где c_V — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме и C_{mV} — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме — теплоемкость, рассчитанная на моль газа.

Если при постоянном давлении p газ нагревается от температуры T_1 до температуры T_2, то его объем возрастает от V_1 до V_2 и газ совершает работу

$$A = p(V_2 - V_1) = p\Delta V. \tag{9.9}$$

Применяя уравнение Менделеева — Клапейрона (9.7) для каждого из двух состояний газа, формулу работы можно представить в виде:

$$A = \frac{m}{M} R (T_2 - T_1) = \frac{m}{M} R\Delta T. \tag{9.10}$$

Если в процессе расширения к газу подводится некоторое количество теплоты Q, то согласно закону сохранения и превращения энергии для изобарического процесса

$$Q = \Delta U + A = c_V m\Delta T + \begin{cases} p\Delta V \\ \frac{m}{M} R\Delta T \end{cases}. \tag{9.11}$$

Согласно (9.8) и (9.10)

$$\Delta U = \frac{c_V M}{R} A = \frac{C_{mV}}{R} A. \tag{9.12}$$

Поэтому на основании (9.11) можно записать:

$$Q = \frac{C_{mV} + R}{C_{mV}} \Delta U = \frac{C_{mV} + R}{R} A. \tag{9.13}$$

6. Коэффициент полезного действия идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно, равен:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \tag{9.14}$$

где Q_1 и Q_2 — соответственно количество теплоты, полученное от нагревателя и отданное холодильнику; T_1 и T_2 — температура нагревателя и холодильника.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

1. Основным уравнением, характеризующим состояние идеального газа, является уравнение Менделеева — Клапейрона. Составив это уравнение для каждого из рассматриваемых состояний газа и записав дополнительные условия в виде формул, можно сравнительно легко решить почти любую задачу. Однако этот метод в ряде случаев усложняет решение и приводит к

лишним математическим выкладкам, мало поясняющим физическую сущность явления.

Учитывая это, задачи на расчет параметров состояния газов можно разделить на две основные группы. К первой следует отнести задачи, в которых рассматриваются два или несколько состояний газа постоянной массы и к которым, следовательно, применимо уравнение объединенного газового закона (9.4).

Вторую группу составляют задачи, в условии которых дана масса газа или рассматриваются такие процессы, в которых масса газа изменяется. При решении этих задач пользоваться объединенным газовым законом нельзя, нужно применять уравнение Менделеева — Клапейрона.

Решение задач на нагревание и работу газа при изохорическом и изобарическом процессе основано на первом начале термодинамики и формулах (9.9) — (9.10). При этом обычно предполагают, что необходимые расчетные формулы будут выведены самими учащимися, а это, как правило, и составляет основную трудность решения.

2. Если по условию задачи даны два состояния газа и при переходе газа из одного состояния в другое его масса не меняется, то для решения задачи можно рекомендовать следующую последовательность:

а) Прочитав условие задачи, нужно ясно представить, какой газ участвует в том или ином процессе, и убедиться, что при изменении параметров состояния газа его масса остается постоянной.

б) Сделать, если это возможно, схематический чертеж и, отметив каждое состояние газа, указать параметры p, V, T, характеризующие эти состояния. Определить из условия задачи, какой из этих трех параметров не меняется и какому газовому закону подчиняются переменные параметры. В общем случае могут изменяться все три параметра p, V и T.

в) Записать уравнение объединенного газового закона Клапейрона для данных двух состояний. Если какой-либо параметр остается неизменным, уравнение автоматически переходит в одно из трех уравнений, выражающих закон Бойля — Мариотта, Гей-Люссака или Шарля.

В тех случаях, когда газ заключен в цилиндрический сосуд и объем газа меняется только за счет изменения высоты его столба, но не сечения сосуда, уравнение Клапейрона нужно сразу записывать в виде:

$$\frac{p_1 l_1}{T_1} = \frac{p_2 l_2}{T_2}.$$

г) Представить в развернутом виде параметры p_1, V_1, p_2, V_2, выразив их через заданные величины. Вполне естественно, что расшифровывать нужно только те параметры, которые заданы косвенно, но не те, что даны явно. Особое внимание здесь следует обратить на определение давления. Чтобы его найти в тех случаях, когда газ производит давление на жидкость, нередко приходится использовать закон Паскаля: провести нулевой уровень через границу, отделяющую газ от жидкости, и записать уравнение равновесия жидкости.

д) Записать математически все вспомогательные условия и решить полученную систему уравнений относительно неизвестной величины.

Если в задаче рассматривают процессы, связанные с изменением состояния двух или трех газов, отделенных друг от друга поршнями или входящих в состав смеси, то все указанные действия нужно проделать для каждого газа отдельно.

В задачах на газовые законы рекомендуется пользоваться только абсолютной температурой и сразу же переводить значения температуры по шкале Цельсия в значения по шкале Кельвина.

3. Если по условию задачи дано только одно состояние газа и требуется определить какой-либо параметр этого состояния или же даны два состояния с разной массой газа, то рекомендуется поступать так:

а) Установить, какие газы участвуют в рассматриваемых процессах.

б) Для каждого состояния каждого газа (если их несколько) составить уравнение Менделеева — Клапейрона. Если дана смесь газов, то это уравнение записывают для каждого компонента. Связь между значениями давлений отдельных газов и результирующим давлением смеси устанавливается законом Дальтона.

в) Записать математически дополнительные условия задачи и решить полученную систему уравнений относительно искомой величины.

В комбинированных задачах, где рассматривается движение сосуда с газом, уравнение газового состояния добавляют к уравнениям механики.

Пример 1. Для погружения и всплытия подводной лодки в ней имеются два сообщающихся между собой резервуара. В погруженном состоянии один из резервуаров емкостью V заполнен водой, во втором емкостью V_1 находится сжатый воздух. Каково должно быть минимальное давление сжатого воздуха, чтобы при всплытии лодки с глубины H сжатый воздух полностью вытеснил воду из балластной цистерны? Атмосферное давление нормальное, изменением температуры воздуха при расширении пренебречь.

Решение. Если соединить резервуары между собой, то при достаточной степени сжатия воздух, заключенный во втором сосуде, начнет расширяться и вытеснит воду из балластной цистерны наружу. Так как масса и температура сжатого воздуха не меняются, то увеличение его объема вызовет понижение давления. Учитывая сделанные выше рекомендации, решение задачи следует построить на законе Бойля — Мариотта.

Пусть p_1 и V_1 — давление и объем сжатого воздуха до расширения, p_2 и V_2 — давление и объем воздуха в тот момент, когда он, вытеснив воду, займет оба резервуара, тогда

$$p_1V_1 = p_2V_2.$$

Рассмотрим каждый из параметров воздуха и выясним, какие из них нужно представить в развернутом виде. Давление p_1 требуется определить по условию задачи, объем V_1 задан — он равен объему резервуара со сжатым воздухом, давление p_2 можно найти, исходя из следующих соображений. Чтобы вытеснить воду из балластного резервуара, воздух во втором состоянии должен находиться под давлением, большим или равным гидростатическому давлению на глубине H, т. е.

$$p_2 = p_a + \varrho gH,$$

где ϱ — плотность морской воды. Остается выразить объем V_2; он, как нетрудно заметить, равен суммарной емкости обоих резервуаров:

$$V_2 = V_1 + V.$$

Подставляя выражения для p_2 и V_2 в формулу закона Бойля — Мариотта, мы получим уравнение газового состояния в окончательном виде:

$$p_1V_1 = (p_a + \varrho gH)(V_1 + V),$$

откуда начальное давление в резервуаре со сжатым воздухом должно быть равно:

$$p_1 = \frac{V + V_1}{V_1}(p_a + \varrho gH).$$

Пример 2. Посредине откачанной и запаянной с обоих концов горизонтальной трубки находится столбик ртути длиной $h = 19{,}6$ мм. Если трубку поставить под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, то столбик ртути переместится на $\Delta l_1 = 20$ мм; если поставить вертикально — на $\Delta l_2 = 30$ мм. До какого давления откачан воздух из трубки?

Р е ш е н и е. В задаче говорится о трех состояниях двух газов одинаковой массы, разделенных столбиком ртути (рис. 9.1). В процессе движения трубки из горизонтального положения в вертикальное вследствие смещения столбика ртути газ, находящийся в правой части трубки, будет расширяться, в левой — сжиматься.

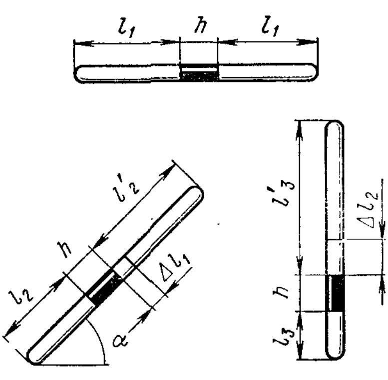

Рис. 9.1

Так как по условию задачи масса и температура газа не меняются, то для каждой пары состояний каждого газа должно иметь место уравнение закона Бойля — Мариотта. Совокупность этих уравнений полностью характеризует изотермический процесс, описываемый в данной задаче.

Состояние газа при горизонтальном положении трубки примем за первое состояние. Вторым состоянием будем считать состояние газа в наклонной трубке, третьим состояние газа при вертикальном положении трубки.

Обозначим давление газа в левой части трубки в каждом из этих состояний через p_1, p_2, p_3, длину столбов воздуха через l_1, l_2, l_3, тогда, применяя закон Бойля — Мариотта для каждой пары состояний и учитывая, что площадь поперечного сечения трубки всюду одинакова, получим:

$$p_1 l_1 = p_2 l_2; \quad p_1 l_1 = p_3 l_3.$$

Аналогично для газа, заключенного в правой части трубки:

$$p_1 l_1 = p_2' l_2' \quad \text{и} \quad p_1 l_1 = p_3' l_3',$$

так как в первом состоянии давления и объемы газа в обеих частях трубки были одинаковы.

Если при отклонении трубки от горизонтального положения на угол α столбик ртути сместится на расстояние Δl_1, а при отклонении на угол 90° на расстояние Δl_2, то, как видно из чертежа,

$$l_2 = l_1 - \Delta l_1, \quad l_3 = l_1 - \Delta l_2;$$

$$l_2' = l_1 + \Delta l_1, \quad l_3' = l_1 + \Delta l_2.$$

Кроме того, при равновесии столбика ртути должно быть

$$p_2 = p_2' + \varrho g h \sin\alpha \quad \text{и} \quad p_3 = p_3' + \varrho g h,$$

где ϱ — плотность ртути

Подставляя в уравнение закона Бойля — Мариотта вместо l_2, l_3, l_2', l_3', p_2 и p_3 их выражения, получим:

$$p_1 l_1 = (p_2' + \varrho g h \sin\alpha)(l_1 - \Delta l_1);$$

$$p_1 l_1 = (p_3' + \varrho g h)(l_1 - \Delta l_2);$$

$$p_1 l_1 = p_2'(l_1 + \Delta l_1) \quad \text{и} \quad p_1 l_1 = p_3'(l_1 + \Delta l_2).$$

Решая полученные уравнения относительно p_1, найдем:

$$p_1 = \frac{\varrho g h}{2}\left[\sqrt{\frac{\Delta l_1(\Delta l_2 - \Delta l_1 \sin\alpha)}{\Delta l_2(\Delta l_1 - \Delta l_2 \sin\alpha)}} - \sqrt{\frac{\Delta l_2(\Delta l_1 - \Delta l_2 \sin\alpha)}{\Delta l_1(\Delta l_2 - \Delta l_1 \sin\alpha)}}\right];$$

$$p_1 \approx 6 \text{ мм рт. ст.}$$

Пример 3. В стеклянную манометрическую трубку, запаянную с одного конца, налита ртуть. Высота столба воздуха в запаянном колене равна $2H$, причем уровень ртути в открытом колене стоит на H выше, чем в закрытом. Манометр установлен в ракете, которая начинает подниматься вертикально вверх с ускорением $a = g$. Какова будет разность уровней ртути в коленах манометра при подъеме ракеты, если в кабине ракеты поддерживается нормальное атмосферное давление?

Решение. При движении тел вертикально вверх с ускорением на эти тела со стороны опоры действует сила нормального давления, сообщающая им ускорение, модуль которого равен $g + a$. Такая же по модулю, но противоположная по направлению сила действует и на опору. Эффект получается такой, как если бы ускорение свободного падения $\vec{g}$ возросло на величину $\vec{a}$. В результате вес тел в движущейся системе возрастает и становится равным не $\varrho g V$, а $\varrho (g + a) V$.

Аналогичное явление происходит и при подъеме манометра в ракете. Перед стартом ракеты воздух в закрытом колене манометра был сжат до такой степени, что уравновешивал атмосферное давление и давление столбика ртути в открытом колене. Как только ракета начнет подниматься вверх с ускорением $\vec{a}$, давление столба ртути на поверхность $1 - 1$ (рис. 9.2) возрастет, ртуть начнет переливаться в закрытое колено, сжимая находящийся там воздух. Разность уровней ртути будет уменьшаться до тех пор, пока упругость воздуха не достигнет значения, необходимого для равновесия.

Таким образом, при ускоренном движении ракеты происходит изотермическое сжатие воздуха в закрытом колене, вызванное увеличением веса ртути.

Поскольку в процессе сжатия температура и масса воздуха остаются неизменными, параметры состояния газа подчиняются закону Бойля — Мариотта.

Если в неподвижной ракете давление и высота столба воздуха в закрытом колене были равны p_1 и $2H$, а при ускоренном подъеме — p_2 и H_2, то должно быть

$$p_1 2H = p_2 H_2,$$

так как сечение трубки всюду одинаково.

По условию задачи исходная высота воздушного столба задана, поэтому дальнейшее решение задачи состоит в том, чтобы представить в развернутом виде параметры p_1 и p_2, а также высоту H_2, выразив их через заданные и искомые величины.

Выбрав поверхность нулевого уровня по границе $1 - 1$, согласно закону Паскаля запишем:

$$p_1 = p_a + \varrho g H,$$

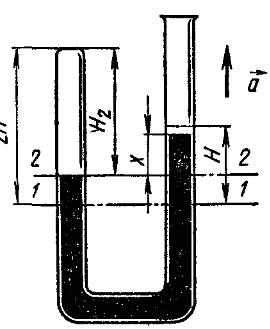

Рис. 9.2

где $p_а$ — атмосферное давление; H — разность уровней ртути в сосудах в неподвижной ракете; ϱ — плотность ртути.

Выбирая поверхность одного уровня по границе 2 — 2 для каких-нибудь двух произвольных точек, лежащих на этой поверхности, при относительном равновесии жидкости в сосудах будем иметь:

$$p_2 = p_а + \varrho (g + a) x,$$

где $\varrho (g + a) x$ — давление столба ртути, поднимающейся вертикально вверх с ускорением $\vec{a}$; x — разность уровней ртути в сосудах во время движения ракеты.

Высоту столба воздуха H_2 во втором состоянии можно выразить через начальную высоту $2H$, начальную разность уровней ртути H и конечную разность x. Как видно из чертежа,

$$H_2 = 2H - \frac{H - x}{2}.$$

(Второй член правой части равенства численно равен смещению уровней ртути от начального положения.)

Подставив выражения для p_1, p_2 и H_2 в формулу закона Бойля — Мариотта, мы и получим окончательное уравнение для определения неизвестной величины x:

$$(p_а + \varrho g H) 2H = [p_а + \varrho (g + a) x]\left(2H - \frac{H - x}{2}\right).$$

Или, если учесть, что $p_а = \varrho g H_0$ и $a = g$, после сокращений получим:

$$4 (H + H_0) H = 3HH_0 + 2x^2 + 6Hx,$$

откуда

$$x = \frac{\sqrt{17H^2 + 2HH_0} - 3H}{2}.$$

Пример 4. Компрессор захватывает при каждом качании воздух объемом $v = 1$ л при нормальном атмосферном давлении и температуре $T_1 = 273$ К и нагнетает его в автомобильный баллон, объем которого $V = 0{,}5$ м^3; температура воздуха в баллоне $T_2 = 290$ К. Сколько качаний должен сделать компрессор, чтобы площадь соприкосновения покрышки с полотном дороги уменьшилась на $\Delta S = 100$ см^2, если до этого она равнялась $S = 450$ см^2 и на колесо приходится нагрузка $F = 4{,}9$ кН?

Решение. В процессе работы компрессора воздух, нагнетаемый в баллон, сжимается от объема, занимаемого им в атмосфере, до объема в камере автопокрышки. В результате упругость баллона возрастает и площадь его соприкосновения с дорогой уменьшается. Следует заметить, что в баллоне и до этого мог находиться воздух, именно поэтому в условии задачи и говорится об уменьшении площади соприкосновения покрышки с дорогой, вызванном увеличением давления, но не о самой площади соприкосновения, величина которой, помимо прочего, зависит от полного давления в баллоне.

Так как при переходе воздуха из свободного состояния в сжатое изменяются его давление, объем и температура, то основным уравнением, характеризующим процесс, служит уравнение объединенного газового закона Клапейрона.

В первом состоянии (в атмосфере) параметры состояния воздуха равны соответственно p_1, V_1, T_1. Во втором состоянии (в баллоне) этот же воздух после n качаний компрессора будет сжат до давления p_2, займет объем баллона V_2 и нагреется до температуры T_2. Объем баллона считается при этом неизменным. Параметры первого и второго состояний воздуха связаны между собой уравнением

$$\frac{p_1V_1}{T_1}=\frac{p_2V_2}{T_2}.$$

По условию задачи нам даны $p_1=p_0$, $V_2=V$, T_1 и T_2, поэтому нужно расшифровать V_1 и p_2.

Если при одном качании компрессор захватывает воздух в объеме v, то весь воздух, содержащийся в объеме V_1, будет перекачан из атмосферы в баллон за n качаний, т. е.

$$V_1=nv.$$

Чтобы определить давление p_2, нужно учесть следующее. Если до того, как баллон стали накачивать, в нем уже было начальное избыточное давление[1] $p_и$ и площадь соприкосновения покрышки с дорогой равнялась S, то

$$p_и=\frac{F}{S},$$

где F — нагрузка, приходящаяся на колесо. После того как баллон подкачали, избыточное давление в нем возросло на p_2 и стало равным $p_и+p_2$; площадь соприкосновения с полотном дороги уменьшилась на ΔS и стала равной $S-\Delta S$. Так как нагрузка на колесо осталась прежней, то

$$p_и+p_2=\frac{F}{S-\Delta S}.$$

Исключая из последних двух равенств начальное давление $p_и$ и подставляя в исходное уравнение вместо параметров V_1 и p_2 их выражения, мы получим уравнение объединенного газового закона в окончательном виде:

$$\frac{p_1nv}{T_1}=\frac{F\Delta SV}{S(S-\Delta S)T_2},$$

[1] Избыточным давлением называется давление сверх атмосферного.

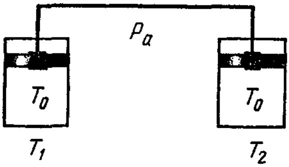

Рис. 9.3

откуда

$$n=\frac{F\Delta SVT_1}{p_1S\,(S-\Delta S)\,vT_2}=148$$

Пример 5. Поршни двух одинаковых цилиндров связаны между собой жесткой тягой так, что объемы под поршнями равны. Под поршнями находится одинаковое количество газа при температуре T_0. Каково будет давление в цилиндрах, если один из них нагреть до температуры T_1, а второй охладить до температуры T_2? Чему будет равно при этом относительное изменение объема газа в каждом цилиндре? Весом поршней и тяги пренебречь, трение не учитывать, атмосферное давление p_a.

Решение. В задаче рассматривают два состояния двух одинаковых газов, заключенных в разные цилиндры (рис. 9.3) Поршни этих цилиндров связаны между собой жесткой тягой и могут скользить без трения. В такой системе изменение давления или объема одного из газов вызывает изменение параметров состояния другого газа. Причем изменения объемов газа под поршнями будут всегда равны между собой, так как по условию задачи сами цилиндры и объемы под поршнями одинаковые, а поршни связаны друг с другом жестко. Что касается давлений газов, то они могут быть разными. На них накладывается лишь единственное ограничение: в сумме эти давления должны уравновесить давление, производимое на поршни снаружи.

При нагревании одного газа и охлаждении другого у каждого из них изменяются все три параметра состояния: давление, объем и температура.

Рассмотрим газ в левом сосуде. До нагревания он находился под давлением p_1, занимал объем V_1 и имел температуру T_0; после нагревания эти параметры имеют значения p_2, V_2 и T_1 Поскольку масса газа не менялась, то

$$\frac{p_1V_1}{T_0}=\frac{p_2V_2}{T_1}. \tag{1}$$

До охлаждения газа, содержащегося в правом сосуде, его давление, объем и температура имели значения p_1, V_1, T_0; после охлаждения — p_3, V_3, T_2. Масса газа при нагревании не менялась, поэтому

$$\frac{p_1V_1}{T_0}=\frac{p_3V_3}{T_2}. \tag{2}$$

Поскольку поршни находятся в равновесии, то должно быть в первом случае:

$$2p_a=2p_1, \tag{3}$$

во втором:

$$2p_а = p_2 + p_3. \qquad (3')$$

Относительное изменение объема газа в каждом цилиндре равно:

$$x = \frac{V_1 - V_2}{V_1} = \frac{V_1 - V_3}{V_1} \qquad (4)$$

Из уравнений (1) (4) находим:

$$p_2 = \frac{2T_1}{T_1 + T_2} p_а, \qquad p_3 = \frac{2T_2}{T_1 + T_2} p_а;$$

$$x = \frac{2T_0 - T_1 - T_2}{2T_0}.$$

Пример 6. Сосуд емкостью $2V = 2 \cdot 10^{-3}$ м^3 разделен пополам полупроницаемой перегородкой. В одну половину сосуда введен водород массой $m_в = 2$ г и азот массой $m_а = 28$ г, в другой половине вакуум. Через перегородку может диффундировать только водород. Во время процесса поддерживается температура $T = 373$ К. Какие давления установятся в обеих частях сосуда?

Решение. При заполнении одной половины сосуда смесью газов молекулы водорода будут диффундировать через перегородку в другую половину сосуда до тех пор, пока давления водорода по обе стороны перегородки не сравняются. Так как перегородка делит сосуд на равные объемы и температура в них одна и та же, во вторую половину сосуда продиффундирует ровно половина начального количества водорода. После этого в одной части сосуда окажется смесь азота с водородом, в другой — продиффундированный водород.

Для решения задачи нужно составить уравнение Менделеева — Клапейрона для каждого компонента газа: отдельно для азота и отдельно для водорода. Эти уравнения позволят определить давление каждого газа, после чего, используя закон Дальтона, легко найти давление смеси азота с водородом в одной половине сосуда и водорода в другой.

Если объем сосуда равен $2V$, то в половине этого объема азот массой $m_а$ при температуре T будет производить давление $p_а$ и

$$p_а V = \frac{m_а}{M_а} RT, \qquad (1)$$

где $M_а$ — молярная масса азота.

В том же объеме при той же температуре после диффузии оставшийся водород массой $m_в/2$ будет производить давление $p_в$, причем

$$p_в V = \frac{m_в}{2M_в} RT, \qquad (2)$$

где $M_в$ — молярная масса водорода.

Согласно закону Дальтона полное давление газа в этой части сосуда станет равным:

$$p = p_{\text{а}} + p_{\text{в}}. \tag{3}$$

По другую сторону перегородки давление водорода будет равно $p_{\text{в}}$. Уравнениями (1) — (3) условия задачи представлены полностью.

При проведении числовых расчетов в задачах с применением уравнения Менделеева — Клапейрона приходится пользоваться молярными массами газов, определяя их с помощью таблиц. В таблицах же даются значения относительных атомных масс элементов. Поэтому для нахождения молярной массы того или иного газа нужно прежде всего установить, сколько атомов входит в состав его молекулы. В нашей задаче, например, дается азот и водород. В свободном состоянии молекулы азота и водорода содержат не один, а два атома. Поэтому молярные массы этих газов будут равны соответственно $M_{\text{а}} = 2{,}8 \cdot 10^{-2}$ кг/моль и $M_{\text{в}} = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Эти значения мы и должны взять при расчете.

Из уравнений (1) — (3) находим:

$$p_{\text{в}} = \frac{m_{\text{в}}}{2M_{\text{в}}} \frac{RT}{V}; \quad p_{\text{в}} \approx 150 \text{ кПа};$$

$$p = \left(\frac{m_{\text{в}}}{2M_{\text{в}}} + \frac{m_{\text{а}}}{M_{\text{а}}} \right) \frac{RT}{V}; \quad p \approx 460 \text{ кПа}.$$

Пример 7. В откачанной ампуле объемом $V = 3$ см^3 содержится радий массой $m = 5$ мг в течение времени $\tau = 1$ год. В результате радиоактивного распада из радия массой $m_0 = 1$ г за время $\tau_0 = 1$ с вылетает $n_0 = 3{,}7 \cdot 10^{10}$ альфа-частиц, представляющих собой ядра гелия. Какое давление будет производить гелий при температуре $T = 300$ К?

Решение. Нам задано одно состояние гелия и дается ряд дополнительных условий, позволяющих определить массу газа. Для решения задачи нужно использовать основное уравнение газового состояния.

Если в закрытой ампуле объемом V находится ν молей гелия под давлением p при температуре T, то согласно уравнению Менделеева — Клапейрона

$$pV = \nu RT.$$

Число молей гелия, образовавшегося в результате рекомбинации альфа-частиц, вылетающих из радия, можно найти двумя способами: используя дополнительные условия задачи, определить массу гелия и, найдя с помощью таблиц его молярную массу, разделить m на M или по тем же дополнительным данным найти число атомов гелия N, образовавшихся в ампуле к интересующему нас моменту времени, и, зная число Авогадро $N_{\text{А}}$, определить ν из формулы $\nu = \frac{N}{N_A}$. Воспользуемся вторым способом.

Если из радия массой m_0 за время τ_0 вылетает n_0 альфа-частиц, то из радия массой m за время τ вылетит число частиц, равное

$$N = \frac{n_0 m \tau}{m_0 \tau_0}.$$

Число молей гелия, заключенного в ампуле, в этом случае равно:

$$\nu = \frac{n_0 m \tau}{m_0 \tau_0 N_A},$$

и уравнение состояния газа можно представить в окончательном виде так:

$$pV = \frac{n_0 m \tau}{m_0 \tau_0 N_A} RT.$$

Отсюда после подстановки числовых значений получим:

$$p \approx 8 \text{ Па}.$$

Пример 8. По газопроводной трубе идет углекислый газ под давлением $p = 392$ кПа при температуре $T = 280$ К. Какова средняя скорость движения газа в трубе, если через поперечное сечение трубы, равное $S = 5$ см^2, за $\tau = 10$ мин протекает газ массой $m = 20$ кг?

Решение. В задаче рассматривается одно состояние равномерно движущегося газа. Поэтому, какой бы слой газа мы ни выбрали в движущемся потоке, параметры его состояния должны удовлетворять уравнению Менделеева—Клапейрона.

Выделим в трубе некоторый объем V, содержащий газ массой m, этот газ весь проходит через поперечное сечение трубы S за время τ. Если газ находится под давлением p и имеет температуру T, то

$$pV = \frac{m}{M} RT, \tag{1}$$

где $M = 4{,}4 \cdot 10^{-2}$ кг/моль — молярная масса углекислого газа CO_2.

Объем газа можно выразить через сечение S и высоту выделенного цилиндра: $V = Sl$. За время τ через сечение трубы проходит весь газ, заключенный в объеме этого цилиндра, поэтому при скорости v движения газа должно быть $l = v\tau$ и

$$V = Sv\tau. \tag{2}$$

Решение уравнений (1) — (2) относительно скорости движения газа дает:

$$v = \frac{mRT}{MpS\tau}; \quad v \approx 9 \text{ м/с}.$$

Пример 9. Сколько гелия потребуется для наполнения воздушного шара диаметром $d = 10$ м, чтобы шар мог поднять груз весом $P = 9{,}8$ кН при нормальном атмосферном давлении и температуре $T = 290$ К? Объемом груза пренебречь.

Решение. Для подъема воздушного шара необходимо, чтобы выталкивающая сила, равная по модулю весу вытесненного им воздуха $P_в$, была бы больше или в крайнем случае равна весу газа $P_г$, наполняющего оболочку шара, и весу P груза, т. е. $P_в \geqslant P_г + P$, или

$$m_в g \geqslant m_г g + P, \tag{1}$$

где $m_в$ — масса воздуха, вытесненного шаром; $m_г$ — масса газа (гелия), наполняющего оболочку.

Если бы масса воздуха $m_в$ была известна, то из этого уравнения можно было бы определить массу гелия. Чтобы найти $m_в$, воспользуемся уравнением Менделеева — Клапейрона.

Воздух, окружающий шар, находится под атмосферным давлением $p_а$ и имеет температуру T, поэтому для воздуха, имеющего объем оболочки V, уравнение газового состояния дает:

$$p_а V = \frac{m_в}{M_в} RT, \tag{2}$$

где $M_в = 2{,}9 \cdot 10^{-2}$ кг/моль — молярная масса воздуха.

И наконец, последним соотношением, которое нужно использовать в решении, является формула

$$V = \frac{\pi d^3}{6}, \tag{3}$$

поскольку нам известен диаметр воздушного шара d, а не его объем.

Из уравнений (1) — (3) находим массу гелия:

$$m_г = \frac{M_в p_а \pi d^3}{6RT} - \frac{P}{g}; \quad m_г \approx 530 \text{ кг}.$$

Пример 10. В цилиндре с площадью основания $S = 100$ см^2 находится воздух при температуре $T = 290$ К. На высоте $H = 0{,}60$ м от основания цилиндра расположен легкий поршень, на котором лежит гиря массой $m = 100$ кг. Какую работу совершит газ при расширении, если его нагреть на $\Delta T = 50$ К? Атмосферное давление $p_а = 10^5$ Па.

Решение. В процессе нагревания газ расширяется и совершает работу по преодолению силы тяжести груза и силы атмосферного давления, действующих на поршень. Так как эти силы постоянные, то при достаточно медленном нагревании газ будет расширяться изобарически и его работу можно вычислить по формуле

$$A = \frac{m}{M} R\Delta T \quad \text{или} \quad A = p\Delta V.$$

По условию задачи нам задан объем газа в исходном состоянии, но не указано, что это за газ. Поэтому нужно воспользоваться второй формулой.

Если при температуре T_1 газ занимал объем V_1, а после нагревания до температуры T_2 стал занимать объем V_2, то работа расширения равна:

$$A = p(V_2 - V_1), \tag{1}$$

где p — давление, производимое газом на поршень.

При равновесии поршня это давление в каждый момент времени уравновешено атмосферным давлением p_a и давлением $\frac{mg}{S}$, создаваемым гирей:

$$p = p_a + \frac{mg}{S}. \tag{2}$$

Поскольку газ расширяется изобарически, параметры начального и конечного состояний газа связаны равенством

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}, \tag{3}$$

или

$$\frac{HS}{T_1} = \frac{V_2}{T_2},$$

так как по условию задачи известны площадь и начальная высота столба газа H.

Решая уравнения (1) — (3) совместно, получим:

$$A = \left(p_a + \frac{mg}{S}\right)\left(\frac{T_2 - T_1}{T_1}\right) HS; \quad A \approx 207 \text{ Дж}.$$

Пример 11. Какое количество теплоты необходимо для нагревания на $\Delta T = 16$ К кислорода массой $m = 7 \cdot 10^{-3}$ кг, находящегося в цилиндре под поршнем, на котором лежит груз, если молярная теплоемкость кислорода при нагревании его при постоянном объеме равна $C_{mV} = 2{,}1 \cdot 10^{-2}$ Дж/(моль · К)? Трение между поршнем и цилиндром не учитывать.

Решение. При изобарическом нагревании кислорода под поршнем цилиндра часть энергии, подводимой к газу, идет на увеличение его внутренней энергии, часть — на совершение работы по перемещению поршня. Вследствие большого теплового расширения газов количество теплоты, расходуемое на совершение работы по преодолению внешних сопротивлений, соизмеримо с количеством теплоты, идущим на увеличение внутренней энергии газа. Процесс теплопередачи при изобарическом расширении кислорода в цилиндре описывается уравнением первого закона термодинамики:

$$Q = \Delta U + A,$$

которое нам необходимо записать в развернутом виде.

Если ν молей кислорода нагреть на ΔT, то внутренняя энергия газа увеличится на

$$\Delta U = C_{mV}\nu\Delta T.$$

Эту формулу можно представить иначе, выразив ν через массу кислорода m и его молярную массу M:

$$\Delta U = C_{mV}\frac{m}{M}\Delta T.$$

Так как масса, молярная масса и изменение температуры газа известны, работу газа при изобарическом процессе нужно рассчитать по формуле

$$A = \frac{m}{M}R\Delta T.$$

Подставляя вместо ΔU и A их выражения в исходное уравнение энергетического баланса, получим окончательную формулу для подсчета количества теплоты, необходимого для нагревания кислорода:

$$Q = \left(C_{mV} + R\right)\frac{m}{M}\Delta T; \quad Q \approx 102 \text{ Дж}.$$

Пример 12. Сечение поршня паровой машины равно $S = 100$ см^2, ход поршня $l = 50$ см. Пар поступает в цилиндр под давлением $p_1 = 196$ кПа, которое в процессе смещения поршня на $\Delta l = 1$ см равномерно понижается на $\Delta p = 1{,}96$ кПа. Какую мощность развивает машина, когда вал ее делает $f = 240$ об/мин?

Решение. Если в цилиндр ввести пар при избыточном давлении p, поршень начнет перемещаться и приведет во вращение вал. Полагая, что работа расширения пара целиком идет на создание мощности машины, эту мощность можно вычислить по формуле

$$N = \frac{A_1}{t}, \tag{1}$$

где A_1 — работа пара за один ход поршня; t — продолжительность хода.

В данном случае в отличие от ранее разобранных примеров пар расширяется не изобарически. Чтобы вычислить работу расширения газа при переменном давлении с помощью формулы $A = p\Delta V$, нужно знать среднее давление $p_{\text{ср}}$. Тогда $A = p_{\text{ср}}\Delta V$.

Если давление изменяется пропорционально смещению поршня, то

$$p_{\text{ср}} = \frac{p_1 + p_2}{2},$$

где p_1 и p_2 — давления в начале и в конце рассматриваемого перемещения.

Допустим, что в крайних положениях поршня (в начале и в конце процесса расширения пара) давление и объем пара в цилиндре были равны соответственно p_1, V_1 и p_2, V_2, тогда при одном ходе поршня пар совершит работу

$$A_1=\frac{p_1+p_2}{2}\left(V_2-V_1\right).$$

По условию задачи при перемещении поршня на единицу длины ($\Delta l=1$ см) давление пара уменьшается на величину Δp, поэтому в конце хода поршня, когда смещение достигает величины l, давление понизится на $\frac{\Delta p}{\Delta l}l$ и станет равным

$$p_2=p_1-\frac{l}{\Delta l}\Delta p.$$

Если сечение цилиндра равно S и ход поршня l, то максимальное приращение объема пара равно:

$$V_2-V_1=Sl.$$

С учетом двух последних равенств формулу работы пара за один ход можно представить в виде:

$$A_1=\left(p_1-\frac{l}{\Delta l}\frac{\Delta p}{2}\right)Sl. \qquad (2)$$

Продолжительность одного хода поршня легко определить, зная скорость вращения вала f. За один ход поршня вал делает полоборота, поэтому в формуле

$$t=\frac{n}{f} \qquad (3)$$

нужно взять число оборотов $n=0{,}5$.

Подставляя выражения (2) и (3) в формулу мощности (1) и проводя вычисления, получим:

$$N=\left(p_1-\frac{l}{\Delta l}\frac{\Delta p}{2}\right)Sl\frac{f}{n}; \quad N\approx 6 \text{ кВт}.$$

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 9

9.1. Если давление, под которым находится газ, изменить на 200 Па, то объем газа изменится на 3 л. Если давление изменить на 500 Па, объем изменится на 5 л. Каковы были начальный объем и давление газа? Температура газа во время опыта не менялась.

9.2. Вертикальный цилиндр высотой $2l$ разделен посредине легким подвижным поршнем. В поршне имеется отверстие, закрытое пробкой, по обе стороны поршня находится одинаковое количество воздуха при давлении p. На какое расстояние нужно сдвинуть поршень, чтобы вылетела пробка, если она вылетает при избыточном давлении Δp?