ной на рисунке 11.19, *а, б* при переключении ключа из положения *1* в положение *2*?

**11.64.** Расстояние между пластинами плоского конденсатора, присоединенного к полюсам батареи с ЭДС 180 В, увеличивают с 5 до 12 мм. Площадь пластин конденсатора 174 см$^2$. Какая работа будет произведена источником? На сколько изменится при этом энергия конденсатора? Решите задачу при условии, что конденсатор зарядили и отключили от батареи.

**11.65.** Плоский конденсатор состоит из двух одинаковых пластин площадью 625 см$^2$, подключенных к источнику постоянного напряжения так, что их потенциалы относительно земли все время равны $+5$ кВ и $-5$ кВ. Расстояние между пластинами 25 мм. Посредине между обкладками конденсатора параллельно им устанавливают тонкую металлическую пластину, соединенную с землей. Какую работу нужно совершить, чтобы передвинуть эту пластину на расстояние 5 мм к одной из обкладок?

**11.66.** Вычислите энергию слоистого конденсатора, рассмотренного в задаче 11.34, если площадь его обкладок будет равна 100 см$^2$.

**11.67.** Маленький шарик, масса которого ничтожно мала, имеет заряд $q$ и находится на расстоянии $R$ от очень большой проводящей пластины. Какую силу нужно приложить к шарику, чтобы он находился в равновесии? Чему равны напряженность и потенциал электрического поля в точках, лежащих на перпендикуляре, проведенном через шарик к поверхности пластины, и удаленных от шарика на расстояние $R$? Какова напряженность и потенциал поля в точках на поверхности пластины, удаленных от основания перпендикуляра на расстояние $R$?

**11.68.** Заряд $q$ расположен на высоте $h$ над проводящей плоскостью. Какую работу нужно совершить против сил поля, чтобы удалить этот заряд в бесконечность?

# Глава 12

# ПОСТОЯННЫЙ ТОК

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

1. Средняя сила электрического тока по определению равна:

$$I=\frac{q}{t}, \tag{12.1}$$

где $q$ — заряд, прошедший через данное сечение за время $t$. Плотностью тока, проходящего через проводник с площадью поперечного сечения $S$, называется отношение

$$j=\frac{I}{S}. \tag{12.2}$$

При равномерном движении потока заряженных частиц со скоростью $\vec{v}$ плотность тока

$$j = nqv,$$

где $n$ — концентрация заряженных частиц в потоке; $q$ — заряд одной частицы.

2. Если на участке электрической цепи, не содержащем ЭДС и имеющем сопротивление $R$, поддерживать постоянную разность потенциалов (напряжение) $\varphi_1 - \varphi_2 = U$, то согласно закону Ома по участку течет ток

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}. \tag{12.3}$$

За направление тока принимают направление движения положительных зарядов, отрицательные заряды движутся навстречу току.

Сопротивление однородного проводника длиной $l$ с постоянным сечением $S$ равно:

$$R = \varrho \frac{l}{S}, \tag{12.4}$$

где $\varrho$ — удельное сопротивление материала.

Для большинства металлов вблизи 0° С существует температурный интервал, в пределах которого

$$\varrho = \varrho_0 (1 + \alpha t), \tag{12.5}$$

где $\varrho$ — удельное сопротивление при температуре $t$; $\varrho_0$ — при 0° С; $\alpha$ — температурный коэффициент сопротивления.

3. При последовательном соединении проводников конец предыдущего проводника соединяется с началом последующего и между проводниками ток не разветвляется.

Если $n$ проводников сопротивлением $R_1$, $R_2$, ..., $R_n$ соединены между собой последовательно, то через проводники течет одинаковый ток и напряжение $U_0$ на концах соединения равно сумме напряжений на отдельных проводниках:

$$\left.\begin{aligned} I_0 = I_1 = I_2 = \ldots = I_n, \\ U_0 = U_1 + U_2 + \ldots + U_n = \sum_{i=1}^{n} U. \end{aligned}\right\} \tag{12.6}$$

Добавляя к этим уравнениям формулу закона Ома $I_0 = \frac{U_0}{R_0}$ для всего участка и для отдельных резисторов $I_i = \frac{U_i}{R_i}$, мы получим исходную систему уравнений для расчета последовательной цепи. Из этой системы, в частности, следует, что общее сопротивление проводников, соединенных последовательно, равно:

$$R_0 = R_1 + R_2 + \ldots + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i. \qquad (12.6')$$

При последовательном соединении $n$ проводников с одинаковым сопротивлением $R_1$ их общее сопротивление

$$R_0 = nR_1. \qquad (12.6'')$$

Если начала проводников соединены в одной точке (узле), а концы в другой, соединение проводников называют параллельным. При параллельном соединении

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= U_1 = U_2 = \ldots = U_n, \\ I_0 &= I_1 + I_2 + \ldots + I_n = \sum_{i=1}^{n} I_i. \end{aligned}\right\} \qquad (12.7)$$

Добавляя к этим уравнениям формулу закона Ома для всего участка и для каждого резистора, мы получим исходную систему уравнений для расчета параллельной цепи. Из этой системы, в частности, следует, что величина, обратная общему сопротивлению, при параллельном соединении проводников равна сумме обратных величин их сопротивлений:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}. \qquad (12.7')$$

При параллельном соединении $n$ проводников с одинаковым сопротивлением $R_1$ их общее сопротивление равно:

$$R_0 = \frac{R_1}{n}. \qquad (12.7'')$$

4. Если шкала амперметра содержит $\varphi_0$ одинаковых делений и рассчитана на максимальную силу тока $I_0$, то при отклонении стрелки амперметра на $\varphi$ делений через него проходит ток

$$I = \frac{I_0}{\varphi_0}\varphi = C_I\varphi, \qquad (12.8)$$

где $C_I$ — цена одного деления.

Чтобы расширить пределы измерения силы тока в $n$ раз и измерять токи до значений $I > I_0$, параллельно амперметру нужно присоединить шунт с сопротивлением

$$R_ш = \frac{I_0 R_0}{I - I_0} = \frac{R_0}{n-1}, \qquad (12.9)$$

где $R_0$ — внутреннее сопротивление амперметра.

Показание магнитоэлектрического вольтметра равно падению напряжения на сопротивлении прибора:

$$U_V = I_V R_0,$$

и в то же время

$$U_V = \frac{U_0}{\varphi_0}\varphi = C_V\varphi, \tag{12.10}$$

где $U_0$ — напряжение на зажимах прибора, при котором стрелка отклоняется на всю шкалу; $C_V$ — цена деления шкалы вольтметра.

Чтобы расширить пределы измерения напряжения в $n$ раз и измерять напряжения до значений $U > U_0$, последовательно вольтметру нужно присоединить резистор с сопротивлением

$$R_д = \frac{(U - U_0)}{U_0} R_0 = (n - 1) R_0, \tag{12.11}$$

где $R_0$ — внутреннее сопротивление вольтметра.

5. Сила тока, текущего в замкнутой цепи, состоящей из проводников с общим сопротивлением $R$ и элемента с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением $r$, равна:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + r}. \tag{12.12}$$

Напряжение на зажимах источника, замкнутого проводником с сопротивлением $R$, равно:

$$U = IR = \frac{\mathscr{E}R}{R + r} = \mathscr{E} - Ir. \tag{12.13}$$

Если $R = 0$, точнее, $R \ll r$ (случай короткого замыкания), то ток короткого замыкания и напряжение на зажимах источника равны:

$$I_{к.з} = \frac{\mathscr{E}}{r}; \quad U = 0.$$

Если $R = \infty$, точнее, $R \gg r$ (цепь разорвана), то

$$I = 0; \quad U = \mathscr{E}.$$

6. При последовательном соединении нескольких источников тока ЭДС всей батареи равна алгебраической сумме ЭДС отдельных источников:

$$\mathscr{E}_0 = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \ldots + \mathscr{E}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathscr{E}_i.$$

$$\mathscr{E}_0 = n\mathscr{E}, \text{ если } \mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2 = \ldots = \mathscr{E}_n = \mathscr{E}.$$

ЭДС источников, которые сами создавали бы ток того же направления, какое имеет ток, идущий в цепи, берут со знаком «плюс». ЭДС источников, которые давали бы ток противоположного направления, считают отрицательными.

Внутреннее сопротивление батареи

$$r_0 = r_1 + r_2 + \ldots + r_n = \sum_{i=1}^{n} r_i.$$

Если источники с ЭДС $\mathscr{E}_i$ и внутренним сопротивлением $r_i$ соединены между собой последовательно и замкнуты на резисторы с общим сопротивлением $R$, то сила тока, идущего в цепи, равна:

$$I = \frac{\sum \mathscr{E}_i}{R + \sum r_i}. \tag{12.14}$$

При последовательном соединении одинаковых источников разноименными полюсами сила тока в цепи равна:

$$I = \frac{n\mathscr{E}_1}{R + nr_1}, \tag{12.14'}$$

где $\mathscr{E}_1$ и $r_1$ — соответственно ЭДС и внутреннее сопротивление одного элемента; $n$ — число элементов.

Из формул (12.13) и (12.14) вытекает закон Ома для участка цепи, содержащей ЭДС:

$$I_{уч} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_{уч}}{r_{уч}}. \tag{12.15}$$

Напряжение на этом участке цепи равно:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \mathscr{E}_{уч} \mp I_{уч} r_{уч}, \tag{12.15'}$$

где $\varphi_1$ и $\varphi_2$ — потенциалы начала и конца участка в направлении тока через источник; $\mathscr{E}_{уч}$ — общая ЭДС участка; $I_{уч}$ и $r_{уч}$ — сила тока и полное сопротивление участка.

В формуле (12.15′) предполагается, что конец и начало участка (точки с потенциалами $\varphi_2$ и $\varphi_1$) примыкают соответственно к положительному и отрицательному полюсу источника.

Знак «минус» перед $I_{уч}$ берется в тех случаях, когда ток по участку течет от $\varphi_1$ к $\varphi_2$ (внутри источника от отрицательного полюса к положительному), знак «плюс» — когда ток идет от $\varphi_2$ к $\varphi_1$ (внутри источника от положительного полюса к отрицательному). Последнее возможно при условии, что рассматриваемый участок является элементом электрической цепи, которая на других участках содержит ЭДС, включенные навстречу ЭДС рассматриваемого участка.

При параллельном соединении нескольких источников тока батарею аккумуляторов можно заменить одним источником, который будет создавать во внешней цепи сопротивлением $R$ такой же ток, как и данная батарея. Внутреннее сопротивление $r_э$ и ЭДС $\mathscr{E}_э$ эквивалентного элемента можно найти из формул

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{r_э} &= \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}, \\ \frac{\mathscr{E}_э}{r_э} &= \frac{\mathscr{E}_1}{r_1} + \frac{\mathscr{E}_2}{r_2} + \dots + \frac{\mathscr{E}_n}{r_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathscr{E}_i}{r_i}. \end{aligned}\right\} \tag{12.16}$$

При составлении алгебраической суммы (12.16) правило знаков перед $\mathcal{E}$ сохраняется таким же, как и в случае последовательного соединения элементов.

Согласно закону Ома сила тока во внешнем участке цепи сопротивлением $R$ при параллельном соединении источников равна:

$$I = \frac{\mathcal{E}_э}{R + r_э}.$$

При параллельном соединении $n$ одинаковых источников одноименными полюсами сила тока во внешней цепи равна:

$$I = \frac{\mathcal{E}_1}{R + \frac{r_1}{n}} = \frac{n\,\mathcal{E}_1}{nR + r_1}. \tag{12.17}$$

Если из $n$ одинаковых элементов с ЭДС $\mathcal{E}_1$ и внутренним сопротивлением $r_1$ составить $m$ групп, соединенных между собой последовательно, и в каждую группу включить $k$ источников, соединенных параллельно одноименными полюсами, то при подключении к батарее резистора сопротивлением $R$ сила тока в нем будет равна:

$$I = \frac{m\,\mathcal{E}_1}{R + \frac{m}{k} r_1} = \frac{mn\,\mathcal{E}_1}{nR + m^2 r_1} = \frac{\mathcal{E}_1}{\frac{R}{m} + \frac{m r_1}{n}}, \tag{12.18}$$

поскольку $n = km$.

Добавляя к знаменателю последнего равенства и вычитая из него выражение $2\sqrt{r_1 R/n}$, знаменатель можно привести к виду:

$$\left(\sqrt{m r_1/n} - \sqrt{R/m}\right)^2 + 2\sqrt{r_1 R/n},$$

откуда следует, что при $m^2 r_1 = nR$ ($m r_1 = kR$) он имеет наименьшее значение, равное второму слагаемому, и, значит, сила тока в цепи максимальна:

$$I_{max} = \frac{m\,\mathcal{E}_1}{2R} = \frac{k\,\mathcal{E}_1}{2 r_1}. \tag{12.18′}$$

Этот же результат можно получить из второго уравнения (12.18), считая в нем переменными величинами $I$ и $m$. Беря производную от $I$ по $m$ и приравнивая ее к нулю, мы сначала получим значение $m$, при котором сила тока имеет наибольшее значение, а затем и выражение (12.18′).

7. Для разветвленных цепей имеют место правила Кирхгофа:

а) Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum I = 0, \tag{12.19}$$

иначе, сумма токов, подходящих к узлу, равна сумме токов, выходящих из узла.

б) В любом замкнутом контуре алгебраическая сумма падений напряжений (произведений сил токов на сопротивления соответствующих участков контура) равна алгебраической сумме всех ЭДС, действующих в этом контуре:

$$\sum IR = \sum \mathcal{E}. \qquad (12.20)$$

8. При прохождении заряда $q$ по участку цепи электрическое поле совершает над зарядом работу

$$A = qU = IUt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t. \qquad (12.21)$$

Первые две формулы справедливы для любого участка цепи сопротивлением $R$, на концах которого поддерживается разность потенциалов $U$, последние две — если на участке нет ЭДС.

Работа тока за единицу времени — мощность тока в этом случае равна:

$$P = IU = I^2R = \frac{U^2}{R}. \qquad (12.22)$$

Если источник с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением $r$ замкнут на резистор сопротивлением $R$, то полная мощность, развиваемая источником, равна:

$$P_0 = I\mathcal{E} = I^2(R+r) = \frac{\mathcal{E}^2}{R+r}. \qquad (12.23)$$

Во внешнем участке цепи при этом выделяется мощность

$$P = IU = \frac{U^2}{R} = I\mathcal{E} - I^2r = \frac{\mathcal{E}^2R}{(R+r)^2}. \qquad (12.24)$$

где $I$ — сила тока в цепи; $U$ — напряжение на зажимах источника.

Как видно из анализа третьего уравнения (12.24) и графика зависимости $P = f(I)$ (рис. 12.1), при силе тока $I_1 = 0$ и $I_2 = \mathcal{E}/r$ мощность во внешней цепи не выделяется ($P = 0$); при силе тока $I = \mathcal{E}/(2r)$ она имеет наибольшее значение, равное $P_{max} = \mathcal{E}^2/(4r)$. Согласно закону Ома для полной цепи ток, соответствующий максимальной мощности во внешней цепи, идет в том случае, когда $R = r$.

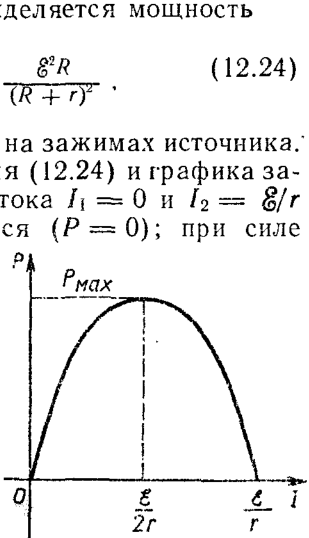

Рис. 12.1

Коэффициент полезного действия источника тока равен:

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{U}{\mathcal{E}} = \frac{R}{R+r}. \qquad (12.25)$$

9. При прохождении тока $I$ по участку цепи с сопротивлением $R$ в нем за время $t$ выделяется количество теплоты

$$Q = I^2Rt \text{ (закон Джоуля — Ленца).} \tag{12.26}$$

Если участок цепи не содержит источников тока, то количество теплоты, выделяющееся на этом участке, можно определять по формулам

$$Q = IUt \quad \text{и} \quad Q = \frac{U^2}{R}t, \tag{12.27}$$

где $U$ — напряжение, подводимое к участку.

10. В общем случае при движении электрических зарядов по замкнутой цепи за счет мощности, развиваемой источником, происходит увеличение внутренней энергии проводников, совершается механическая работа (сближение пластинок конденсатора, движение проводников в магнитном поле и т. д.), осуществляются химические реакции, сопутствующие току в жидкостях:

$$I\mathcal{E} = I^2R + N_{\text{мех}} + N_{\text{х}}. \tag{12.28}$$

11. Явление выделения составных частей растворенных в жидкости веществ при прохождении через нее электрического тока называют электролизом. Растворы, проводящие ток, называют электролитами.

Если за время $t$ через электролит прошел заряд $q$ и к каждому электроду подошло $N$ ионов массой $m_1$, то на катоде откладывается вещество массой $m = Nm_1$.

Масса иона равна:

$m_1 = \frac{M}{N_A}$, где $M$ — молярная масса одноатомного вещества; $N_A$ — постоянная Авогадро.

Число ионов $N = \frac{q}{q_и} = \frac{q}{ne}$, где $q_и$ — заряд иона; $n$ — валентность вещества; $e$ — заряд электрона. Учитывая все это, получим:

$$m = \frac{Mq}{eN_An}. \tag{12.29}$$

Постоянное для всех веществ произведение $eN_A = F$ называется постоянной Фарадея, постоянное для данного вещества отношение

$$\frac{M}{nF} = k$$

называется электрохимическим эквивалентом вещества.

Учитывая это, формулу (12.29) можно переписать в виде:

$$m = \frac{M}{nF}q = kq = kIt \text{ (закон Фарадея),} \tag{12.29$'$}$$

где $I$ — сила тока в электролите.

При вычислении массы осевшего на катоде вещества в формулу (12.29′) подставляют полный ток в электролите, равный сумме токов положительных и отрицательных ионов. Объясняется это тем, что перемещение отрицательных зарядов к аноду эквивалентно току положительных зарядов к катоду, поскольку в целом электролит нейтрален. Если от катода к аноду ежесекундно уходит $N$ отрицательных зарядов, то при этом у катода остается такое же количество положительных ионов, которые вместе с прибывшими за это время положительными ионами оседают на катоде. Результат получается такой, как если бы к катоду шел ток, равный удвоенному току положительных ионов. Он и равен суммарному току в электролите.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

1. Задачи о движении электрических зарядов по проводникам и о явлениях, связанных с этим движением, удобно разделить на три типа: задачи на вычисление сопротивлений, сил токов или напряжений на каком-либо участке цепи; задачи на работу, мощность и тепловое действие тока и задачи на электролиз. Из задач первого типа можно выделить вспомогательную группу — задачи на вычисление сопротивлений отдельных проводников и различных соединений из них. С этой вспомогательной группы задач мы и начнем разбор.

2. Если в условии задачи указано, из какого материала изготовлен проводник, или приводятся сведения о его геометрических размерах или массе, то для нахождения неизвестной величины, от которой зависит сопротивление проводника, нужно воспользоваться формулой сопротивления и соотношением между массой, плотностью и объемом проводника. Следует при этом иметь в виду, что, пользуясь представлениями электронной теории, удельное сопротивление можно выразить через величины, характеризующие свойства и движение элементарных зарядов.

Задачи о температурной зависимости сопротивлений, как правило, не представляют большой трудности, их легко решать с помощью уравнений (12.4), (12.5) и тех указаний, которые были сделаны к задачам о линейном расширении тел.

При вычислении общего сопротивления какого-либо контура, составленного из нескольких проводников, необходимо прежде всего установить, есть ли в нем проводники, соединенные между собой последовательно или параллельно, или в схеме таких подключений нет.

В первом случае решение задачи целиком основано на использовании формул (12.6) и (12.7), во втором — приходится применять новые методы расчета, в которых формулы сопротивления играют фактически не главную, а вспомогательную роль.

Решение задач на вычисление сопротивлений сложных соединений нужно начинать с анализа схемы и отыскания в ней