Все заряженные тела обладают электрической энергией, заключенной (локализованной) в электрическом поле, созданном этими телами. Эту энергию можно измерить работой, которую необходимо совершить, чтобы зарядить данное тело. Для уединенного заряженного тела эта работа, а следовательно, и энергия тела равны:

$$A = W_p = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}, \tag{11.25}$$

где q, φ и C — соответственно заряд, потенциал и емкость тела.

Энергия поля заряженного конденсатора равна:

$$W_p = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2 S d}{2}, \tag{11.26}$$

где q и U — заряд и напряжение на конденсаторе емкостью C; S и d — площадь пластины и расстояние между обкладками конденсатора.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

1. Типичные задачи электростатики состоят в том, чтобы:

а) по заданному распределению зарядов в пространстве найти созданное ими поле — вычислить напряженность и потенциал поля в произвольной точке — или, наоборот, зная характеристики поля, найти создающие его заряды;

б) по заданному расположению и форме проводников, зная потенциал каждого проводника или их общий заряд, найти распределение зарядов в проводниках и вычислить характеристики полей, создаваемых этими проводниками.

В курсе элементарной физики, за небольшим исключением, рассматривают наиболее простые случаи: задачи о точечных зарядах, заряженных проводящих сферах, плоскостях и конденсаторах.

Иногда в эти задачи включают элементы механики, и задачи получаются комбинированными, однако главное внимание в них стараются уделять идеям электричества.

2. Задачи по электростатике в курсе элементарной физики удобно разделить на две группы. К первой группе можно отнести задачи о точечных зарядах и системах, сводящихся к ним, ко второй — все задачи о заряженных телах, размерами которых нельзя пренебречь.

Решение задач первой группы основано на применении законов механики с учетом закона Кулона и вытекающих из него следствий. Такие задачи рекомендуется решать в следующем порядке:

а) Расставить силы, действующие на точечный заряд, помещенный в электрическое поле, и записать для него уравнение равновесия или основное уравнение динамики материальной точки.

б) Выразить силы электрического взаимодействия через заряды и характеристики поля и подставить эти выражения в исходное уравнение.

Силы взаимодействия зарядов можно рассчитать или по закону Кулона, или по формуле $\vec{F}=q\vec{E}$, считая, что один из зарядов находится в поле другого. Второй способ сводится фактически к расчету электрического поля в той или иной точке пространства, где находится рассматриваемый заряд, им обычно пользуются в тех случаях, когда поля создаются протяженными заряженными телами. Используя последнюю формулу, следует иметь в виду, что она справедлива не только для точечного заряда, но и для заряженных протяженных тел.

в) Если при взаимодействии заряженных тел между ними происходит перераспределение зарядов, к составленному уравнению добавляют уравнение закона сохранения зарядов (11.2).

г) Далее, как обычно, надо записать вспомогательные формулы и полученную систему уравнений решить относительно неизвестной величины.

д) Проводя вычисления в задачах электростатики, полезно помнить, что множитель $k=1/(4\pi\varepsilon_0)$, входящий во многие расчетные формулы, равен $k=9{,}00\cdot10^9$ м/Ф. Именно такое значение k и нужно подставлять в эти формулы.

Задачи на расчет полей, созданных точечными зарядами, заряженными сферами и плоскостями,— нахождение напряженности или потенциала в какой-либо точке пространства — основаны на использовании формул (11.3) — (11.6) и (11.8) — (11.10). Особое внимание следует обращать на векторный характер напряженности $\vec{E}$ и помнить, что знак перед потенциалом φ определяется знаком заряда, создающего поле.

Вычисление работы, совершенной полем над точечным зарядом, а также энергии, которую приобретает заряд в результате действия сил поля, особых затруднений не представляет. Эти величины легко могут быть найдены с помощью формул (11.7), (11.11) — (11.13) в комбинации с формулой (11.10) и уравнения закона сохранения и превращения энергии $A=W_2-W_1$. Как и раньше, под W_1 и W_2 здесь можно понимать только полную механическую энергию заряженного тела, под A — работу внешних сил, к которым можно отнести и силы электрического поля.

Решение задач второй группы основано на использовании формул (11.14) — (11.26).

Если по условию задачи дано одно заряженное тело, то величины, характеризующие электрические свойства тела, должны быть связаны между собой формулами (11.14) — (11.18) и (11.24) — (11.25). С учетом соотношения (11.9) они позволяют найти одну из этих величин, если другие заданы.

В задачах на систему заряженных тел (обычно плоских конденсаторов) прежде всего необходимо установить тип соединения: выяснить, какие из конденсаторов соединены между собой последовательно, какие — параллельно.

В случае смешанного соединения конденсаторов, представляющего собой комбинацию последовательно и параллельно соединенных групп, в каждой из которых конденсаторы соединены по такому же принципу, расчеты удобно начинать с определения емкости всего соединения, поочередно применяя формулы (11.21) и (11.24).

Знание общей емкости соединения значительно упростит все дальнейшие расчеты, связанные с нахождением зарядов и напряжений на конденсаторах.

Соединение элементов цепи, в том числе и конденсаторов, может не относиться ни к последовательному, ни к параллельному. Общую емкость такого сложного соединения можно найти сравнительно просто лишь в тех случаях, когда в схеме есть точки с одинаковыми потенциалами. Такие точки можно соединять и разъединять, распределение зарядов и потенциалов на конденсаторах от этого не изменяется. Соединяя или разъединяя точки с одинаковыми потенциалами, можно сложное включение конденсаторов свести к комбинации последовательных и параллельных соединений. Точки с одинаковым потенциалом есть в схемах, обладающих симметрией. Способы нахождения точек с одинаковыми потенциалами подробно описаны в главе 12; все они полностью применимы и для конденсаторов.

В общем случае при расчетах электрических цепей, состоящих из конденсаторов, которые невозможно свести к комбинациям последовательных и параллельных соединений, нужно воспользоваться следующими двумя очевидными правилами.

Если батарею незаряженных конденсаторов подключить к источнику напряжения и сообщить ей некоторый заряд, то согласно закону сохранения заряда алгебраическая сумма разделенных зарядов любой группы обкладок, изолированных от источника, всегда должна равняться нулю, поскольку заряды на этих обкладках появляются вследствие индукции.

Так как работа сил электростатического поля при перемещении заряда по замкнутому контуру равна нулю, то алгебраическая сумма напряжений на конденсаторах и батареях, встречающихся при обходе любого замкнутого контура цепи, тоже должна равняться нулю.

Составив уравнения, связывающие заряды и напряжения на конденсаторах, к ним нужно добавить формулы емкости для каждого конденсатора и всей системы в целом. После этого получается полная система уравнений, позволяющая, в частности, найти и общую емкость системы. Если нам удается установить тип соединения конденсаторов и ясно, как найти их общую емкость, дальнейший расчет сведется к тому, чтобы определить связь между зарядами и напряжениями на конденсаторах и выразить через них емкости конденсаторов. В случае последовательного соединения надо составить систему уравнений (11.19) — (11.21), (11.17), в случае параллельного — (11.22) — (11.24) и (11.17).

3. При решении задач электростатики и ответах на отдельные качественные вопросы полезно иметь в виду следующее:

1) Положительные электрические заряды, предоставленные самим себе, движутся в электрическом поле от точек с большим потенциалом к точкам, где потенциал меньше. Отрицательные заряды перемещаются в противоположном направлении.

2) Напряженность электрического поля внутри статически заряженного проводника равна нулю. Этот результат не зависит от того, находится ли проводник во внешнем электрическом поле или нет. Потенциал всех точек, лежащих на проводнике, имеет при этом одинаковое значение, т. е. поверхность проводника является эквипотенциальной. Потенциал во всех точках внутри проводника равен потенциалу на его поверхности.

3) При внесении диэлектрика в электрическое поле модуль вектора напряженности $\vec{E}$ уменьшается в ε раз в пространстве, занятом диэлектриком, и остается без изменения во всех остальных точках поля.

4) Потенциал земли и всех тел, соединенных проводником с землей, принимается равным нулю.

5) Работа сил электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю.

6) Если два уединенных шара соединить тонким и длинным проводом, то их общая емкость будет равна сумме емкостей отдельных шаров, поскольку потенциалы шаров будут одинаковыми, а общий заряд системы равен сумме зарядов шаров. По этой же причине уединенный шар можно рассматривать как два конденсатора с емкостями, равными $2\pi\varepsilon_0\varepsilon r_ш$, соединенными между собой параллельно.

7) Если конденсатор состоит из двух проводящих концентрических сфер радиусами R и r (сферический конденсатор), то его емкость равна:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r R}{R - r}, \qquad (11.27)$$

где ε — проницаемость диэлектрика, разделяющего сферы. Эта формула автоматически вытекает из формул (11.15), (11.10) и (11.9).

8) Если заряженный металлический шар поместить в центр проводящего сферического экрана, соединенного с землей, на экране появляется индуцированный заряд $q_и$, равный по модулю и противоположный по знаку заряду $q_ш$ шара. Действительно, поскольку экран соединен с землей и его потенциал равен нулю, т. е. $\varphi_э = \varphi_ш + \varphi_и = 0$, то заряд $q_и$ на экране должен удовлетворять условию

$$\frac{q_ш}{R} + \frac{q_и}{R} = 0, \quad \text{откуда } q_и = -q_ш.$$

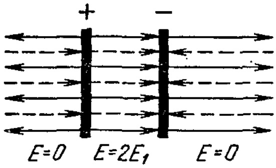

Рис. 11.3

9) Электрическое поле заряженного конденсатора можно рассматривать как результат наложения двух полей, созданных каждой обкладкой конденсатора. Если поля, создаваемые обкладками плоского заряженного конденсатора, можно считать однородными (рис. 11.3), то согласно формуле (11.5) модуль напряженности поля в конденсаторе будет равен:

$$E = 2E_1 = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{|q|}{\varepsilon_0 \varepsilon S} \tag{11.28}$$

Здесь $|q|$ — заряд конденсатора; S — площадь пластины; σ — поверхностная плотность заряда.

10) В плоском конденсаторе одну пластину можно рассматривать как тело с зарядом q, помещенное в однородное электрическое поле с напряженностью $\vec{E}_1$, созданное другой пластиной. Согласно формулам (11.3) и (11.28) со стороны первой пластины на вторую (и наоборот) будет действовать сила, модуль которой равен:

$$F = |q| E_1 = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}. \tag{11.29}$$

Если плоский конденсатор подключить к источнику питания, зарядить его и затем отключить, то при изменении емкости C конденсатора вследствие раздвижения (сближения) или смещения пластин, внесения (удаления) диэлектрика заряд на конденсаторе не меняется. Что при этом происходит с величинами q, U, E, F или W_p, легко установить, анализируя формулы (11.14), (11.17), (11.18). В том случае, когда между пластинами конденсатора вставляют (или вынимают) незаряженную металлическую пластинку, не замыкающую конденсатор, область поля конденсатора уменьшается на объем этой пластинки. Все величины при этом изменяются точно так же, как если бы мы сближали (или раздвигали) обкладки. Если конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения, то при всех указанных выше изменениях емкости конденсатора между его пластинками остается неизменным напряжение. Величины q, C, E и F могут при этом меняться.

11) При расчете полей, возникающих в системе заряженное тело — незаряженная проводящая поверхность, удобно использовать метод зеркального изображения зарядов. Этот метод основан на следующем принципе.

Если в электрическом поле заменить какую-либо эквипотенциальную поверхность проводником, имеющим потенциал и форму этой поверхности, то электрическое поле после такой замены останется прежним. Отсюда, в частности, следует, что при помещении точечного заряда вблизи бесконечной проводящей плоскости на последней заряды перераспределяются так, что электрическое поле системы оказывается тождественным полю, создаваемому рассматриваемым зарядом и его зеркальным изображением в проводящей плоскости, т. е. полю двух точечных зарядов, равных по модулю и противоположных по знаку.

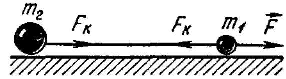

Рис. 11.4

Пример 1. Два алюминиевых шарика радиусами $R=2$ см и $r=1$ см соединены легкой непроводящей нитью длиной $l=1{,}00$ м. Шарики находятся на гладкой горизонтальной непроводящей поверхности (рис. 11.4). У каждых $z=10^9$ атомов большего шарика взято по одному электрону и все они перенесены на меньший шарик. Какую минимальную силу нужно приложить к системе, чтобы нить натянулась? Плотность и молярная масса алюминия равны соответственно $\varrho=2{,}7\cdot10^3$ кг/м^3 и $M=2{,}7\cdot10^{-2}$ кг/моль, заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

Решение. Если у n атомов одного шарика отнять по одному электрону и все их поместить на другой, то первый шарик будет иметь заряд ne, второй $-ne$.

Между заряженными шариками возникнет сила кулоновского притяжения $\vec{F}_к$, которая сообщит им ускорения, направленные вдоль нити, навстречу друг другу. При отсутствии внешних сил шарики стали бы сближаться. Чтобы нить оказалась на грани натяжения, к одному из них нужно приложить в горизонтальном направлении такую силу $\vec{F}$, чтобы она вместе с кулоновской силой сообщала этому шарику в противоположную сторону такое же ускорение $\vec{a}$, с каким будет двигаться под действием одной только кулоновской силы второй шарик. Ускорение шариков относительно друг друга будет в этом случае равно нулю. Если сила $\vec{F}$ по модулю станет больше той, которую мы найдем, нить натянется.

Под действием одних лишь кулоновских сил шарики приобретут разные ускорения. У большего шарика ускорение окажется меньшим, у меньшего — большим, поэтому для их относительного равновесия искомую минимальную силу ($\vec{F}_{min}$) нужно приложить к меньшему шарику.

Итак, допустим, мы приложили к правому шарику силу $\vec{F}$, оба тела движутся с одинаковым ускорением $\vec{a}$ и нить находится на грани натяжения. Как указывалось во введении к разделу, решение этой задачи удобно начинать с составления основного уравнения динамики точки.

При движении правого шарика на него в горизонтальном направлении действует сила $\vec{F}$ и сила $\vec{F}_к$. (Силы гравитационного взаимодействия шариков ничтожно малы по сравнению с электрическими силами, и поэтому мы ими пренебрегаем.) Если этот шарик имеет массу m_1, то согласно второму закону Ньютона

$$F-F_к=m_1a. \tag{1}$$

На второй, больший шарик массой m_2 по горизонтали действует только сила $F_к$, поэтому

$$F_к = m_2 a. \qquad (2)$$

Кулоновские силы и массы тел, входящие в уравнения динамики, не заданы, поэтому их надо выразить через известные величины и переписать уравнения (1), (2) в развернутом виде.

Заряженные шарики можно считать точечными зарядами, так как по условию задачи расстояние между ними во много раз больше их размеров. Сила притяжения между шариками будет в этом случае достаточно точно удовлетворять закону Кулона:

$$F_к = \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\varepsilon_0 l^2} = \frac{n^2e^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}, \qquad (3)$$

поскольку $|q_1| = |q_2| = |ne|$.

Массы шариков можно выразить через их плотность и радиусы:

$$m_1 = \varrho V_1 = \frac{4}{3}\pi\varrho r^3 \text{ и } m_2 = \varrho V_2 = \frac{4}{3}\pi\varrho R^3. \qquad (4)$$

Число атомов, находящихся в большом шарике, равно:

$$N = \frac{m_2}{M} N_A, \qquad (5)$$

где N_A — число Авогадро.

Число электронов, взятых у большого и переданных маленькому шарику, равно:

$$n = \frac{N}{z}. \qquad (6)$$

Уравнениями (1) — (6) условия задачи исчерпываются полностью. В этих уравнениях неизвестными являются F, m_1, m_2, a, N и n. Решая их совместно относительно искомой силы F и подставляя числовые значения, получим:

$$F = \frac{4\pi}{q\varepsilon_0}\left(\frac{e\varrho NR}{zMl}\right)^2 (R^2 + r^2); \quad F \approx 735 \text{ Н}.$$

Чтобы нить натянулась, нужно к шарику меньшей массы приложить силу $F_{min} > F$.

Разобранный нами пример показывает, в частности, как велика сила электрического взаимодействия по сравнению с теми силами, которые нам встречаются в повседневной жизни.

Пример 2. Три проводящих шарика радиусами r, $2r$ и $3r$, на которых находятся заряды $3q$, $-2q$ и $3q$, расположены в вершинах тетраэдра с ребром $R \gg r$. Определите напряженность и потенциал электрического поля в четвертой вершине тетраэдра, а также потенциал в центре шариков. Какой потенциальной энергией электрического взаимодействия обладают шарики?

Решение. Предположим, что шарики находятся в вершинах основания пирамиды (рис. 11.5), и надо найти напряженность поля и потенциал в точке A и потенциалы в центрах шариков B, C и D. Рассмотрим точку A. Поле в ней создается заряженными шариками. Проставляем векторы напряженности $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ и $\vec{E}_3$ полей, созданных шарами с зарядами $3q$, $-2q$ и $3q$ соответственно. Условие $R \gg r$ позволяет не учитывать смещение зарядов на шариках и считать, что они распределены по поверхности равномерно. Сразу же можно заметить, что модули векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_3$ равны, поскольку заряды, создающие эти поля, и расстояния от них до точки A одинаковые.

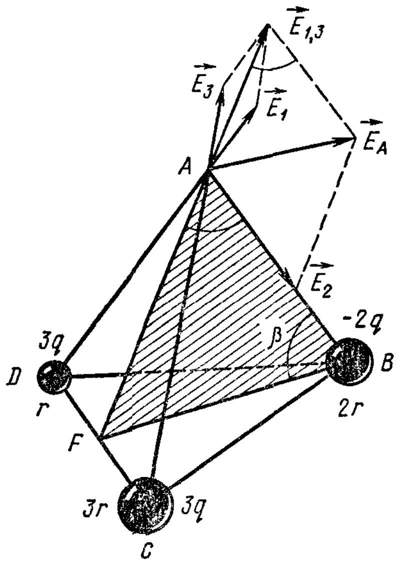

Рис. 11.5

Проставляя векторы напряженности, следует обратить внимание на их направление. В случае положительных зарядов векторы напряженности направлены от них, в случае отрицательных — к ним.

Согласно принципу наложения полей напряженность результирующего поля в точке A равна:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3.$$

Модуль суммы векторов, стоящих в правой части равенства, проще всего найти попарным сложением векторов по правилу параллелограмма. Поскольку модули векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_3$ равны и угол между векторами равен 60°, их результирующий вектор $\vec{E}_{1,3}$ является диагональю ромба, построенного на этих векторах, и его модуль равен: $E_{1,3} = 2E_1 \cos 30°$.

Чтобы найти $\vec{E}_A$, нам нужно сложить векторы $\vec{E}_{1,3}$ и $\vec{E}_2$. Оба эти вектора лежат в плоскости ABF (AF — высота равностороннего треугольника ACD), поэтому, применив теорему косинусов, получим:

$$E_A = \sqrt{E_{1,3}^2 + E_2^2 - 2E_{1,3}E_2 \cos \beta}\ .$$

Угол β, как видно из чертежа, равен углу между ребром и гранью пирамиды. Из треугольника ABF, поскольку он равнобедренный ($AF = BF$),

$$\cos\beta = \frac{1}{2\cos 30^\circ}.$$

С учетом этого равенства, а также выражения для $E_{1,3}$ после небольших преобразований находим:

$$E_A = \sqrt{3E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2}. \qquad (1)$$

Напряженность электрического поля, создаваемого заряженным шариком за его пределами, такая, как если бы весь заряд шарика был сосредоточен в его центре, поэтому

$$E_1 = E_3 = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}; \quad E_2 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}. \qquad (2)$$

Из уравнений (1), (2) искомая напряженность поля в точке A получается равной:

$$E_A = \frac{q\sqrt{19}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Потенциал поля в точке A равен алгебраической сумме потенциалов полей, созданных заряженными шарами:

$$\varphi_A = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3. \qquad (3)$$

Потенциал поля шариков за их пределами равен:

$$\varphi_1 = \varphi_3 = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 R}; \quad \varphi_2 = \frac{-2q}{4\pi\varepsilon_0 R}. \qquad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) находим:

$$\varphi_A = \frac{q}{\pi\varepsilon_0 R}.$$

Потенциал поля в центре шариков равен потенциалу на их поверхности. Последний складывается из потенциала собственного поля шарика и потенциалов полей двух других шариков. Учитывая, что $R \gg r$, а также знаки зарядов на шариках, мы можем записать:

$$\varphi_C = \varphi_D = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 R} \approx \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 r};$$

$$\varphi_B = 2\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r} \approx \frac{-q}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Потенциальную энергию системы находим по формуле (11.13). Поскольку $R \gg r$ и заряженные тела близки к точечным зарядам, то

$$W_p = \frac{1}{2}(3q\varphi_C + 3q\varphi_D - 2q\varphi_B) = \frac{11q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Пример 3. Металлический шарик радиусом r, имеющий заряд q, помещен в центр незаряженного сферического слоя, внутренний и внешний радиусы которого равны R_1 и R_2. Найдите напряженность и потенциал электрического поля, создаваемого системой, если: а) слой изготовлен из металла; б) металлический слой заземлен; в) слой изготовлен из диэлектрика с проницаемостью ε.

Решение. Расчет полей, создаваемых заряженными сферами, основан на формулах (11.4) для напряженности и (11.9′) для потенциала электрического поля, а также принципе наложения полей (11.6), (11.10). Чтобы найти напряженность и потенциал поля в той или иной точке пространства, создаваемого несколькими сферами, нужно прежде всего знать их заряд. Определение модуля и знака заряда, закона распределения заряда на телах, помещенных в электрическое поле, представляет, как правило, основную трудность в решении почти всех задач подобного типа. Если же удается найти эти заряды, то напряженность и потенциал результирующего поля системы определить легко.

а) Поместим проводник в электрическое поле; в нем под действием сил поля произойдет разделение зарядов и на поверхности появятся индуцированные заряды. Разделение зарядов происходит до тех пор, пока индуцированные заряды не достигнут такого значения, что своим полем не скомпенсируют внешнее электрическое поле, т. е. до тех пор, пока результирующее поле внутри проводника не станет равным нулю. Отсутствие электрического поля внутри проводника при равновесии зарядов на проводнике — главное условие, позволяющее определить индуцированные заряды. Если под действием сил поля шара электроны начнут смещаться на внутреннюю поверхность слоя и на ней появится индуцированный заряд $-q_1$, то на внешней поверхности возникнет такой же заряд противоположного знака $+q_1$ (рис. 11.6). В результате получится три концентрические заряженные сферы радиусов r, R_1 и R_2 с зарядами q, $-q_1$ и $+q_1$. В пространстве между второй и третьей сферой напряженность электрического поля равна нулю, поэтому на расстоянии x от общего центра сфер при $R_1 \leqslant x \leqslant R_2$ согласно принципу наложения полей и формулы для напряженности поля заряженной сферы должно быть

$$k\frac{q}{x^2} - k\frac{q_1}{x^2} = 0,$$

откуда $q_1 = q$.

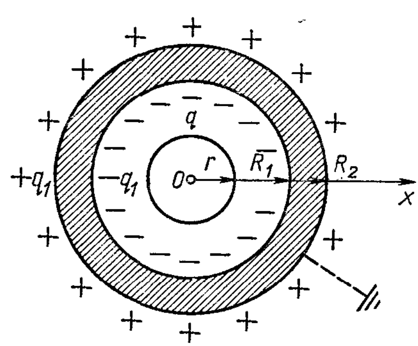

Рис. 11.6

Здесь мы учли, что вторая сфера создает снаружи такое поле, как если бы ее заряд находился в центре, а поле третьей сферы в ее внутренней области отсутствует.

Найдя заряд на поверхности сферического слоя, можно приступить к нахождению напряженности и потенциала поля в различных точках пространства. Внутри шарика (при $0 < x < r$)

$$E = 0; \quad \varphi = k\frac{q}{r} - k\frac{q}{R_1} + k\frac{q}{R_2} = kq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Между шариком и слоем ($r \leqslant x \leqslant R_1$)

$$E = k\,\frac{q}{x^2}; \quad \varphi = k\,\frac{q}{x} - k\,\frac{q}{R_1} + k\,\frac{q}{R_2} = kq\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Внутри шарового слоя ($R_1 \leqslant x \leqslant R_2$)

$$E = 0; \quad \varphi = k\frac{q}{x} - k\frac{q}{x} + k\frac{q}{R_2} = k\frac{q}{R_2}.$$

За пределами системы ($R_2 \leqslant x \leqslant \infty$)

$$E = k\frac{q}{x^2}; \quad \varphi = k\frac{q}{x}.$$

б) Заряды, возникающие на поверхности заземленного проводника, можно найти из условия, что потенциал его равен нулю. Напряженность электрического поля в проводнике, конечно, также будет равна нулю, но заряды на поверхностях сферического слоя будут неодинаковые. В отличие от предыдущего случая они могут стекать с оболочки или, наоборот, набегать на нее. Если предположить, что на внутренней поверхности слоя появляется заряд $-q_1$, на внешней — заряд $+q_2$, то результирующий потенциал на заземленной поверхности слоя ($x = R_2$) будет равен:

$$\varphi = k\frac{q}{R_2} - k\frac{q_1}{R_2} + k\frac{q_2}{R_2} = 0,$$

откуда следует, что

$$q_1 - q_2 = q. \tag{1}$$

Поскольку поле внутри проводника отсутствует, то должно быть

$$E = k\frac{q}{x^2} - k\frac{q_1}{x^2} = 0,$$

откуда модуль заряда на внутренней поверхности слоя равен:

$$q_1 = q. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что $q_2 = 0$, т. е. на внешней поверхности заземленного слоя заряда нет, а на внутренней поверхности находится заряд $q_1 = -q$. Таким образом задача свелась к

нахождению поля двух заряженных концентрических сфер радиусов r и R, на которых находятся заряды $+q$ и $-q$. При расчете поля данной системы можно воспользоваться результатом пункта а), положив во всех полученных там формулах заряд третьей сферы равным нулю. В результате мы получим
внутри шарика:

$$E=0; \quad \varphi=kq\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1}\right) \quad (0\leqslant x\leqslant r);$$

между шариком и слоем:

$$E=k\frac{q}{x^2}; \quad \varphi=kq\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R_1}\right) \quad (r\leqslant x\leqslant R_1).$$

При $R_1\leqslant x\leqslant\infty$ поле отсутствует.

в) Если сферический слой сделан из диэлектрика, то при внесении его в поле заряженного шарика произойдет поляризация слоя и на внутренней и внешней поверхностях появятся связанные заряды $-q_c$ и $+q_c$. Значение их находят следующим образом. Электрическое поле, создаваемое заряженным шариком, в диэлектрике ослаблено в ε раз. Поэтому если мы возьмем какую-нибудь точку внутри сферического слоя, удаленную от центра шарика на расстояние x, то напряженность поля в ней, с одной стороны, будет равна $E=k\frac{q}{\varepsilon x^2}$, а с другой стороны, ее можно найти как результат наложения поля шарика и поля связанных зарядов внутренней поверхности оболочки:

$$E=k\frac{q}{x^2}-k\frac{q_c}{x^2}.$$

Приравнивая оба выражения для E, мы найдем модуль связанных зарядов, возникающих на поверхности диэлектрика:

$$q_c=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}q.$$

После этого задача сводится к нахождению поля трех концентрических сфер радиусов r, R_1 и R_2, на которых находятся заряды q, $-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}q$ и $+\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}q$. Аналогично результатам пункта а) находим:

$$E=0; \quad \varphi=kq\left[\frac{1}{r}-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right] \quad (0\leqslant x\leqslant r),$$

$$E=k\frac{q}{x^2}; \quad \varphi=kq\left[\frac{1}{x}-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right] \quad (r\leqslant x\leqslant R_1).$$

При $R_1 \leqslant x \leqslant R_2$

$$E = k\frac{q}{x^2}; \quad \varphi = kq\left[\frac{1}{x} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_2}\right)\right].$$

Если $R_2 \leqslant x \leqslant \infty$, то

$$E = k\frac{q}{x^2}; \quad \varphi = k\frac{q}{x}.$$

Рекомендуем читателю построить графики зависимости $E(x)$ и $\varphi(x)$ для каждого из трех разобранных примеров.

Пример 4. Пучок электронов, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U_0 = 10$ кВ, влетает в середину между пластинами плоского конденсатора параллельно им. Какое напряжение необходимо подать на пластины конденсатора, чтобы пучок электронов при выходе из конденсатора отклонялся от своего начального направления на максимальный угол? Длина пластин $l = 10$ см, расстояние между ними $d = 3$ см.

Решение. Решение задач о движении заряженных частиц в однородном электрическом поле конденсатора или заряженной плоскости очень сходно с решением задач на движение тела, брошенного в поле тяжести. Отличие состоит лишь в том, что движение частиц происходит в поле, которое сообщает им некоторое постоянное ускорение $\vec{a}$, отличное от ускорения свободного падения. Действие силы тяжести в подобных задачах, как правило, не учитывают, поскольку гравитационные силы ничтожно малы по сравнению с электрическими. Нахождение ускорения заряженной частицы связано с применением формул электростатики, которые вместе с уравнениями движения и составляют полную систему уравнений, необходимых для определения неизвестной величины. Решение задач подобного типа рекомендуется начинать с составления кинематических уравнений.

Если электрон влетает в электрическое поле заряженного конденсатора со скоростью $\vec{v}_0$, направленной параллельно пластинам (рис. 11.7), то под действием силы $\vec{F}$ поля он отклоняется от своего начального направления движения и вылетает из конденсатора под некоторым углом к этому направлению. По условию задачи электрон влетает в середину конденсатора, поэтому при максимальном отклонении он должен сместиться по вертикали на половину расстояния между пластинами.

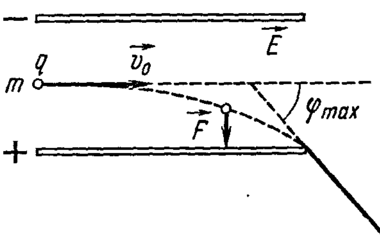

Рис. 11.7

Движение электрона в однородном поле конденсатора происходит по параболе, и его можно рассматривать как результат двух прямолинейных перемещений — равномерного со скоростью $\vec{v}_0$ в горизонтальном направлении и равноускоренного (без начальной скорости) в вертикальном с ускорением $\vec{a}$.

Если длина конденсатора l и расстояние между пластинами d, то проекции перемещения электрона за время прохождения поля конденсатора на эти направления равны соответственно:

$$l = v_0 t \quad \text{и} \quad \frac{d}{2} = \frac{at^2}{2}. \qquad (1)$$

Сила, сообщающая электрону массой m ускорение $\vec{a}$, по второму закону Ньютона равна $\vec{F} = m\vec{a}$. В задачах данного типа уравнение второго закона необходимо представить в развернутом виде, выразив силу, действующую на заряженную частицу, через характеристики поля. Поскольку $\vec{F} = q\vec{E}$, а $E = \frac{U}{d}$, где $\vec{E}$ — напряженность поля между пластинами конденсатора и U — разность потенциалов, то $F = \frac{qU}{d}$. Тогда основное уравнение динамики можно записать в скалярной форме так:

$$\frac{qU}{d} = ma. \qquad (2)$$

В задачах о движении частиц, заряд и масса которых считаются известными (как, например, у электрона и протона), скорость частицы $\vec{v}_0$ нередко задается неявно, через ускоряющую разность потенциалов U_0. Если ускоряющее поле совершает над частицей с массой m и зарядом q работу $A = qU_0$, то частица приобретает кинетическую энергию $W_k = \frac{mv_0^2}{2}$.

Согласно закону сохранения и превращения энергии $qU_0 = \frac{mv_0}{2}$. Откуда

$$v_0 = \sqrt{\frac{2qU_0}{m}}. \qquad (3)$$

Уравнения перемещения (или скорости) вместе с уравнениями (2) и (3) являются основными расчетными соотношениями в задачах на движение заряда в однородном электрическом поле. В данном случае, решая их относительно искомой разности потенциалов на пластинах конденсатора и подставляя числовые значения, получим:

$$U = \frac{2d}{l^2} U_0; \quad U = 1{,}8 \text{ кВ}.$$

Пример 5. Протон, летящий к неподвижному ядру двукратно ионизированного атома гелия, на очень большом расстоянии от ядра имеет скорость $v_0 = 10^4$ м/с. На какое расстояние протон сможет приблизиться к ядру? Заряд протона $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса $m = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг. Решите задачу при условии, что: а) ядро гелия все время остается неподвижным; б) ядро гелия свободно.

Решение. а) В состав ядра атома гелия входят два протона и два нейтрона, поэтому ядро гелия можно считать частицей с массой $4m$ и зарядом $+2q$. Протон, летящий в направлении ядра гелия, будет тормозиться полем ядра до тех пор, пока не остановится на некотором расстоянии от него. После остановки протон начнет двигаться назад и улетит в бесконечность. В момент остановки, когда скорость одной частицы относительно другой равна нулю, расстояние между ними будет минимальным. Так как поле ядра неоднородно, то на движущийся протон действует переменная сила, поэтому для решения задачи нужно воспользоваться законом сохранения и превращения механической энергии:

$$A = W_2 - W_1.$$

Работа внешних сил над протоном — работа сил поля равна:

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

(здесь φ_1 — потенциал поля ядра в той точке, где протон обладал кинетической энергией $W_1 = \frac{mv_0^2}{2}$; φ_2 — потенциал поля в точке, где протон остановился, $W_2 = 0$). Если расстояние от ядра до указанных точек поля равно r и R, то, учитывая, что по условию задачи заряд ядра равен $2q$ и $\varepsilon = 1$, для потенциалов поля в этих точках получим:

$$\varphi_1 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

С учетом этих выражений для работы сил поля будем иметь:

$$A = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right), \quad \text{или} \quad A = -\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 r},$$

так как в данном случае $R \gg r$.

Подставляя выражения для работы сил поля и кинетических энергий протона в исходную формулу закона сохранения и превращения энергии, мы получим окончательное уравнение для определения минимального расстояния r, на которое протон приближается к неподвижному ядру гелия:

$$\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Решая это уравнение относительно r и подставляя числовые значения, находим:

$$r = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 m v_0^2}; \quad r \approx 3{,}45 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

б) Если протон будет приближаться к свободному ядру гелия, то оно тоже начнет двигаться, так как на него будут действовать силы электрического поля протона. Скорость протона вследствие торможения полем ядра будет уменьшаться, скорость ядра станет увеличиваться, и в некоторый момент времени скорости частиц окажутся одинаковыми. Нетрудно сообразить, что в этот момент расстояние между частицами будет минимальным, скорость частиц относительно друг друга станет равна нулю. В следующий момент времени скорость ядра окажется больше скорости протона и они, продолжая двигаться в одну сторону, начнут удаляться друг от друга. Двигаясь замедленно, протон в некоторый момент остановится и затем начнет двигаться ускоренно в противоположную сторону. В результате соударения протон передает часть своей механической энергии ядру и улетает от него в бесконечность. Основное отличие данного случая от предыдущего состоит в том, что в момент наибольшего сближения частицы имеют некоторую скорость и здесь фактически происходит неупругий удар двух тел. Решение задач такого типа основано на использовании закона сохранения импульса и закона сохранения и превращения энергии.

Как и в первом случае, рассмотрим два состояния системы: первое — когда частицы удалены друг от друга на большое расстояние, второе — в момент наибольшего сближения, когда они имеют одинаковые скорости $\vec{v}_1$. В первом состоянии ядро покоится, протон имеет импульс $m\vec{v}_0$, во втором — импульс системы равен $m\vec{v}_1 + 4m\vec{v}_1$. По закону сохранения импульса

$$mv_0 = mv_1 + 4mv_1, \quad \text{откуда} \quad v_1 = \frac{v_0}{5}. \qquad (1)$$

Переходим теперь к составлению уравнения закона сохранения и превращения механической энергии. Кинетическая энергия системы протон — ядро в первом состоянии равна $W_1 = \frac{mv_0^2}{2}$, во втором $W_2 = \frac{5mv_1^2}{2}$. При переходе системы из первого состояния во второе силы поля совершают работу $A = -\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 r}$ (такую же, как и в первом случае!).

Согласно закону сохранения энергии

$$-\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{5mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) с учетом соотношения (1) получаем, что минимальное расстояние, на которое сближаются частицы при столкновении, равно:

$$r = \frac{5}{4}\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 m v_0^2}; \quad r = 4{,}3 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Пример 6. Небольшой металлический шарик массой m, подвешенный на нити длиной l, колеблется по закону математического маятника над бесконечной равномерно заряженной горизонтальной плоскостью с плотностью заряда σ. Определите период колебаний маятника при условии, что на шарике находится заряд $-q$.

Решение. Гармонические колебания шарика происходят в однородном электрическом поле, созданном равномерно заряженной плоскостью. Это поле действует на отрицательно заряженный шарик силой $\vec{F}$ и сообщает ему постоянное ускорение $\vec{a}$, направленное вертикально вниз. Поскольку шарик колеблется по законам математического маятника и его смещением по вертикали можно пренебречь, с достаточной степенью точности можно считать, что под действием поля сила натяжения нити возрастет на величину F и модуль создаваемого ею ускорения увеличится от g до $g+a$. Период колебаний такого заряженного математического маятника равен:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g+a}}. \qquad (1)$$

Модуль ускорения $\vec{a}$, вызванного постоянным электрическим полем, определяем из основного уравнения динамики материальной точки:

$$a = \frac{F}{m}.$$

Сила, действующая на шарик с зарядом q в электрическом поле с напряженностью $\vec{E}$, равна $\vec{F} = q\vec{E}$. Или, поскольку нам задана поверхностная плотность зарядов σ на равномерно заряженной плоскости и колебания происходят в вакууме ($\varepsilon = 1$), согласно формуле (11.5) будем иметь:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \quad \text{и, следовательно,} \quad F = \frac{\sigma q}{2\varepsilon_0}.$$

С учетом последнего равенства основное уравнение динамики можно представить так:

$$a = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 m}. \qquad (2)$$

В уравнениях (1), (2) все величины, кроме T и a, заданы. Решая их совместно относительно периода колебаний заряженного шарика, получим:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 m l}{2\varepsilon_0 g m + q\sigma}}.$$

Пример 7. Металлический шар радиусом $r_1 = 2$ см, заряженный до потенциала $\varphi_1 = 30$ В, соединили тонкой длинной проволокой с шаром ёмкостью $C_2 = 3$ пФ, на котором находится заряд $q_2 = 0{,}6$ нКл. а) Какова будет поверхностная плотность зарядов на шарах после перераспределения зарядов? б) Каким станет заряд на шарах, если первый шар поместить в центр проводящей оболочки радиусом $R = 3$ см, соединенной с землей? в) Каковы будут заряды на шарах, если ко второму шару подключить незаряженный плоский конденсатор емкостью $C_3 = 5$ пФ, одна из пластин которого заземлена?

Решение. а) Если заряженные тела имеют разный потенциал, то при соединении их проводником заряды будут переходить с одного тела на другое до тех пор, пока потенциалы тел не станут одинаковыми. Решение задач по электростатике, где рассматривается перераспределение электрических зарядов между телами или конденсаторами, удобно начинать с записи закона сохранения заряда и равенства потенциалов тел после того, как система приходит в равновесие.

При всяком перераспределении зарядов в изолированной системе, какой являются в данном случае заряженные шары, сумма зарядов остается неизменной. Поэтому если до соединения шаров их заряды равнялись q_1 и q_2, а после соединения q_1' и q_2', то согласно закону сохранения зарядов должно быть.

$$q_1 + q_2 = q_1' + q_2'. \tag{1}$$

При равновесии зарядов на шарах, соединенных проволокой, потенциалы шаров выравниваются:

$$\varphi_1' = \varphi_2'. \tag{2}$$

Записав исходные уравнения (1) и (2), нужно выразить заряды и потенциалы тел через заданные величины и затем установить связь между этими уравнениями с помощью формулы электроемкости (11.13).

Начальный заряд q_1 первого шара можно найти, зная его емкость и начальный потенциал:

$$q_1 = C_1\varphi_1. \tag{3}$$

Потенциалы шаров можно выразить через их емкости и заряды с помощью формулы (11.13):

$$\varphi_1' = \frac{q_1'}{C_1}, \quad \varphi_2' = \frac{q_2'}{C_2}, \tag{4}$$

где C_1 и C_2 — емкости шаров; q_1' и q_2' — заряды на шарах после перераспределения.

Согласно формуле (11.15) емкости шаров связаны с их радиусами формулами

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0 r_1 \quad \text{и} \quad C_2 = 4\pi\varepsilon_0 r_2. \tag{5}$$

Уравнения (1) — (4) позволяют определить заряды q_1' и q_2'. Поверхностная плотность зарядов на шарах после перераспределения равна:

$$\sigma_1' = \frac{q_1'}{4\pi r_1^2} \quad \text{и} \quad \sigma_2' = \frac{q_2'}{4\pi r_2^2}. \tag{6}$$

В составленной системе уравнений неизвестными величинами фактически являются q_1, q_1', q_2', σ_1' и σ_2'. Исключая из уравнений заряды и подставляя числовые значения, получим:

$$\sigma_1' = \frac{\varepsilon_0(4\pi\varepsilon_0 r_1\varphi_1 + q_2)}{(4\pi\varepsilon_0 r_1 + C_2)r_1}; \quad \sigma_1' = 56 \text{ нКл/м}^2.$$

Аналогично $\sigma_2' = 42$ нКл/м^2.

б) Если первый шар окружить заземленной металлической сферой, на ней появится индуцированный заряд, равный по модулю и противоположный по знаку заряду шара (см. пример 3, пункт б). Электрическим взаимодействием шаров мы при этом пренебрегаем, считая, что они находятся очень далеко друг от друга. Заряд самого шара при этом не остается таким, каким он был до внесения его в оболочку. Поскольку емкость $C_{1,\text{об}}$ системы шар — сфера станет больше, чем емкость C_1 одного (первого) шара, его потенциал уменьшится и на него перейдет часть заряда со второго шара.

В том, что емкость $C_{1,\text{об}}$ первого шара вместе со сферой действительно больше, чем C_1, убедиться очень легко. Поскольку она оказывается равной емкости сферического конденсатора, т. е.

$$C_{1,\text{об}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R r_1}{R - r_1}, \tag{7}$$

а $C_1 = 4\pi\varepsilon_0 r_1$, то действительно $C_{1,\text{об}} > C_1$, так как $\dfrac{r_1 R}{R - r_1} > r_1$.

После перераспределения зарядов на шарах и появления индуцированных зарядов на сфере потенциалы шаров выравниваются. Обозначим их φ_1' и φ_2', причем $\varphi_1' = \varphi_2'$. Потенциал φ_1' на поверхности шара, заключенного в оболочку, складывается из потенциала $\varphi_\text{ш}$ поля, созданного самим шаром, и потенциала $\varphi_\text{об}$ поля, которое создавала бы сама оболочка в том месте, где находится шар, т. е. $\varphi_1' = \varphi_\text{ш} + \varphi_\text{об}$. Потенциал на поверхности оболочки при этом, разумеется, равен нулю, так как она заземлена.

Если после перетекания заряда на первом шаре оказался заряд q_1', то на оболочке появится заряд $-q_1'$, и, следовательно,

$$\varphi_\text{ш} = \frac{q_1'}{C_1}; \quad \varphi_\text{об} = -\frac{q_1'}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Потенциал второго шара, если считать, что он достаточно удален от первого, равен:

$$\varphi_2' = \frac{q_2'}{C_2},$$

где q_2' — заряд этого шара. Учитывая все это, запишем:

$$\varphi_\text{ш} + \varphi_\text{об} = \varphi_2', \quad \text{или} \quad \frac{q_1'}{C_1} - \frac{q_1'}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q_2'}{C_2}. \tag{8}$$

Из уравнений (3), (4), (7) и (8) находим:

$$q_1' = \frac{C_{1,об}}{C_{1,об} + C_2}(C_1\varphi_1 + q_2); \quad q_1' = 0{,}46 \text{ нКл};$$

$$q_2' = \frac{C_2}{C_{1,об} + C_2}(C_1\varphi_1 + q_2); \quad q_2' = 0{,}20 \text{ нКл}.$$

в) При подключении ко второму шару незаряженного плоского конденсатора емкостью C_3, соединенного с землей, часть заряда шаров перейдет на пластину конденсатора и потенциалы на шарах и незаземленной пластине выравнятся. На заземленной пластине появится заряд, равный по модулю заряду первой пластины, но противоположный ему по знаку.

Согласно закону сохранения заряда

$$q_1 + q_2 = q_1' + q_2' + q_3', \tag{9}$$

где q_1', q_2', q_3' — заряды на шарах и конденсаторе после того, как система придет в равновесие. Разность потенциалов между обкладками конденсатора станет при этом равна разности потенциалов между шарами и землей, т. е. $U_1' = U_2' = U_3'$, или с учетом того, что потенциал земли равен нулю:

$$\varphi_1' = \varphi_2' = \varphi_3'. \tag{10}$$

Связь между зарядами тел и их потенциалами устанавливается посредством формулы электроемкости:

$$q_1' = C_1\varphi_1'; \quad q_2' = C_2\varphi_2'; \quad q_3' = C_3\varphi_3'. \tag{11}$$

Из уравнений (9), (10), (11) и (4), считая все емкости известными и учитывая числовые значения заданных величин, находим:

$$q_1' = \frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_3}(C_1\varphi_1 + q_2); \quad q_1' \approx 0{,}15 \text{ нКл};$$

$$q_2' = \frac{C_2}{C_1 + C_2 + C_3}(C_1\varphi_1 + q_2); \quad q_2' \approx 0{,}20 \text{ нКл};$$

$$q_3' = \frac{C_3}{C_1 + C_2 + C_3}(C_1\varphi_1 + q_2); \quad q_3' \approx 0{,}34 \text{ нКл}.$$

Пример 8. Конденсатор выполнен в виде двух концентрических сфер, радиусы которых равны $r = 2$ см и $R = 6$ см. Внутренняя сфера испускает с каждого квадратного сантиметра поверхности $n = 10^{10}$ электронов в секунду с начальными скоростями $v_0 = 10^3$ м/с. Через какое время после начала испускания электронов заряд на конденсаторе перестанет возрастать? Заряд электрона и его массу считать известными.

Решение. Допустим, что в начальный момент времени, когда эмиссия электронов еще не началась, сферический конденсатор был не заряжен. Тогда при излучении электронов с поверхности внутренней сферы заряд на конденсаторе станет возрастать вследствие перераспределения электронов между обкладками.

Внутренняя сфера будет заряжаться положительно, внешняя — отрицательно. По мере накопления электронов на внешней сфере электрическое поле между обкладками будет увеличиваться. Это поле направлено от меньшей сферы к большей и тормозит движение электронов. Напряженность поля и заряд на конденсаторе увеличиваются до тех пор, пока между сферами не возникнет такая тормозящая разность потенциалов, что при данной начальной скорости $\vec{v}_0$ излучения электроны не смогут ее преодолеть.

Как только разность потенциалов достигнет значения, при котором работа сил поля окажется равной кинетической энергии испускаемых электронов, последние перестанут долетать до внешней обкладки конденсатора и перераспределение зарядов прекратится. Заряд конденсатора, достигнув некоторой величины q, будет оставаться постоянным.

Предположим, что спустя время t после начала эмиссии, вследствие перехода части электронов с внутренней сферы на внешнюю, между сферами возникла такая разность потенциалов U, что поле совершает над электронами работу, равную их начальной кинетической энергии. Тогда

$$A = W, \quad \text{или} \quad eU = \frac{mv_0^2}{2}, \tag{1}$$

где e — заряд, m — масса электрона.

Разность потенциалов U можно выразить через заряд q конденсатора и его емкость:

$$U = \frac{q}{C}. \tag{2}$$

Электроемкость воздушного сферического конденсатора, составленного из металлических сфер радиусами R и r, равна:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 rR}{R - r}. \tag{3}$$

Чтобы выразить заряд конденсатора через время t накопления заряда, необходимо учесть следующее: если заряд первой сферы в результате вылета электронов изменился на q, то так же изменится и заряд второй сферы. Так как вначале обе сферы были не заряжены, то заряд каждой из них, а следовательно, и всего конденсатора станет равным q. По условию задачи с элемента поверхности внутренней сферы $S_0 = 1$ см^2 за время $t_0 = 1$ с вылетает n электронов, поэтому при излучении электронов с поверхности сферы $S = 4\pi r^2$ в течение времени t конденсатор приобретает заряд

$$q = \frac{enSt}{S_0 t_0} = \frac{ne4\pi r^2 t}{S_0 t_0}. \tag{4}$$

Решая уравнения (1) — (4) относительно неизвестного времени t и подставляя числовые значения, получим:

$$t = \frac{\varepsilon_0 m v_0^2 S_0 t_0 R}{2e^2 nr(R-r)}; \quad t \approx 1{,}2 \cdot 10^{-10} \text{ с.}$$

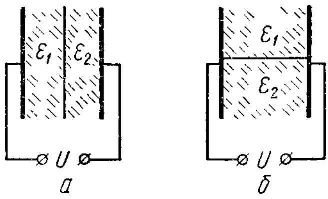

Рис. 11.8

Пример 9. Два одинаковых плоских конденсатора подключены к источникам напряжения U (рис. 11.8,*а*,*б*). Пространство между пластинами конденсаторов заполнено слоями диэлектриков одинаковой толщины с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. В одном конденсаторе слои расположены параллельно обкладкам, во втором — перпендикулярно. Во сколько раз отличаются электроемкости этих конденсаторов и напряженности полей в однородных диэлектриках? Чему равна поверхностная плотность связанных зарядов на границе раздела диэлектриков?

Решение. Если параллельно обкладкам плоского конденсатора ввести слои диэлектриков, заполняющих воздушную прослойку, то такой сложный конденсатор можно рассматривать как два конденсатора емкостями C_1 и C_2, соединенных последовательно плоскостью контакта диэлектриков. Обкладками первого конденсатора здесь служат граничные слои диэлектрика с проницаемостью ε_1, обкладками второго — такие же слои диэлектрика с проницаемостью ε_2. Как видно из чертежа, площади обкладок этих конденсаторов одинаковы и равны площади пластин S воздушного конденсатора. Расстояние между обкладками определяется толщиной внесенных слоев диэлектриков, в данном случае оно одинаково и равно половине расстояния d между пластинами.

Емкость двух последовательно соединенных конденсаторов равна:

$$C_{\text{пс}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Подставляя в эту формулу выражения для

$$C_1 = \frac{2\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{d} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{2\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{d},$$

для общей емкости получим:

$$C_{\text{пс}} = \frac{2\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 S}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) d} = \frac{2\varepsilon_1 \varepsilon_2 C_0}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \tag{1}$$

где $C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ — емкость воздушного конденсатора до внесения диэлектриков.

Если слои диэлектриков расположены перпендикулярно пластинам, сложный конденсатор можно рассматривать как систему двух конденсаторов емкостями C_1' и C_2', соединенных между собой параллельно через сами пластины. В отличие от разобранного выше случая одинаковыми здесь будут не площади пластин, а расстояния между ними. Сами же площади определяются объемом внесенных слоев диэлектриков. В данном примере эти объемы равны, поэтому площади пластин имеют значение $S/2$. Емкость двух конденсаторов, соединенных параллельно, равна: $C_{пр} = C_1' + C_2'$. Но

$$C_1' = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{2d}; \quad C_2' = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{2d},$$

поэтому

$$C_{пр} = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) S}{2d} = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) C_0}{2}. \tag{2}$$

Из выражений для $C_{пс}$ и $C_{пр}$ видно, что емкости системы в первом и втором случаях отличаются друг от друга в число раз, равное

$$\frac{C_{пс}}{C_{пр}} = \frac{4\varepsilon_1 \varepsilon_2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}.$$

Чтобы установить, во сколько раз отличаются напряженности полей в слоях диэлектриков, нужно сначала найти значения E_1, E_2, E_1' и E_2' в каждом слое для одного и другого случая.

При последовательном соединении конденсаторов емкостями C_1 и C_2 подаваемое на них напряжение U равно сумме напряжений на первом и втором слоях диэлектриков:

$$U = U_1 + U_2.$$

Поскольку поля в диэлектриках однородные, то

$$U_1 = E_1 \frac{d}{2}; \quad U_2 = E_2 \frac{d}{2},$$

и, следовательно,

$$U = (E_1 + E_2) \frac{d}{2}. \tag{3}$$

При наложении на диэлектрики внешнего поля напряженностью E_0 напряженность в каждой среде уменьшится соответственно в ε_1 и ε_2 раз, т. е.

$$E_1 = \frac{E_0}{\varepsilon_1} \quad \text{и} \quad E_2 = \frac{E_0}{\varepsilon_2},$$

откуда

$$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2. \tag{4}$$

Из уравнений (3), (4) находим:

$$E_1 = \frac{2\varepsilon_2 U}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) d} \quad \text{и} \quad E_2 = \frac{2\varepsilon_1 U}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) d}.$$

Если слои диэлектриков перпендикулярны пластинам, то напряжение на каждом из образовавшихся конденсаторов емкостями C_1' и C_2' одинаково и равно U, поэтому

$$E_1' = \frac{U}{d}; \quad E_2' = \frac{U}{d}.$$

Напряженности полей в первой и второй среде при указанном расположении слоев диэлектриков относятся друг к другу как

$$\frac{E_1}{E'_1} = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad \text{и} \quad \frac{E_2}{E_2'} = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

При наложении на диэлектрик внешнего электрического поля происходит поляризация диэлектрика и на его поверхности, перпендикулярной силовым линиям поля, появляются связанные заряды. Рассмотрим первый слой диэлектрика (см. рис. 11.8, *а*) Он находится в электрическом поле, созданном пластинами конденсатора. Напряженность этого поля равна $E_0 = U/d$, поскольку на пластины подано напряжение U и расстояние между ними равно d. Напряженность поля в первой среде будет ослаблена в ε_1 раз и будет равна $E_1 = E_0/\varepsilon_1 = U/(\varepsilon_1 d)$. Это поле является результатом наложения двух полей: поля напряженностью $\vec{E}_0$ и поля напряженностью $\vec{E}_c$, создаваемого связанными зарядами и направленного навстречу полю пластин, т. е.

$$E_1 = E_0 - E_c, \text{ или иначе: } \frac{U}{\varepsilon_1 d} = \frac{U}{d} - E_c. \qquad (5)$$

Напряженность E_c поля связанных зарядов, распределенных с поверхностной плотностью $+\sigma_1$ и $-\sigma_1$ на торцах первого слоя диэлектрика, можно рассматривать как напряженность поля, созданного двумя параллельными заряженными пластинами, поэтому $E_c = \sigma_1/\varepsilon_0$.

Подставив это выражение для E_c в уравнение (5), получим окончательную формулу для определения искомой плотности связанных зарядов:

$$\frac{U}{\varepsilon_1 d} = \frac{U}{d} - \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0},$$

отсюда

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - 1)U}{\varepsilon_1 d}.$$

Аналогично для второго слоя диэлектрика будем иметь:

$$\sigma_2 = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - 1)U}{\varepsilon_2 d}.$$

Пример 10. а) Найдите разность потенциалов между обкладками конденсаторов, а также между точками *b* и *e* в схеме, изображенной на рисунке 11.9. б) Какой заряд пройдет между

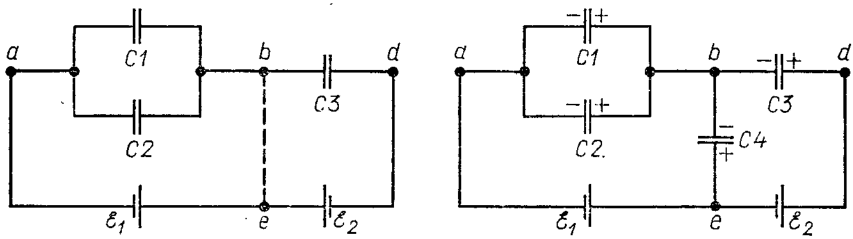

Рис. 11.9

точками b и e, если их соединить проводником? в) Какова будет разность потенциалов между этими точками, если к ним подключить конденсатор $C4$?

Решение. а) Предположим, что $\mathscr{E}_1 > \mathscr{E}_2$, и обозначим разность потенциалов на обкладках конденсаторов через U_{ab} и U_3, тогда, учитывая полярность источников, запишем:

$$\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 = U_{ab} + U_3, \qquad (1)$$

поскольку напряжение на всей батарее конденсаторов между точками a и b равно разности $\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2$.

Конденсаторы $C1$ и $C2$ соединены между собой параллельно, конденсатор $C3$ подключен к ним последовательно. Если на этих конденсаторах находятся соответственно заряды q_1, q_2 и q_3, то должно быть

$$q_1 + q_2 = q_3, \qquad (2)$$

так как при указанном соединении конденсаторов заряд на участке ab равен заряду на участке bd. Величины, входящие в первые два уравнения, связаны между собой через емкости:

$$q_1 = C_1 U_{ab}; \quad q_2 = C_2 U_{ab}; \quad q_3 = C_3 U_3. \qquad (3)$$

Решая уравнения (1) — (3) относительно U_{ab} и U_3 при заданных C_1, C_2, C_3, $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$, находим напряжения на конденсаторах:

$$U_{ab} = \frac{C_3(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)}{C_1 + C_2 + C_3}; \quad U_3 = \frac{(C_1 + C_2)(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

Разность потенциалов между точками b и e можно определить из уравнения (1). Для этого достаточно его представить в несколько ином виде, сгруппировав значения разностей потенциалов, относящихся к соответствующим участкам bde и ead:

$$U_{be} = \mathscr{E}_1 - U_{ab} = \mathscr{E}_2 + U_3. \qquad (4)$$

Выражение, стоящее в левой части равенства (4) (так же как и в правой), представляет алгебраическую сумму напряжений на участках между точками b и e и является искомой разностью потенциалов U_{be}.

Подставляя в правую часть уравнения (4) вместо U_{ab} полученное для него выражение, найдем:

$$U_{be} = \frac{(C_1 + C_2)\,\mathscr{E}_1 + C_3\,\mathscr{E}_2}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

Точно такой же результат мы имели бы при подстановке в правую часть уравнения (4) выражения для U_3.

При расчете схем, составленных из конденсаторов и аккумуляторов, электроемкости источников напряжения, а следовательно, и заряды их считаются равными нулю. Записывая уравнения (1), (2), мы воспользовались этим допущением и учитывали только заряды конденсаторов. В заключение отметим, что полученный нами результат для U_{ab} и U_3 не зависит от чередования выделенных участков цепи. Если, например, поменять местами источник с ЭДС $\mathscr{E}_2$ и конденсатор *C3*, ответ к задаче не изменится.

б) Если точки b и e соединить проводником, то конденсаторы *C1* и *C2* окажутся подключенными параллельно первому аккумулятору, а конденсатор *C3* — второму. Когда точки b и e были разъединены, общий заряд внутренних пластин конденсаторов, не подключенных непосредственно к клеммам аккумуляторов, был равен нулю. При замыкании точек проводником на пластинах появится некоторый заряд — это и будет тот заряд, который пройдет через проводник между этими точками. Если предположить, что на внутренних обкладках конденсаторов *C1*, *C2* и *C3* находятся заряды q_1, q_2 и $-q_3$, то искомый заряд будет равен их алгебраической сумме:

$$q_x = q_1 + q_2 - q_3.$$

Поскольку же

$$q_1 + q_2 = (C_1 + C_2)\,\mathscr{E}_1 \quad \text{и} \quad q_3 = C_3\,\mathscr{E}_2, \ \text{то}$$

$$q_x = (C_1 + C_2)\,\mathscr{E}_1 - C_3\,\mathscr{E}_2.$$

в) Если между точками b и e подключить конденсатор *C4*, то заряды, находившиеся на конденсаторах *C1*, *C2* и *C3*, перераспределятся. Перераспределение зарядов произойдет и на пластинах, не связанных непосредственно с клеммами аккумуляторов. Допустим, они станут равны q_1, q_2, $-q_3$ и $-q_4$. Суммарный заряд на этих пластинах всегда равен нулю, поэтому заряды на пластинах конденсаторов в узле b должны удовлетворять условию

$$q_1 + q_2 - q_3 - q_4 = 0. \qquad (5)$$

Для контуров *abdea* и *bdeb* можно записать:

$$\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 = U_{ab} + U_3 \quad \text{и} \quad \mathscr{E}_2 = U_4 - U_3, \qquad (6)$$

где U_4 — напряжение на конденсаторе *C4*.

Связь между зарядами и напряжениями на конденсаторах,

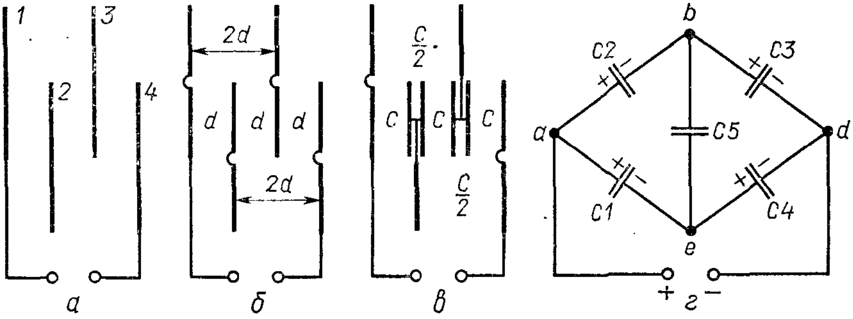

Рис. 11.10

входящими в уравнения (5) и (6), дается формулами электроемкости, из которых следует, что

$$q_1+q_2=(C_1+C_2)U_{ab};\quad q_3=C_3U_3;\quad q_4=C_4U_4. \qquad (7)$$

Исключая из составленной системы уравнений заряды и напряжения U_{ab} и U_3, находим напряжение U_4, равное разности потенциалов между точками b и e:

$$U_4=U_{be}=\frac{(C_1+C_2)\,\mathscr{E}_1+C_3\,\mathscr{E}_2}{C_1+C_2+C_3+C_4}.$$

Пример 11. Четыре тонкие металлические пластины площадью S каждая расположены на расстоянии d друг от друга, как указано на рисунке 11.10, *а*. Перекрывающиеся площади пластин равны $S/2$. Пренебрегая краевыми эффектами, определите емкость системы.

Решение. Чтобы рассчитать электроемкость заданной системы пластин, необходимо прежде всего заменить ее эквивалентной системой плоских конденсаторов, каким-то образом соединенных между собой. После этого задача сведется к расчету общей емкости батареи конденсаторов.

Нетрудно заметить, что каждую из четырех пластин можно представить как две пластины вдвое меньшей площади, соединенные между собой проводником, и заменить исходную схему схемой 11.10, *б*. При подключении аккумулятора к крайним пластинам источник будет совершать работу по переносу части электронов с одной крайней пластины на другую — заряды на проводниках разделятся. Пластины, подключенные к клеммам источника тока, получат заряды $+q_0$ и $-q_0$. Эти заряды распределятся по двум пластинам *1* и двум пластинам *4*.

На внутренних пластинах заряды тоже перераспределяются. Эти пластины оказываются в электрическом поле внешних пластин, поэтому в них начнется смещение электронов проводимости навстречу полю, и оно будет происходить до тех пор, пока результирующее поле внутри пластин не станет равным нулю. Так как заряды распределяются по поверхности проводников, то каждую из пластин, находящуюся между двумя другими пластинами, можно рассматривать как две пластины, соединенные между собой тонким проводником. Такая замена является эквивалентной, так как в конденсаторах заряды распределяются лишь на той поверхности пластины, которая обращена в сторону другой пластины данного конденсатора. Учитывая это, систему пластин можно заменить эквивалентной системой плоских конденсаторов (рис. 11.10, *в*): трех плоских конденсаторов емкостью $C = \varepsilon_0 S/(2d)$, соединенных с двумя конденсаторами емкостью $C/2 = \varepsilon_0 S/(4d)$. Ее, в свою очередь, можно изобразить иначе (рис. 11.10, *г*).

Обозначим электроемкости конденсаторов через C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, где $C_1 = C_3 = C_5 = C$ и $C_2 = C_4 = C/2$. В последней схеме нет ни последовательно, ни параллельно соединенных конденсаторов, поэтому для нахождения емкости C_0 всей батареи нужно воспользоваться общим методом расчета цепи. В том, что данное соединение из пяти конденсаторов нельзя представить как комбинацию последовательных и параллельных соединений, убедиться легко. При последовательном соединении двух элементов цепи между ними не должно быть узлов — этому условию ни одна пара конденсаторов не удовлетворяет. При параллельном соединении двух элементов они должны быть непосредственно подключены к одним и тем же двум точкам цепи и, стало быть, на каждом проводнике, соединяющем элементы, должно быть только по одному узлу. Этому условию ни одна пара конденсаторов тоже не удовлетворяет.

Если на батарею конденсаторов подать напряжение U_0, батарея получит заряд

$$q_0 = C_0 U_0. \tag{1}$$

Такой заряд будет разделен источником на пластинах конденсаторов, подключенных к источнику.

Предположим, что заряды на конденсаторах равны q_1, q_2, q_3, q_4 и q_5, и отметим полярность обкладок конденсаторов в соответствии со знаками полюсов батареи. Полярность конденсатора $C5$ установим при этом предположительно: пусть верхняя пластина имеет заряд $+q_5$, а нижняя заряд $-q_5$. В нашей схеме есть 4 узла — a, b, d и e. Учитывая знаки зарядов пластин конденсаторов, запишем уравнения для зарядов (узлы a, b и e):

$$q_0 = q_1 + q_2, \tag{2}$$
$$-q_2 + q_5 + q_3 = 0, \tag{3}$$
$$-q_1 + q_4 - q_5 = 0. \tag{4}$$

Таких уравнений нужно составлять на одно меньше числа узлов в схеме. Уравнение для последнего узла не будет независимым — оно является следствием уравнений (2) — (4).

Записав уравнения для зарядов, нужно составить уравнения для напряжений на конденсаторах. Так как работа электрических сил по перемещению заряда из одной точки электростатического поля в другую не зависит от формы пути, а зависит только от разности потенциалов между этими точками, то для контура $abda$ получим:

$$U_0 - U_2 - U_3 = 0. \tag{5}$$

Для контура $abea$:

$$U_2 + U_5 - U_1 = 0. \tag{6}$$

Для контура $bdeb$:

$$U_3 - U_4 - U_5 = 0. \tag{7}$$

При составлении этих уравнений нужно обратить особое внимание на знаки перед слагаемыми; они определяются знаками зарядов пластин конденсаторов:

$$q_1 = CU_1, \quad q_2 = C/2U_2, \quad q_3 = CU_3, \quad q_4 = C/2U_4, \quad q_5 = CU_5. \tag{8}$$

Исключая из уравнений (1) — (8) заряды и напряжения и решая их относительно общей емкости системы, получим:

$$C_0 = \frac{11}{14} C = \frac{11\varepsilon_0 S}{28d}.$$

Пример 12. Плоский воздушный конденсатор с расстоянием между обкладками $d = 3$ см и площадью каждой из обкладок $S = 60$ см^2 присоединен к источнику постоянного напряжения $U = 2$ кВ. Параллельно пластинам конденсатора вводится металлическая пластинка толщиной $d_0 = 1$ см. а) Какую энергию расходует источник при внесении пластинки? На сколько изменяется при этом энергия конденсатора? б) Какую работу совершат силы поля и каково будет изменение энергии конденсатора, если пластинку вставлять в заряженный конденсатор, отключенный от источника?

Решение. а) При внесении незаряженной металлической пластинки в поле конденсатора пространство, занимаемое полем, уменьшается на объем пластинки, так как напряженность электрического поля внутри металла равна нулю. Емкость конденсатора с металлической пластинкой увеличивается по сравнению с первоначальной, как если бы его пластины сблизили. Это легко себе представить, предположив, что пластинка вводится вплотную к одной из обкладок. В таком случае мы как бы увеличиваем толщину обкладки конденсатора за счет сокращения воздушного промежутка.

Поскольку конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения, то увеличение электроемкости конденсатора, вызванное внесением металлической пластинки, приводит к тому, что заряды на конденсаторе изменятся и по цепи пройдет некоторый заряд Δq. Работа источника при прохождении через него заряда Δq (работа сторонних сил внутри источника) будет равна:

$$A_{и} = \Delta q U. \tag{1}$$

Значение заряда, прошедшего через источник, а следовательно, и работу батареи можно определить по изменению (увеличению) заряда конденсатора. Если первоначальный заряд на конденсаторе был q_1, а после внесения пластинки он увеличился до q_2, то

$$\Delta q = q_2 - q_1. \tag{2}$$

Заряды q_1 и q_2 можно выразить через напряжение на конденсаторе U, которое остается все время постоянным, и электроемкости — начальную C_1 и конечную C_2 (с металлической пластинкой):

$$q_1 = C_1 U; \quad q_2 = C_2 U. \tag{3}$$

Электроемкость плоского конденсатора в первом и втором случаях равна соответственно:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d - d_0}, \tag{4}$$

поскольку во втором случае расстояние между обкладками уменьшилось на толщину пластинки.

В соотношениях (1) — (4) неизвестными величинами являются $A_{и}$, Δq, q_1, q_2, C_1 и C_2. Решая их относительно искомой работы источника и подставляя числовые значения, получим:

$$A_{и} = \frac{\varepsilon_0 S d_0 U^2}{d(d - d_0)}; \quad A_{и} = 7 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$$

Изменение энергии конденсатора (энергии его электрического поля) равно:

$$\Delta W = W_2 - W_1, \tag{5}$$

где W_1 и W_2 — соответственно энергия конденсатора до и после перераспределения зарядов, т. е. до и после внесения пластинки.

Чтобы представить правую часть этого равенства в развернутом виде, нужно воспользоваться одной из формул для энергии конденсатора. Используя формулы (11.26) для конкретных расчетов, нужно брать ту из них, которая в правой части содержит лишь одну переменную величину. В нашей задаче такому условию удовлетворяет вторая формула, так как напряжение на конденсаторе, подключенном к источнику, при изменении емкости остается постоянным:

$$W_1 = \frac{C_1 U^2}{2}; \quad W_2 = \frac{C_2 U^2}{2}. \tag{6}$$

Емкости C_1 и C_2, входящие в выражения для энергий, определяют по формулам (4).

Подставляя в соотношение (5) выражения для W_1 и W_2 с учетом формул (4), получим:

$$\Delta W = \frac{\varepsilon_0 S d_0 U^2}{2d(d-d_0)},$$

откуда после подстановки числовых значений заданных величин найдем: $\Delta W = 3{,}5 \cdot 10^{-6}$ Дж. Увеличение энергии конденсатора оказалось вдвое меньше работы источника. Рекомендуем самим читателям установить, на что израсходована вторая половина энергии.

б) Рассмотрим теперь второй случай, когда конденсатор заряжен и отключен от источника. При внесении в заряженный конденсатор металлической пластинки силы электрического поля начнут совершать работу по разделению зарядов внутри пластинки. В результате на одной стороне пластинки окажется положительный заряд, на второй — отрицательный. Значения их будут одинаковыми и равными заряду q конденсатора, так как лишь при этом условии поле внутри пластинки будет равно нулю. Если конденсатор отключен от источника, то в процессе разделения зарядов в пластинке и изменения емкости заряд на обкладках конденсатора остается одним и тем же. По мере увеличения разделенного заряда напряженность результирующего поля внутри пластинки уменьшается от значения E (равного значению напряженности в конденсаторе $C1$) до нуля.

Когда заряд на поверхностях пластинки достигает значений q и $-q$, силы поля на расстоянии d_0, равном толщине пластинки, совершат над зарядом работу

$$A_п = qE_{ср}d_0, \qquad (1)$$

где $E_{ср}$ — среднее значение напряженности поля внутри пластинки. Легко показать, что напряженность поля внутри пластинки меняется с увеличением разделенного заряда по линейному закону и поэтому

$$E_{ср} = \frac{E}{2}. \qquad (2)$$

Согласно формуле (11.5) напряженность поля в плоском воздушном конденсаторе равна:

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 S}. \qquad (3)$$

Заряд на конденсаторе, а следовательно, и равный ему заряд на поверхности пластинки можно выразить через начальную емкость конденсатора и начальное напряжение на нем:

$$q = C_1 U = \frac{\varepsilon_0 S}{d} U. \qquad (4)$$

Исключая из выражений (1) — (4) неизвестные q, $E_{ср}$, E и подставляя числовые значения, получим для работы силы поля:

$$A_п = \frac{\varepsilon_0 S d_0 U^2}{2d^2}; \quad A_п \approx 1{,}17 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}.$$

Если до внесения пластинки конденсатор обладал энергией W_1, после внесения W_2, то изменение (уменьшение) энергии конденсатора

$$\Delta W = W_2 - W_1. \tag{5}$$

Как и в первом случае, правую часть равенства нужно представить в развернутом виде, выразив энергию конденсатора через заданные величины. Поскольку в этом примере неизменным остается заряд на конденсаторе, то, применив третью формулу (11.26), получим:

$$W_1 = \frac{q^2}{2C_1}; \quad W_2 = \frac{q^2}{2C_2}. \tag{6}$$

Входящий в выражения для энергии (6) заряд q определяют по формуле (4); емкости до и после внесения пластинки равны соответственно:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d - d_0}. \tag{7}$$

Подставив в соотношение (5) выражения для W_1 и W_2 через заданные величины с учетом их числовых значений, получим:

$$\Delta W = -\frac{\varepsilon_0 S d_0 U^2}{2d^2}; \quad \Delta W \approx -1{,}17 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}.$$

Сравнивая выражения для изменения энергии и работы сил поля, мы видим, что $-\Delta W = A_п$, т. е. работа по разделению зарядов в пластинке (увеличение их потенциальной энергии) происходит за счет уменьшения энергии внешнего поля — поля конденсатора.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 11

11.1. С какой силой будут притягиваться два одинаковых свинцовых шарика диаметром 1 см, расположенные на расстоянии 1 м друг от друга, если у каждого атома первого шарика отнять по одному электрону и все эти электроны перенести на второй шарик?

11.2. На двух одинаковых каплях масла радиусом $8{,}22 \cdot 10^{-3}$ см находятся одинаковые одноименные заряды. Определите их модуль, если сила кулоновского отталкивания уравновешивает силу притяжения капель. Расстояние между каплями значительно больше их линейных размеров.