нему нужно приложить такую силу, которая увеличивала бы потенциальную энергию тела, не сообщая ему заметной скорости.

Для подъема цилиндра из воды необходимо совершить работу A_1 по подъему цепочки и работу A_2 по подъему самого цилиндра. В обоих случаях придется преодолевать только действие силы тяжести, поэтому вся совершенная работа равна:

$$A = A_1 + A_2. \tag{1}$$

Чтобы нижнее основание цилиндра оказалось на уровне воды, цепочку надо поднять вверх на расстояние $l + h$. Так как по условию задачи цепочка тонкая, то выталкивающей силой воды, действующей на цепочку, можно пренебречь, и работа по подъему цепочки равна:

$$A_1 = m_1 g (l + h). \tag{2}$$

При перемещении цилиндра на него, помимо силы тяжести, равной $m_2 g$, и натяжения, действует выталкивающая сила воды, направленная вверх и как бы уменьшающая силу тяжести. Пока цилиндр полностью находится в воде, выталкивающая сила постоянна, когда же цилиндр станет выходить из воды, выталкивающая сила начнет уменьшаться от максимального значения $F_в$ до нуля. Объем погруженной части цилиндрического тела пропорционален глубине погружения h, поэтому выталкивающая сила здесь меняется в зависимости от h по линейному закону, и, следовательно, ее работу можно найти по формуле

$$A' = F_{в ср} h = \frac{F_в h}{2}.$$

Учитывая это, всю работу A_2 по подъему цилиндра можно представить как работу по преодолению силы тяжести, равной $m_2 g$, на пути $l + h$ без работы постоянной выталкивающей силы на пути l (верхнее основание цилиндра доходит до поверхности воды) и работы переменной выталкивающей силы на перемещении, равном высоте цилиндра:

$$A_2 = m_2 g (l + h) - F_в l - F_в \frac{h}{2}, \tag{3}$$

где

$$m_2 = \varrho \frac{\pi d^2}{4} h; \quad F_в = \varrho_0 g \frac{\pi d^2}{4} h. \tag{4}$$

С учетом соотношений (2), (3) и (4) вся работа по подъему цилиндра будет равна:

$$A = m_1 g (l + h) + [l (\varrho - \varrho_0) + h (\varrho - 0{,}5\varrho_0)] g \frac{\pi d^2}{4} h.$$

Пример 7. В дне сосуда проделано отверстие сечением S_1. В сосуд налита вода до высоты h и уровень ее поддерживается постоянным. Определите площадь поперечного сечения струи, вытекающей из сосуда на расстоянии $3h$ от его дна. Считать, что

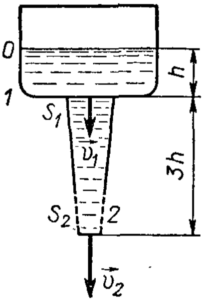

Рис. 6.4

струя не разбрызгивается, силами трения в жидкости пренебречь.

Р е ш е н и е. Решение этой задачи основано на применении закона постоянства потока жидкости и уравнения Бернулли.

Делаем чертеж к условию задачи (рис. 6.4) и отмечаем на нем сечения потока S_1, S_2 и скорости течения воды через эти сечения $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$.

Если не учитывать сжимаемости воды, можно считать, что за любые равные промежутки времени через сечения потока *1* и *2* проходит одинаковое количество жидкости. Согласно уравнению (6.3″) площади поперечного сечения потока S_1 и S_2 и модули скоростей жидкости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ должны быть связаны между собой соотношением

$$S_1 v_1 = S_2 v_2. \qquad (1)$$

Скорости слоев в потоке жидкости можно определить из закона Бернулли (6.5), представляющего собой выражение закона сохранения энергии для жидкости, заключенной в единичном объеме.

При составлении уравнения Бернулли нужно рассмотреть энергию единичного объема жидкости в каких-либо двух сечениях потока. Одно из этих сечений нужно взять на уровне *1*, второе — на уровне *2*, т. е. там, где нас интересуют скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Для определения потенциальной энергии, как всегда, устанавливаем уровень отсчета высоты. При сравнении энергий, которые имеет единичный объем жидкости, переходя из слоя *0* в слой *1*, уровень отсчета высоты берем на слое *1*, при сравнении энергий в слоях *0* и *2* — на слое *2*.

Находясь на уровне *0*, жидкость, заключенная в единичном объеме, имеет относительно уровня *1* только потенциальную энергию, равную ϱgh, так как по условию задачи скоростью жидкости на открытой поверхности можно пренебречь. Перейдя в сечение *1* эта жидкость будет иметь только кинетическую энергию $\varrho v_1^2/2$. Поскольку работа внешних сил в процессе перемещения жидкости равна нулю (внешними силами здесь являются силы атмосферного давления, действующие на жидкость сверху и снизу), то по закону Бернулли

$$\varrho gh = \frac{\varrho v_1^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad v_1 = \sqrt{2gh}. \qquad (2)$$

При переходе единичного объема жидкости с уровня *0* на уровень *2* ее потенциальная энергия $\varrho g 4h$ полностью переходит в кинетическую $\varrho v_2^2/2$, и аналогично предыдущему мы получим:

$$\varrho g 4R = \frac{\varrho v_2^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad v_2 = \sqrt{8gh}. \qquad (3)$$

Исключая из уравнений (1) — (3) скорости и решая их относительно искомого сечения S_2 потока, получим:

$$S_2 = 0{,}5\ S_1.$$

Пример 8. Какова должна быть минимальная мощность насоса, поднимающего воду по трубе с сечением S на высоту $2h$, если КПД насоса равен η и ежесекундная подача воды равна Q?

Решение. За счет работы насоса увеличивается потенциальная и кинетическая энергия каждой единицы объема воды, перекачиваемой насосом. В результате вода заполняет трубу и приобретает такую скорость $\vec{v}$, что за время t из трубы вытекает вода массой m.

Предположим, что столб воды, заполняющий трубу, имеет массу m; рассмотрим два состояния системы: первое — до поступления воды в насос, второе — когда вода заполнит трубу. По закону сохранения энергии работа насоса

$$A = W_2 - W_1.$$

Для минимальной мощности с учетом КПД получим:

$$\eta N = \frac{W_2 - W_1}{t}.$$

Энергия системы в первом состоянии равна: $W_1 = 0$, во втором состоянии энергия равна сумме кинетической энергии всего столба воды и потенциальной энергии его центра тяжести:

$$W_2 = \frac{mv^2}{2} + mgh.$$

Поэтому

$$\eta N = \frac{mv^2}{2t} + \frac{mgh}{t},$$

или

$$N = \frac{Q}{\eta}\left(\frac{v^2}{2} + gh\right),$$

где

$$Q = \frac{m}{t}.$$

Из формулы ежесекундного расхода воды $Q = \varrho S v$ находим значение v и, подставив его в выражение для N, получаем окончательно для мощности насоса:

$$N = \frac{Q}{\eta}\left(\frac{Q^2}{2\varrho^2 S^2} + gh\right).$$

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 6

6.1. Снаряд массой 8 кг вылетает из ствола орудия со скоростью 700 м/с. Определите давление пороховых газов во время выстрела, принимая движение снаряда внутри ствола за равно-