3. При увеличении линейных размеров по закону (8.1) объем тела меняется вследствие нагревания по закону

$$V = V_0 (1 + \beta t), \tag{8.3}$$

где β — температурный коэффициент объемного расширения. При небольших температурах $\beta \approx 3\alpha$.

4. В случае теплового расширения тел их плотность изменяется по закону

$$\varrho = \varrho_0 / (1 + \beta t), \tag{8.4}$$

где ϱ — плотность материала тела при температуре t; ϱ_0 — плотность при 0^0С.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

1. Решение задач о тепловом расширении тел основано на применении одной из формул (8.1) — (8.4). Если в задаче рассматривается несколько состояний тела или несколько тел, эти формулы записываются для каждого случая, для каждого тела отдельно. Все вместе они образуют полную систему уравнений, решение которых позволяет найти искомую величину. В комбинированных задачах формулы теплового расширения являются лишь частью системы уравнений, описывающих данное явление; вторую часть, как правило, составляют формулы калориметрии и гидростатики. При составлении уравнений теплового расширения тел особое внимание нужно обратить на следующее.

а) В формулах (8.1) — (8.4) под l_0, S_0 и V_0 подразумевают значения длины, площади и объема при 0^0С, а не при начальной температуре тела, отличной от нуля; это связано с тем, что табличные коэффициенты линейного и объемного расширения определяются как относительное изменение единицы длины или объема тела, взятого при 0^0С, при нагревании на 1^0С. Если за начальную температуру принять не 0^0С, а произвольную температуру, относительное удлинение, рассчитанное на 1^0С,— температурный коэффициент линейного расширения (а также и температурный коэффициент объемного расширения) — в каждом случае будет разным и не таким, как при 0^0С.

Чтобы найти связь между длинами (площадями, объемами) при температурах t_1 и t_2, нужно из уравнений

$$l_1 = l_0 (1 + \alpha t_1) \quad \text{и} \quad l_2 = l_0 (1 + \alpha t_2)$$

исключить l_0. В результате получим:

$$l_2 = l_1 \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1},$$

или приближенно:

$$l_2 \approx l_1 [1 + \alpha (t_2 - t_1)] = l_1 (1 + \alpha \Delta t), \tag{8.5}$$

так как членами, содержащими α в более высокой степени, чем первой, можно пренебречь. Практически такое приближение вполне оправдано, так как для большинства твердых тел α очень мало.

Проводя вычисления в задачах на тепловое расширение тел, нужно пользоваться формулами приближенного вычисления (см. форзац). Использование этих формул значительно облегчает вычисления и упрощает математические выкладки. В частности, при небольших температурах t, таких, что $\beta t \ll 1$, можно с достаточной степенью точности считать, что

$$\varrho \approx \varrho_0 (1 - \beta t).$$

б) Формулы (8.2) и (8.3) справедливы как для сплошных тел, так и для тел, в которых имеется полость или отверстие.

2. Задачи на тепловое расширение тел удобнее решать по следующей схеме:

а) Для каждого теплового состояния каждого тела записать соответствующую формулу теплового расширения.

б) Если в задаче наряду с расширением тел рассматриваются другие процессы, сопутствующие расширению,— теплообмен, изменение гидростатического давления жидкости или выталкивающей силы, то к уравнениям теплового расширения надо добавить формулы калориметрии и гидростатики.

в) Выписать значения заданных величин и, проверив число неизвестных в полученной системе уравнений, решить ее относительно искомой величины.

Пример 1. Какую длину $l_{0с}$ и $l_{0м}$ при температуре 0^0C должны иметь стальной и медный стержни, чтобы при любой температуре разность их длин составляла $\Delta l = 10$ см? Температурный коэффициент линейного расширения стали $\alpha_с = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$K^{-1}, меди $\alpha_м = 1{,}7 \cdot 10^{-5}$K^{-1}

Решение. Рассмотрим два тепловых состояния стального и медного стержней: при начальной температуре $t_0 = 0^0$C и при некоторой произвольной температуре t. Обозначим длину стального стержня при температуре t через $l_с$, медного — через $l_м$, тогда

$$l_с = l_{0с}(1 + \alpha_с t), \qquad (1)$$
$$l_м = l_{0м}(1 + \alpha_м t). \qquad (2)$$

Дополнительное условие позволяет записать:

$$l_с - l_м = \Delta l,$$

в частности,

$$l_{0с} - l_{0м} = \Delta l. \qquad (3)$$

Вычитая из второго уравнения первое и раскрывая скобки, получим:

$$l_с - l_м = l_{0с} - l_{0м} + l_{0с}\alpha_с t - l_{0м}\alpha_м t,$$

откуда с учетом соотношений (3) имеем:

$$l_{0с}\alpha_с - l_{0м}\alpha_м = 0.$$

Из этого и второго равенства (3) для искомых длин получаем:

$$l_{0с} = \frac{\alpha_м}{\alpha_м - \alpha_с}\Delta l; \quad l_{0с} \approx 32 \text{ см}; \quad l_{0м} = \frac{\alpha_с}{\alpha_м - \alpha_с}\Delta l; \quad l_{0м} \approx 22 \text{ см}.$$

Пример 2. Стальная и латунная полоски толщиной $h = 0{,}2$ см каждая склепаны на концах так, что при температуре $t_1 = 20°C$ они образуют плоскую биметаллическую пластинку. Каков будет средний радиус изгиба биметаллической пластинки при $t_2 = 100^0 C$?

Температурные коэффициенты линейного расширения стали и латуни равны $\alpha_с = 1{,}2 \cdot 10^{-5} K^{-1}$; $\alpha_л = 1{,}9 \cdot 10^{-5} K^{-1}$.

Решение. Так как коэффициенты линейного расширения латуни и стали неодинаковы ($\alpha_л > \alpha_с$), то при нагревании биметаллической пластинки латунная удлинится больше стальной и вся пластинка изогнется.

Если при температуре t_1 длина средней линии латунной пластинки была равна $l_{1л}$, при температуре t_2 — равна $l_{2л}$, то, пользуясь приближенной формулой (8.5), можно записать:

$$l_{2л} = l_{1л}(1 + \alpha_л \Delta t), \tag{1}$$

где $\Delta t = t_2 - t_1$ — приращение температуры.

Для стальной пластинки аналогично предыдущему получим:

$$l_{2с} = l_{1с}(1 + \alpha_с \Delta t), \tag{2}$$

поскольку приращение температуры здесь то же самое.

Чтобы определить средний радиус изгиба R, будем считать, что концы пластинок при деформации не смещаются относительно друг друга и толщина их настолько мала, что ее изменением при нагревании можно пренебречь по сравнению с изменением длины.

Как видно из чертежа (рис. 8.1), $l_{2л}$ и $l_{2с}$ связаны с радиусом изгиба R уравнениями

$$l_{2л} = \varphi(R + h/2), \tag{3}$$
$$l_{2с} = \varphi(R - h/2), \tag{4}$$

где φ — угол между торцевыми поверхностями биметаллической пластинки.

Составленная система уравнений полностью отражает все условия задачи и позволяет определить искомую величину.

Решая уравнения (1) — (4) совместно относительно среднего радиуса R кривизны биметаллической пластинки, получим:

$$R = \frac{h}{2}\left[\frac{2 + (\alpha_с + \alpha_л)\Delta t}{(\alpha_л - \alpha_с)\Delta t}\right]; \quad R \approx 5 \text{ м}.$$

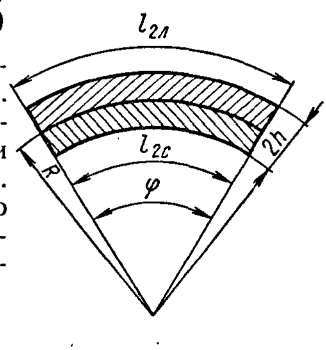

Рис. 8.1

Пример 3. Латунная шкала ртутного барометра выверена при 0°C При температуре $t_1 = 20°C$ барометр показывает давление $p_б = 760$ мм рт. ст. Каково истинное атмосферное давление p_a при этой температуре? Расширением стекла пренебречь. Температурные коэффициенты линейного расширения латуни и объемного расширения ртути соответственно равны $\alpha = 1{,}9 \cdot 10^{-5} K^{-1}$ и $\beta = 1{,}8 \cdot 10^{-4} K^{-1}$

Решение. Если шкалу барометра выверить при какой-либо температуре, например при 0°C, то при всякой другой температуре его показания не будут соответствовать наружному давлению. Объясняется это тем, что с повышением температуры плотность ртути уменьшается и при неизменном атмосферном давлении высота столба ртути в барометрической трубке возрастает. Кроме того, шкала, по которой отсчитывают высоту столба, удлиняется и цена одного деления становится больше значения, указанного на шкале Чтобы определить истинное давление, показание барометра нужно привести к той температуре, при которой его шкала выверена, в данном случае к 0°C. Делается это сравнительно просто: находят число делений шкалы, в которые укладывается высота измеряемого ртутного столба, рассчитывают по формуле теплового расширения новую цену деления и по этим данным определяют действительную длину ртутного столба. Зная эту длину и плотность ртути при температуре измерений, можно вычислить и само атмосферное давление.

Если при температуре $t_1 = 20°C$ ртуть в барометрической трубке достигла высоты h_1 (n-го деления шкалы), то показания барометра равны:

$$p_б = \varrho_1 g h_1 = \varrho_1 g n l_1, \tag{1}$$

где ϱ_1 — плотность ртути при температуре t_1; l_1 — цена одного деления шкалы. Так как расстояние l_0 между двумя соседними рисками на шкале выверено и равно единице (1 мм) лишь при 0°C, то l_1 будет больше истинной цены деления l_0, указанной на шкале

Если температурный коэффициент линейного расширения латуни равен α, то $l_1 = l_0(1 + \alpha t_1)$, и в единицах длины l_0 высота ртутного столба при температуре t_1 равна:

$$h_1 = n l_0 (1 + \alpha t_1). \tag{2}$$

Так как по условию задачи атмосферное давление не изменяется, то $p_a = \varrho_0 g h_0$, и в то же время $p_a = \varrho_1 g h_1$, откуда

$$\varrho_0 h_0 = \varrho_1 h_1, \tag{3}$$

где ϱ_0 - плотность ртути при 0°C; h_0 — высота, на которую поднялся бы столб ртути при температуре 0°C. Плотность ртути

$$\varrho_1 = \varrho_0 (1 - \beta t_2). \tag{4}$$

Из уравнений (1) (4) получим:

$$p_а = \varrho_0 g h_0 = p_б[1 + (\alpha - \beta)t_1]; \quad p_а = 758 \text{ мм рт ст}$$

Пример 4. При температуре $t_1 = 10°C$ в открытую железную канистру налили $V_1 = 20$ л бензина, и она оказалась полной. На сколько изменится масса канистры с бензином, если ее внести в помещение, где температура равна $t_2 = 30°C$? Температурный коэффициент линейного расширения железа $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}K^{-1}$ температурный коэффициент объемного расширения бензина $\beta = 10^{-3}K^{-1}$, плотность бензина $\varrho_0 = 800$ кг/м^3

Решение. Вследствие теплового расширения канистры и бензина объем их при нагревании увеличивается. Температурный коэффициент объемного расширения жидкостей всегда больше коэффициента объемного расширения твердых тел, поэтому при одинаковом повышении температуры приращение объема бензина будет больше приращения объема сосуда и часть бензина из него выльется. Чтобы определить искомое изменение массы канистры с бензином, нужно вычислить массу бензина в канистре при начальной и комнатной температурах и из первого результата вычесть второй. Масса самой канистры при этом не изменится. Для нахождения массы бензина при указанных температурах необходимо найти его плотность при этих температурах, а также объем канистры.

Если при температуре t_1 канистра и, следовательно, бензин имеют объем V_1, а при температуре t_2 — объем V_2, то

$$V_2 \approx V_1[1 + 3\alpha(t_2 - t_1)]. \tag{1}$$

Здесь мы учли, что коэффициент объемного расширения железа $\beta_ж = 3\alpha$, поскольку для твердых тел в таблицах даются только значения α.

Плотность бензина при температурах t_1 и t_2 соответственно равна:

$$\varrho_1 \approx \varrho_0(1 - \beta t_1); \tag{2}$$

$$\varrho_2 \approx \varrho_0(1 - \beta t_2). \tag{3}$$

Массы бензина в канистре при этих температурах равны:

$$m_1 = \varrho_1 V_1 \quad \text{и} \quad m_2 = \varrho_2 V_2. \tag{4}$$

Решая уравнения (1) (4) совместно и пренебрегая членами, содержащими коэффициенты объемного расширения в степени выше первой, из-за их малости, получим:

$$\Delta m = \varrho_0(\beta - 3\alpha)(t_2 - t_1)V; \quad \Delta m \approx 0{,}29 \text{ кг}.$$

Пример 5. В жидкости взвешивают стальной шарик. Первое взвешивание производилось при температуре t_1, и вес тела в жидкости оказался на P_1 меньше веса тела в воздухе. Второе взвешивание провели при температуре t_2, и вес тела в жидкости оказался на P_2 меньше истинного веса тела. Температурный коэффициент линейного расширения стали α. Чему равен температурный коэффициент объемного расширения жидкости?

Р е ш е н и е. При взвешивании тел в жидкости их вес — сила, с которой тело действует на динамометр, уменьшается на выталкивающую силу жидкости. Эта сила, в свою очередь, равна весу вытесненной жидкости. Вследствие теплового расширения взвешиваемых тел и изменения плотности жидкости при нагревании выталкивающая сила, а вместе с ней и изменение веса тела в жидкости будут различными при разных температурах. По условию задачи нам фактически известны значения выталкивающей силы при различных температурах и требуется определить одну из величин, через которую она выражается. Модуль этой силы определяется плотностью жидкости при данных температурах и объемом тел, погруженных в жидкость. Если при температуре t_1 в жидкость полностью погрузить шарик объемом V_1, то вес вытесненной жидкости будет равен:

$$P_1 = \varrho_1 g V_1. \qquad (1)$$

Плотность жидкости ϱ_1 и объем стального шарика V_1 при температуре t_1 могут быть выражены через их значения при 0°С:

$$\varrho_1 \approx \varrho_0 (1 - \beta t_1); \qquad (2)$$

$$V_1 = V_0 (1 + 3\alpha t_1), \qquad (3)$$

где β — температурный коэффициент объемного расширения жидкости; 3α — температурный коэффициент объемного расширения стали. Для температуры t_2 мы имеем соответственно:

$$P_2 = \varrho_2 g V_2; \qquad (4)$$

$$\varrho_2 = \varrho_0 (1 - \beta t_2); \qquad (5)$$

$$V_2 = V_0 (1 + 3\alpha t_2). \qquad (6)$$

Решая уравнения (1) — (6) относительно β, находим:

$$\beta = 3\alpha + \frac{P_1 - P_2}{P_2(t_2 - t_0)}.$$

Члены, содержащие коэффициенты теплового расширения в степени выше первой, здесь отброшены из-за их малости.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 8

8.1. Длина стержня при температуре 0°С равна 1000 мм, при температуре 100°С — 1002 мм, при температуре красного каления — 1011,6 мм. Определите температуру красного каления.

8.2. Колесо локомотива имеет диаметр 1 м при 0°С. На сколько отличаются расстояния, пройденные поездом за 1 ч зимой и летом при температурах —25 и +25°С, если в обоих случаях