При вычислении массы осевшего на катоде вещества в формулу (12.29′) подставляют полный ток в электролите, равный сумме токов положительных и отрицательных ионов. Объясняется это тем, что перемещение отрицательных зарядов к аноду эквивалентно току положительных зарядов к катоду, поскольку в целом электролит нейтрален. Если от катода к аноду ежесекундно уходит N отрицательных зарядов, то при этом у катода остается такое же количество положительных ионов, которые вместе с прибывшими за это время положительными ионами оседают на катоде. Результат получается такой, как если бы к катоду шел ток, равный удвоенному току положительных ионов. Он и равен суммарному току в электролите.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

1. Задачи о движении электрических зарядов по проводникам и о явлениях, связанных с этим движением, удобно разделить на три типа: задачи на вычисление сопротивлений, сил токов или напряжений на каком-либо участке цепи; задачи на работу, мощность и тепловое действие тока и задачи на электролиз. Из задач первого типа можно выделить вспомогательную группу — задачи на вычисление сопротивлений отдельных проводников и различных соединений из них. С этой вспомогательной группы задач мы и начнем разбор.

2. Если в условии задачи указано, из какого материала изготовлен проводник, или приводятся сведения о его геометрических размерах или массе, то для нахождения неизвестной величины, от которой зависит сопротивление проводника, нужно воспользоваться формулой сопротивления и соотношением между массой, плотностью и объемом проводника. Следует при этом иметь в виду, что, пользуясь представлениями электронной теории, удельное сопротивление можно выразить через величины, характеризующие свойства и движение элементарных зарядов.

Задачи о температурной зависимости сопротивлений, как правило, не представляют большой трудности, их легко решать с помощью уравнений (12.4), (12.5) и тех указаний, которые были сделаны к задачам о линейном расширении тел.

При вычислении общего сопротивления какого-либо контура, составленного из нескольких проводников, необходимо прежде всего установить, есть ли в нем проводники, соединенные между собой последовательно или параллельно, или в схеме таких подключений нет.

В первом случае решение задачи целиком основано на использовании формул (12.6) и (12.7), во втором — приходится применять новые методы расчета, в которых формулы сопротивления играют фактически не главную, а вспомогательную роль.

Решение задач на вычисление сопротивлений сложных соединений нужно начинать с анализа схемы и отыскания в ней каких-нибудь двух проводников, соединенных друг с другом последовательно или параллельно. При этом все время надо следить за тем, чтобы в случае последовательного соединения ток между проводниками не разветвлялся, а в случае параллельного — их концы соединялись непосредственно. Если в схеме удается найти такие проводники, их сопротивление следует заменить одним эквивалентным сопротивлением, используя формулы (12.6) и (12.7), и получить упрощенную схему. В схемах, представляющих собой комбинацию последовательно и параллельно включенных проводников, этот прием нужно применять несколько раз и таким образом найти ее общее сопротивление.

Если в контуре не окажется ни последовательно, ни параллельно соединенных проводников, для вычисления общего сопротивления используют следующие два свойства электрической цепи:

1) Во всякой электрической цепи точки с одинаковым потенциалом можно соединить и разъединить. Режим тока от этого не нарушается, поскольку ток между такими точками не идет.

2) Работа по перемещению единичного заряда из одной точки однородной цепи в другую не зависит от сопротивлений проводников, по которым проходит заряд, а определяется только разностью потенциалов между этими точками.

Иными словами, какой бы мы ни выбрали путь движения заряда по однородной цепи, алгебраическая сумма падений напряжений на отдельных участках этой цепи равна разности потенциалов между начальной и конечной точками:

$$\sum U_i = \sum R_i I_i = U_0,$$

где I_i и R_i — силы токов и сопротивления отдельных участков. Следует при этом помнить, что такое утверждение справедливо лишь в тех случаях, когда на заряды действуют только электрические силы и на участках нет ЭДС.

Установив, что в схеме нет последовательно и параллельно соединенных проводников, нужно попытаться найти точки с одинаковыми потенциалами. Точки с одинаковым потенциалом всегда есть в схемах, обладающих осью или плоскостью симметрии относительно точек подключения источника питания. Здесь следует различать два случая.

Если схема симметрична относительно оси (плоскости), проходящей через точки входа и выхода тока (имеется продольная плоскость симметрии), то точки одного потенциала находятся на концах симметричных резисторов, поскольку по ним идут одинаковые токи.

Если схема симметрична относительно оси (плоскости), перпендикулярной линии, на которой лежат точки входа и выхода тока — в схеме имеется поперечная ось (плоскость) симметрии, то одинаковым потенциалом обладают все точки, лежащие на пересечении этой оси (плоскости) с проводниками. Это почти очевидное обстоятельство вытекает из того, что работа электрических сил над зарядами не зависит от формы пути.

Найдя в схемах точки с одинаковым потенциалом, нужно соединить их (если они были разъединены) или разъединить (если точки были соединены), после чего, как правило, можно получить эквивалентную схему, составленную из последовательно и параллельно соединенных резисторов.

В общем случае, когда в схеме нет последовательно и параллельно соединенных проводников, нет точек с равным потенциалом, обычно поступают так: Проставляют токи на каждом резисторе и указывают их предполагаемое направление. Обозначив затем через I_0 суммарный ток, проходящий через данный контур (он равен току, подходящему к контуру), составляют уравнение токов для каждой точки разветвления (узла): сумма токов, подходящих к узлу, должна равняться сумме токов, исходящих из узла (первое правило Кирхгофа). Затем выбирают все возможные пути прохождения заряда между точками подключения контура и составляют для каждого из них уравнение падений напряжений вида

$$I_0 R_0 = \sum_{i=1}^{n} I_i R_i,$$

где R_0 — общее сопротивление всего контура, которое требуется найти. Эти уравнения составляются на основании того, что падение напряжения I_0R_0 на всем контуре равно алгебраической сумме падений напряжения на отдельных резисторах, соединяющих точки подключения контура. Если оказывается, что по какому-либо проводнику, входящему в рассматриваемую часть цепи, ток идет в направлении, противоположном начальному току участка, то падение напряжения на этом проводнике берут со знаком «минус»; в остальных случаях — со знаком «плюс». Так как неизвестным является R_0, то число уравнений токов и напряжений должно быть на одно больше числа токов, введенных в решение. Исключая из этих уравнений все токи, находят R_0.

3. При решении задач на определение силы тока, напряжения или сопротивления на каком-либо участке цепи надо:

а) начертить схему и указать на ней все элементы цепи: источники тока, резисторы и конденсаторы;

б) установить, какие элементы цепи включены последовательно, какие — параллельно;

в) расставить токи и напряжения на каждом участке цепи и записать для каждой точки разветвления (если они есть) уравнения токов и уравнения, связывающие напряжения на участках цепи. При составлении таких уравнений для схем, в которых нет ни последовательных, ни параллельных соединений, следует руководствоваться указаниями п. 2;

г) используя закон Ома (или формулу для напряжения на участке, содержащем ЭДС), установить связь между токами и напряжениями (ЭДС). В результате получится система уравнений, полностью отражающая условия задачи и позволяющая определить искомую величину. Если в схеме делают какие-либо переключения сопротивлений или источников, уравнения составляют для каждого режима работы цепи.

При расчетах шунтов или добавочных сопротивлений к гальванометру можно использовать готовые формулы (12.9) и (12.11).

Устанавливая зависимости между заданными и искомыми величинами, характеризующими элементы цепи и режим ее работы, нужно стараться не вводить в решение дополнительные величины, которые не даны и которые не требуется находить по условию задачи. Решение большинства задач на ток основано на применении закона Ома для полной цепи. Этот закон можно записать в обычном, наиболее распространенном виде $I = \mathcal{E}/(R+r)$ или в форме $U = \mathcal{E}R/(R+r)$. Первая формула определяет ток во внешнем участке цепи, вторая — напряжение на внешнем участке цепи. В общем случае эти выражения не эквивалентны друг другу, второе из них имеет известное ограничение — оно справедливо, если на участке нет ЭДС. Тем не менее очень часто расчеты значительно упрощаются, если использовать именно вторую формулу, а не первую. Обычно когда составляют простую цепь, то известными являются элементы цепи: ЭДС и сопротивления — и требуется найти на каком-либо участке ток или напряжение. При некотором навыке вторая из указанных формул позволяет легко и быстро находить напряжение на отдельных участках цепи, не используя токи. Для этого нужно сопротивления всех резисторов или их групп, соединенных последовательно с рассматриваемым участком сопротивлением $R_{уч}$, внести во внутреннее сопротивление источника и считать его равным не r, а $r + R_0$, где R_0 — общее сопротивление внешней цепи без сопротивления $R_{уч}$. Нетрудно заметить, что после этого участок, на котором требуется найти напряжение, оказывается подключенным к зажимам источника и согласно формуле (12.13) напряжение на нем будет равно:

$$U_{уч} = \frac{\mathcal{E}R_{уч}}{R_{уч} + r + R_0}.$$

Зная напряжение на участке, можно найти и силу тока в нем по закону Ома для участка цепи.

Большие затруднения обычно вызывают задачи на расчет цепей, содержащих несколько источников тока, соединенных между собой последовательно или параллельно.

В первом случае можно рекомендовать такую последовательность действий: найти общую ЭДС контура $\mathcal{E}_0$ (первая формула п. 6), найти общее сопротивление контура, найти силу тока в контуре I_0 по формуле (12.14) (она будет одинаковой на всех участках) и затем применить для рассматриваемого участка формулу разности потенциалов (12.15).

Во втором случае удобно поступать так: расставить токи, протекающие через элементы цепи (иногда направление токов можно предвидеть заранее; если же этого сделать не удается, то их направление ставится наугад), записать уравнение токов для узлов и после этого использовать формулу (12.15) для каждой из параллельных вётвей, содержащих ЭДС. Так как все ветви соединены параллельно, напряжение на них будет одинаковым. Чаще всего этими уравнениями условия задачи математически исчерпываются полностью.

При расчетах тока или напряжения на резисторе, подключенном к батарее параллельно соединенных аккумуляторов, можно использовать и готовую формулу (12.16) для эквивалентной ЭДС.

Указанная последовательность действий при решении всех задач рассматриваемой группы будет правильной всегда, но она не всегда обязательна. При достаточном навыке в решении задач на ток многие промежуточные выкладки можно опускать и записывать лишь наиболее важные соотношения, которые нужны непосредственно для определения искомой величины.

4. Задачи на работу, мощность и тепловое действие тока в свою очередь можно разбить на три группы. К первой группе относятся задачи на расчет электрической цепи, аналогичные тем, что рассматривались выше. Для их решения составляют те же уравнения закона Ома, но к ним добавляют формулы мощности (12.21) — (12.24). Если по условию задачи даны значения мощности, выделяемой в проводниках, и требуется найти силу тока, напряжение или сопротивление проводников, то эти формулы играют вспомогательную роль. Если же значение выделяемой мощности требуется определить, эти формулы можно рассматривать как основные расчетные соотношения и решение задачи начинать с их составления.

Особое внимание здесь нужно обратить на выбор исходной формулы мощности. Анализируя условия задачи, необходимо прежде всего установить, идет ли речь о мощности, выделяемой на участке цепи (формулы 12.22), или о мощности, развиваемой источником — полной мощности в цепи (формулы 12.23), или же о мощности во внешней цепи источника (формулы 12.24). В каждом из этих случаев нужно, в свою очередь, обратить внимание на то, какие из величин даны и какие требуется найти, и подобрать соответствующее расчетное соотношение. В большинстве случаев удачный выбор исходных формул позволяет достаточно быстро найти решение.

Решая задачи на мощность, выделяемую во внешней цепи, желательно помнить, что она будет максимальной, когда внешнее сопротивление цепи равно сопротивлению источника. Этим результатом можно пользоваться как готовым и значительно сократить вычисления.

Ко второй группе относятся задачи на тепловое действие тока. Основным расчетным соотношением в них является закон Джоуля — Ленца. Перед тем как приступать к составлению уравнений, необходимо установить, какую из формул (12.26) или (12.27) принять за исходную. Обе формулы можно применять в том случае, когда участок цепи не содержит источников тока; если же на участке имеются источники ЭДС, в качестве основной расчетной формулы надо взять формулу (12.26). Если в уравнении закона Джоуля — Ленца окажутся два и более неизвестных, к нему нужно добавить формулы калориметрии и формулы для определения общего сопротивления цепи.

Формулы $A = IUt$ и $Q = I^2Rt$, определяющие работу сил поля и количество теплоты, выделившейся на участке цепи, можно применять независимо от того, есть ли на этом участке источник ЭДС или нет. Если на участке нет источника ЭДС, эти формулы тождественны, работа сил поля в этом случае целиком идет на увеличение внутренней энергии проводника. Если же участок содержит источники тока, то величины A и Q, рассчитанные по этим формулам, будут разные. Какая величина будет больше — A или Q, зависит от направлений тока и знаков ЭДС на участке.

В задачах на сравнение количеств теплоты, выделяемой в разных проводниках, при выборе исходных уравнений можно руководствоваться следующим.

Если при переходе от одного участка цепи к другому или при подключении и выключении резисторов сила тока в проводниках остается одинаковой, удобно применять формулу (12.26) и составлять уравнение закона Джоуля — Ленца для каждого участка. Если же при переходе от участка к участку или подключении резисторов одинаковым оказывается напряжение на проводниках, удобнее воспользоваться формулой (12.27).

На задачи третьей группы следует обратить особое внимание, хотя их сравнительно мало. Эту группу составляют задачи о превращении электрической энергии в механическую, внутреннюю и химическую при работе электромашин постоянного тока. Решение таких задач основано на применении уравнения закона сохранения и превращения энергии (12.28).

Проанализировав условия и установив, на каких участках цепи электрическая энергия превращается во внутреннюю и механическую энергию, необходимо записать исходное уравнение (12.28) для каждого режима работы цепи. В простейших случаях этого достаточно, в более сложных задачах к основному уравнению приходится добавлять формулы законов постоянного тока и механики.

5. Решение задач на электролиз всегда удобно начинать с составления уравнения закона Фарадея (12.29′). В большинстве случаев все величины, входящие в это уравнение, кроме одной, заданы и нахождение неизвестного не представляет почти никакого труда. Если даны два вещества или более, уравнение

(12.29′) составляют для каждого из них. Для решения более сложных задач нужно воспользоваться вспомогательными формулами для нахождения m, q или I и, используя уравнение закона Фарадея, составить формулу, в которую входили бы величины, связанные с электролизом, но не входящие в основное уравнение. Ими могут быть, например, толщина слоя металла, выделившегося на катоде, скорость роста этого слоя, расход электроэнергии на единицу массы получаемого металла, отношение заряда иона к его массе. Эти формулы нет надобности запоминать, но знать о их существовании полезно. Они будут получены при разборе задач.

Если в задаче рассматривается выделение газа при электролизе, то следует иметь в виду, что масса газа входит и в формулу закона Фарадея, и в уравнение состояния идеального газа Менделеева — Клапейрона и через нее можно установить связь между всеми остальными величинами, входящими в эти формулы.

Пример 1. Электрическая лампочка накаливания потребляет силу тока $I = 0{,}2$ А. Диаметр вольфрамового волоска $d = 0{,}02$ мм, температура волоска при горении лампы $t = 2000°$С. Определите напряженность E электрического поля в волоске. Удельное сопротивление вольфрама $\varrho_0 = 5{,}6 \cdot 10^{-8}$ Ом · м, температурный коэффициент сопротивления $\alpha = 4{,}6 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$.

Решение. Для решения задачи нужно использовать закон Ома для участка цепи и формулу сопротивления. Особенность задачи состоит в том, что надо найти связь между напряженностью — характеристикой электрического поля внутри проводника и силой тока — характеристикой движения зарядов, а также сечением и удельным сопротивлением проводника.

Допустим, что по проводнику, имеющему длину l и сечение S, течет ток I, тогда напряжение на концах проводника $U = IR$.

Так как $U = El$ и $R = \varrho \frac{l}{S}$, то, подставляя в закон Ома вместо U и R их выражения, получим:

$$E = \varrho \frac{I}{S}.$$

Из этой формулы, в частности, следует, что с увеличением температуры проводника при неизменной плотности тока напряженность поля в проводнике возрастает, поскольку с ростом температуры возрастает ϱ.

Вспомогательным соотношением служит формула зависимости сопротивления от температуры, позволяющая определить удельное сопротивление ϱ вольфрамового волоска в нагретом состоянии. При температуре накала t оно равно:

$$\varrho = \varrho_0 (1 + \alpha t).$$

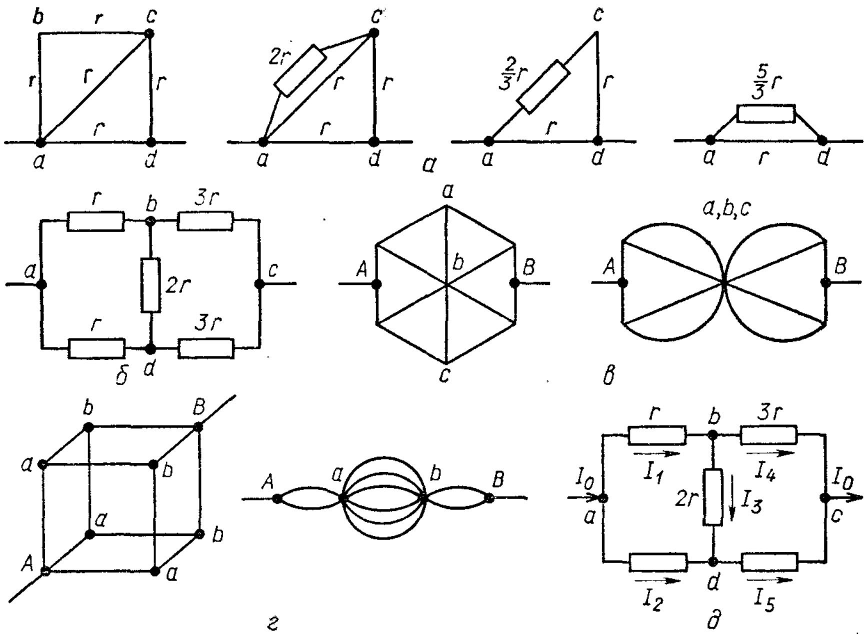

Рис. 12.2

С учетом этой зависимости формулу для напряженности электрического поля в раскаленном волоске можно окончательно переписать так:

$$E = \frac{I}{S}\varrho_0(1 + \alpha t).$$

Подставляя сюда числовые значения, получим $E = 360$ В/м.

Уравнение $E = \varrho \frac{I}{S}$, или $E = \varrho j$, называется законом Ома в дифференциальной форме. Закон Ома в дифференциальной форме обычно используется при расчете токов в безграничных средах.

Пример 2. Вычислите общее сопротивление цепи в схемах, показанных на рисунке 12.2, *а, б, в, г, д*. Сопротивление каждой стороны и диагонали квадрата, а также всех ребер куба равно r сопротивления симметричных резисторов (рис. 12.2,*д*) равны соответственно r и $3r$, $3r$ и r.

Решение. а) Рассматривая попарное соединение отдельных проводников в схеме, изображенной на рисунке 12.2, *а*, нетрудно установить, что два из них ab и bc соединены последовательно, так как между ними нет разветвлений тока. Кроме этой пары, в контуре больше нет двух проводников, которые были бы соединены последовательно или параллельно. Очень часто неправильно считают, что последовательно включены проводники ad и cd, не учитывая, что между ними есть токоподводящий провод и, следовательно, ток между проводниками может разветвляться.

Заменив эти два резистора одним эквивалентным резистором сопротивлением $r_1 = 2r$, мы видим, что он включен параллельно проводнику ac, поскольку их концы оказываются соединенными непосредственно. Находим общее сопротивление r_2 проводников сопротивлениями r_1 и r (контура $abca$ при подключении его в точках a и c):

$$r_2 = \frac{2rr}{2r + r} = \frac{2}{3} r.$$

Весь этот контур (сопротивлением r_2) соединен последовательно с проводником cd, и их общее сопротивление

$$r_3 = \frac{2}{3}r + r = \frac{5}{3}r.$$

После замены проводником с сопротивлением r_3 участка $abcd$ (включая проводник ac) схема оказывается предельно упрощенной, так как сразу же видно, что проводник с сопротивлением r_3 подключен параллельно к резистору ad. Их общее сопротивление, а следовательно, и искомое сопротивление всей цепи получается равным:

$$R_0 = \frac{5}{3}rr / \left(\frac{5}{3}r + r \right) = \frac{5}{8}r.$$

б) Рассмотрим теперь вторую схему (рис. 12.2, *б*). В ней на первый взгляд нет ни последовательных, ни параллельных соединений. Резисторы сопротивлением r и $3r$ нельзя считать соединенными последовательно, поскольку между ними включен проводник сопротивлением $2r$; проводники сопротивлением r и r (или $3r$ и $3r$) нельзя считать параллельными, так как точки b и d замкнуты проводником сопротивлением $2r$.

Нетрудно заметить, что в данной схеме проводники включены симметрично — в схеме есть продольная ось симметрии, проходящая через точки a и c. Поэтому для вычисления общего сопротивления контура нужно найти точки с одинаковыми потенциалами и, разъединив их (или соединив), свести задачу к типу предыдущей. Если ток подойдет к узлу a (или c), он разветвится на две равные части, поскольку условия его прохождения по каждой ветви до точки c будут идентичны. Потенциалы в точках b и d будут одинаковые, так как падение напряжения на проводниках сопротивлением r и r одинаково, и потенциал этих проводников в точке a один и тот же. Разность потенциалов между точками b и d равна нулю, по резистору сопротивлением $2r$ ток не идет, и, стало быть, не нарушая режима работы цепи, эти точки можно разъединить, выбросив проводник сопротивлением $2r$.

После такого упрощения схемы проводники сопротивлением r и $3r$ оказываются соединенными последовательно, а верхняя и нижняя ветви — параллельно. Общее сопротивление всей цепи равно:

$$R_0 = \frac{r + 3r}{2} = 2r.$$

Следует обратить внимание на то, что точки b и d можно разъединять, выбрасывая включенный между ними проводник, только в тех случаях, когда схема симметрична. Если же, например, в одной из ветвей поменять местами резисторы сопротивлением r и $3r$, то разность потенциалов между точками b и d не будет равна нулю; по проводнику $2r$ пойдет ток, и указанным методом расчета воспользоваться будет нельзя.

Схему рисунка 12.2, *б* часто изображают так, как показано на рисунке 12.3. Разумеется, общее сопротивление цепи остается при этом неизменным.

в) В шестиугольнике с перемычками (рис. 12.2, *в*) точки входа и выхода тока и проволочные сопротивления расположены симметрично оси ac — в схеме имеется поперечная ось симметрии, поэтому точки a, b и c имеют одинаковый потенциал и их можно соединить в одну, выбросив проводники ab и bc, по которым ток не идет. После этого схема упрощается, и ее сопротивление легко вычислить как комбинацию последовательно и параллельно соединенных проводников. Как видно из чертежа, это сопротивление, а следовательно, и сопротивление исходного контура, равно:

$$R_0 = \frac{2\left(\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\right)}{2} = r.$$

г) Перейдем теперь к определению сопротивления каркаса куба, составленного из проволочек с одинаковым сопротивлением r (рис. 12.2, *г*).

Если подвести напряжение к точкам A и B, то легко сообразить, что ток в них разветвляется на три равные части, поскольку условия его прохождения по каждой ветви из точки A в точку B идентичны. На проводниках Aa падение напряжения будет одинаковым, поэтому в трех вершинах куба a потенциалы тоже будут одинаковыми и равными φ_a.

Токи, идущие по проводникам Aa, в свою очередь разветвятся на равные части в вершинах куба и пойдут по проводникам ab. В точках b они сливаются и идут через проводники bB к узлу B. Так как проводники ab и токи в них одинаковы, то падение напря-

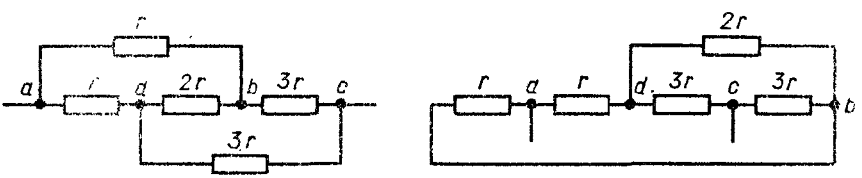

Рис. 12.3

жения на них будет одним и тем же и потенциалы в вершинах куба b будут равны φ_b.

Поскольку потенциалы во всех трех точках a, точно так же как и в точках b, одинаковы. эти точки можно соединить, вытянув каркас куба вдоль диагонали AB. В результате получится простая эквивалентная схема, представляющая комбинацию последовательно и параллельно соединенных резисторов. Сопротивление участка Aa равно $r/3$, участка ab — $r/6$, участка bB — $r/3$. Все три участка соединены между собой последовательно, и их общее сопротивление, а следовательно, и сопротивление каркаса куба, будет равно:

$$R_0 = \frac{r}{3} + \frac{r}{6} + \frac{r}{3} = \frac{5}{6} r.$$

д) В схеме, представленной на рисунке 12.2, *д*, нет ни последовательно, ни параллельно соединенных проводников, нет в ней также и точек с равными потенциалами, поскольку она несимметрична. Для нахождения полного сопротивления цепи здесь нужно использовать общий метод расчета.

Допустим, что к узлу a подходит ток I_0 и разветвляется в нем на токи I_1 и I_2, т. е.

$$I_0 = I_1 + I_2. \qquad (1)$$

Предположим, что в точке b ток I_1 разветвляется на токи I_3 и I_4:

$$I_1 = I_3 + I_4. \qquad (2)$$

В точке d токи I_2 и I_3 сливаются в один ток I_5, который, дойдя до точки c, сливается с током I_4 в ток I_0, т. е.

$$I_5 = I_2 + I_3; \qquad (3)$$

$$I_0 = I_4 + I_5. \qquad (4)$$

Данная схема содержит 4 узла (точки a, b, c и d), и мы получили 4 уравнения токов. Эти уравнения содержат 6 неизвестных величин — все токи, введенные в решение.

Составление второй группы уравнений основано на том, что работа электрических сил по перемещению заряда q из точки a в точку c не зависит от формы пути (пройдет ли заряд q по контуру abc, adc, $abdc$ или $adbc$). Если через R_0 обозначить общее сопротивление цепи, то согласно сказанному должно быть:

для контура abc: $qU_0 = qU_1 + qU_4$,

или иначе: $I_0R_0 = I_1r + I_4 3r$. (5)

Аналогично для контура adc: $I_0R_0 = I_2 3r + I_5 r$, (6)

для контура $abdc$: $I_0R_0 = I_1 r + I_3 2r + I_5 r$, (7)

так как падение напряжения на каждом сопротивлении численно равно работе по перемещению единичного заряда по этому сопротивлению и работы складываются алгебраически.

Составленных уравнений достаточно для определения сопротивления R_0, однако можно записать еще одно уравнение — для перемещения заряда по контуру $adbc$:

$$I_0R_0 = I_2 3r - I_3 2r + I_4 3r. \quad (8)$$

В уравнениях (1) — (8) неизвестными являются все токи (их шесть) и общее сопротивление контура.

Решая относительно R_0 семь любых уравнений из восьми составленных, получим:

$$R_0 = 7/4r.$$

Пример 3. При подключении к гальванометру шунта сопротивлением $R_1 = 100$ Ом стрелка гальванометра отклоняется на всю шкалу при силе тока во внешней цепи $I_1 = 3$ А. При подключении к гальванометру резистора с сопротивлением $R_2 = 300$ Ом шкала прибора становится в четыре раза грубее, чем без добавочного сопротивления и шунта. Какой шунт надо взять, чтобы стрелка отклонялась на всю шкалу при силе тока во внешней цепи, равной $I_2 = 7{,}5$ А?

Решение. В задаче рассматривают три случая подключения к гальванометру разных резисторов: дважды в качестве шунта и один раз как добавочного сопротивления.

При включении шунта сопротивлением R_1 стрелка отклоняется на всю шкалу при силе тока в неразветвленной части цепи I_1. По гальванометру в этом случае проходит допустимый для него ток $I_г$. Обозначим внутреннее сопротивление гальванометра $R_г$, тогда

$$R_1 = \frac{R_г I_г}{I_1 - I_г}. \quad (1)$$

При включении последовательно гальванометру резистора шкала прибора становится в n раз грубее. Ток в гальванометре, а стало быть, и падение напряжения на нем уменьшаются в n раз, и, следовательно, добавочное сопротивление должно удовлетворять условию

$$R_2 = (n - 1)R_г. \quad (2)$$

Чтобы стрелка отклонялась на всю шкалу при силе тока в цепи I_2, параллельно гальванометру нужно подключить резистор с таким сопротивлением R_3, чтобы через гальванометр проходил максимально допустимый ток $I_г$, т. е.

$$R_3 = \frac{R_г I_г}{I_2 - I_г}. \quad (3)$$

Находя из уравнений (2) и (1) $R_г$ и $I_г$ подставляя их в формулу (3), получим:

$$R_3 = \frac{I_1 R_1 R_2}{I_1 R_1 + I_2(R_2 - R_1) + (I_2 - I_1) n R_1}.$$

Подставляя сюда числовые значения, находим:

$$R_3 = 25 \text{ Ом}.$$

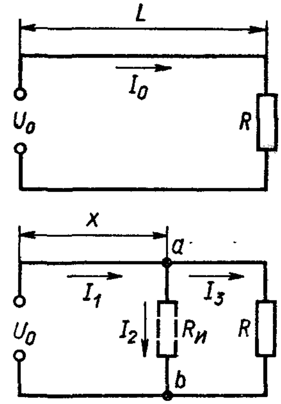

Рис. 12.4

Пример 4. В двухпроводной линии электропередачи, на одном конце которой находится источник постоянного напряжения, а к другому подключен потребитель с сопротивлением R, повредилась изоляция. Вследствие повреждения сила тока через источник возросла в два раза, а через нагрузку упала в восемь раз. На каком расстоянии x от источника произошло повреждение изоляции, если сопротивление единицы длины провода равно ϱ, а длина линии L? Чему равно сопротивление $R_и$ изоляции в месте повреждения линии?

Решение. Сделаем схематический чертеж (рис. 12.4) электрической цепи до и после повреждения изоляции. В случае нарушения изоляции проводников на расстоянии x от источника в месте повреждения начнется утечка зарядов из одного провода в другой. Режим работы цепи будет таким, как если бы в месте повреждения провода оказались соединенными между собой резистором сопротивлением $R_и$. Как видно из чертежа, это сопротивление оказывается включенным параллельно участку aRb. В результате сопротивление участка (вместе с $R_и$) и всей цепи уменьшится, сила тока в неразветвленной части цепи возрастет.

Если до нарушения изоляции в цепи шел ток I_0, а после нарушения на участках, отмеченных на чертеже, идут токи I_1, I_2 и I_3, то

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Чтобы упростить дальнейшие расчеты, эти токи сразу же выразим через ток I_0, используя условия задачи. Нетрудно заметить, что ток в источнике, а следовательно, и в линии до точки повреждения равен $I_1 = 2I_0$, ток через нагрузку $I_3 = I_0/8$, поэтому ток через изоляцию

$$I_2 = I_1 - I_3 = \frac{15}{8} I_0.$$

Допустим, что потребитель находится на расстоянии L от источника и сопротивление одного провода всей линии равно R_0. Предположим, что сопротивление провода от источника до точки a равно R_1, от точки a до потребителя — R_2 и напряжение на клеммах равно U_0.

Тогда согласно закону Ома для неповрежденной линии

$$U_0 = I_0 2R_0 + I_0 R, \tag{1}$$

поскольку общее сопротивление подводящих проводов равно $2R_0$.

Для поврежденной линии

$$U_0 = I_1 2R_1 + I_3 R_{ab}, \qquad (2)$$

где произведение I_3R_{ab} есть падение напряжения на участке aRb (без сопротивления изоляции); R_{ab} — сопротивление этого участка. Как видно из чертежа,

$$R_{ab} = 2(R_0 - R_1) + R. \qquad (3)$$

Для составления уравнения, в которое входило бы искомое сопротивление изоляции, надо рассмотреть отдельно участки aRb и $aR_иb$. Эти участки соединены между собой параллельно, напряжение на них одинаково, поэтому

$$I_2R_и = I_3[2(R_0 - R_1) + R]. \qquad (4)$$

Полученные уравнения нужно представить в развернутом виде, выразив входящие в них сопротивления через длину линии L, расстояние до места повреждения x и сопротивление ϱ единицы длины провода. Нетрудно заметить, что

$$R_0 = \varrho L, \quad R_1 = \varrho x. \qquad (5)$$

Из уравнений (1) — (5) с учетом выражений для сил токов I_1, I_2 и I_3 находим расстояние x от источника тока до места повреждения изоляции и ее сопротивление $R_и$:

$$x = \frac{7}{15}\left(L + \frac{R}{2\varrho}\right); \quad R_и = \frac{8}{225}(2\varrho L + R).$$

Пример 5. Плоский конденсатор с пластинами размером $16 \times \times 16$ см и расстоянием между ними $d = 4$ мм присоединен к полюсам батареи с ЭДС $\mathscr{E} = 250$ В. В пространство между пластинами с постоянной скоростью $v = 3$ мм/с вдвигают стеклянную пластину толщиной 4 мм. Найдите силу тока в цепи. Диэлектрическая проницаемость стекла $\varepsilon = 7$.

Решение. Если увеличивать или уменьшать электроемкость конденсатора, подключенного к источнику постоянного напряжения, то заряд на конденсаторе будет возрастать или уменьшаться вследствие перехода электронов с одной обкладки конденсатора на другую. И в том и в другом случае по соединительным проводам идет ток. Среднюю силу тока можно найти, зная значение начального q_1 и конечного q_2 зарядов на конденсаторе и время t, в течение которого произошло изменение заряда:

$$I = \frac{q_1 - q_2}{t}. \qquad (1)$$

Причины изменения электроемкости могут быть разными: внесение (удаление) диэлектрика между обкладками конденсатора, сближение (раздвигание) пластин, изменение перекрывающейся площади пластин. Во всех случаях принципиальное решение задачи одинаковое: оно основано на использовании формулы (1).

До внесения стеклянной пластины в плоский конденсатор его электроемкость C_1 была равна:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon_0 l^2}{d}, \qquad (2)$$

где l — длина; l^2 — площадь обкладки конденсатора (поскольку она квадратная).

Так как конденсатор подключен к источнику с электродвижущей силой $\mathcal{E}$, на конденсаторе находится заряд

$$q_1 = C_1 \mathcal{E} = \frac{\varepsilon_0 l^2 \mathcal{E}}{d}. \qquad (3)$$

При внесении стеклянной пластины с диэлектрической проницаемостью ε емкость конденсатора увеличивается и становится равной:

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon l^2}{d}, \qquad (2')$$

так как по условию задачи диэлектрик заполняет все пространство между пластинами.

Заряд на конденсаторе при этом окажется равным:

$$q_2 = C_2 \mathcal{E} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon l^2 \mathcal{E}}{d}. \qquad (3')$$

Электрический ток в цепи проходит только в процессе изменения заряда конденсатора, вызванного движением стеклянной пластины, поэтому время этого изменения можно найти, зная скорость движения пластины и расстояние, которое она проходит, перекрывая пластины. Это расстояние равно высоте пластины, и, следовательно,

$$t = \frac{l}{v}. \qquad (4)$$

Решая уравнения (1), (3), (3′) и (4) относительно I и подставляя числовые значения, получим:

$$I = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1) l v \mathcal{E}}{d}; \quad I = 1{,}6 \cdot 10^{-9}\ \text{А}.$$

Пример 6. Найдите заряд на конденсаторе в схеме, изображенной на рисунке 12.5.

Р е ш е н и е. Рассчитывая схемы, содержащие воздушный конденсатор, включенный в цепь постоянного напряжения, необходимо обратить внимание на то, что постоянный ток через конденсатор не проходит и в ветви, где он включен, тока нет. В предложенной схеме ток I_0, иду-

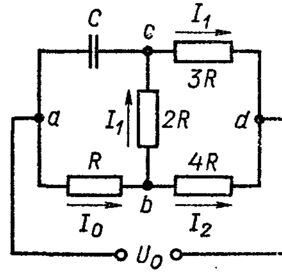

Рис. 12.5

щий от источника напряжения U_0, пойдет по резистору сопротивлением R и разветвится в точке b на токи I_1 и I_2, не заходя в ветвь aCc.

Чтобы определить заряд на конденсаторе, нужно найти разность потенциалов на его обкладках. Она, как видно из чертежа, равна разности потенциалов U_{ac} между точками a и c, равной в свою очередь сумме падений напряжений U_1 и U_2 на резисторах сопротивлением R и $2R$. К нахождению U_{ac} фактически и сводится вся задача.

Заряд на конденсаторе равен:

$$q = CU_{ac}, \tag{1}$$

где

$$U_{ac} = U_1 + U_2.$$

Эту сумму можно найти, используя правила расчета последовательной и параллельной цепи. Как видно из чертежа,

$$U_0 = U_1 + U_2 + U_3, \tag{2}$$

где U_3 — напряжение на резисторе сопротивлением $3R$.

Поскольку необходимо вычислить сумму $U_1 + U_2$ при заданном значении U_0, дальнейшие расчеты сводятся к отысканию падения напряжения U_3 на участке cd.

Применим закон Ома ко всей цепи:

$$I = \frac{U_0}{R + \frac{(2R + 3R)\,4R}{2R + 3R + 4R}} = \frac{9}{29}\,\frac{U_0}{R}. \tag{3}$$

Для параллельных ветвей bcd и $b4Rd$ можно записать:

$$U_2 + U_3 = U_4; \quad I_0 = I_1 + I_2,$$

где

$$U_2 = I_1 2R; \quad U_3 = I_1 3R; \quad U_4 = I_2 4R.$$

Исключив из этих уравнений токи I_1 и I_2, введенные в решение для составления вспомогательных связей, получим одно уравнение

$$U_3 = \frac{I_0 3R 4R}{2R + 3R + 4R} = \frac{4I_0}{3R}, \tag{4}$$

позволяющее вместе с уравнениями (1) — (3) определить заряд на конденсаторе.

Исключая из уравнений (3) и (4) силу тока, находим:

$$U_3 = \frac{12}{29}\,U_0.$$

Согласно уравнению (2) напряжение на конденсаторе равно:

$$U_{ac} = U_1 + U_2 = U_0 - U_3 = \frac{17}{29}\,U_0.$$

Подставляя это выражение в исходную формулу (1), получим:

$$q = \frac{17}{29} CU_0.$$

Пример 7. Плоский конденсатор емкостью C заполнен проводящим диэлектриком с проницаемостью ε и удельным сопротивлением ϱ. Расстояние между пластинами равно d. Через резистор сопротивлением R конденсатор подключен к источнику с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r. Определите напряженность электрического поля в диэлектрике.

Р е ш е н и е. Материалы, которые являются обычно диэлектриками, в той или иной степени обладают электропроводностью. Если к источнику постоянного тока подключить конденсатор, заполненный проводящим диэлектриком, в цепи пойдет электрический ток (ток утечки). Между пластинами конденсатора будет существовать электрическое поле, напряженность которого E можно определить, зная напряжение U_C на обкладках конденсатора и расстояние между ними. Так как конденсатор является проводником, то это напряжение не равно ЭДС подключенного источника: чтобы его найти, нужно знать сопротивление конденсатора.

Если плоский конденсатор с площадью обкладок S и расстоянием между ними d заполнен проводящим диэлектриком с проницаемостью ε и удельным сопротивлением ϱ, то емкость и сопротивление конденсатора равны соответственно:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{S}{d} \quad \text{и} \quad R_C = \frac{\varrho d}{S}.$$

Эти формулы можно объединить в одну, исключив из них отношение S/d:

$$R_C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \varrho}{C}. \qquad (1)$$

Зная сопротивление конденсатора, можно найти напряжение U_C на конденсаторе при подключении его через резистор сопротивлением R к аккумулятору. Если R включить во внутреннее сопротивление источника, то напряжение на конденсаторе можно рассматривать как напряжение на зажимах источника с внутренним сопротивлением $R + r$ и согласно формуле (12.13) записать:

$$U_C = \frac{\mathcal{E} R_C}{R_C + R + r}. \qquad (2)$$

Электрическое поле в конденсаторе считается однородным, поэтому

$$E = \frac{U_C}{d}. \qquad (3)$$

Решая уравнения (1) — (3) относительно напряженности поля, находим:

$$E = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \varrho \mathscr{E}}{[\varepsilon_0 \varepsilon \varrho + (R + r) C] d}.$$

Пример 8. Амперметр и вольтметр, подключенные к аккумулятору последовательно, показывают соответственно $I_1 = 0{,}1$ А и $U_1 = 10$ В. Соединенные параллельно и подключенные к тому же источнику, они показывают соответственно $I_2 = 1$ А и $U_2 = 1$ В. Определите ток короткого замыкания.

Решение. В задаче рассматривают два режима работы аккумулятора. Первый, когда он замкнут двумя приборами, соединенными последовательно, при втором режиме приборы соединены параллельно. Зная показания приборов, нужно определить ЭДС $\mathscr{E}$ и внутреннее сопротивление r источника, после чего, разделив одно на другое, найти ток короткого замыкания.

Предположим, что амперметр и вольтметр обладают внутренними сопротивлениями R_A и R_V, тогда при их последовательном соединении с аккумулятором все величины, характеризующие цепь и режим ее работы, будут связаны между собой формулой закона Ома для полной цепи:

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{R_A + R_V + r}. \tag{1}$$

Кроме того, поскольку приборы включены последовательно и ток через вольтметр равен току через амперметр, их показания будут связаны формулой закона Ома для участка цепи:

$$I_1 = \frac{U_1}{R_V}. \tag{2}$$

При параллельном соединении приборов показание вольтметра равно напряжению на зажимах источника, поэтому согласно формуле (12.13)

$$U_2 = \left(\mathscr{E} \frac{R_A R_V}{R_A + R_V} \right) \Big/ \left(\frac{R_A R_V}{R_A + R_V} + r \right). \tag{3}$$

С другой стороны, учитывая, что напряжение на амперметре равно напряжению на вольтметре, по закону Ома для участка цепи имеем:

$$I_2 = \frac{U_2}{R_A}. \tag{4}$$

Ток короткого замыкания

$$I_{\text{к.з}} = \frac{\mathscr{E}}{r}. \tag{5}$$

Уравнения (1) — (5) содержат пять неизвестных величин: R_A, R_V, $\mathcal{E}$, r и $I_{\text{к.з}}$.

Проводить вычисления до конца в общем виде в данной задаче нецелесообразно, так как ответ получится очень громоздким. Поэтому, прежде чем начинать алгебраические выкладки и исключать из уравнений неизвестные, следует обратить внимание на то, что формулы (2) и (4) позволяют сразу же найти сопротивление приборов, и тем самым считать их известными при решении оставшихся уравнений (1), (3), (5).

Подставляя в уравнения (2) и (4) числовые значения, получим:
$R_V = 100$ Ом; $R_A = 1$ Ом. Далее находим:

$$I_{\text{к.з}} = \frac{(R_V^2 + R_A R_V + R_A^2) I_1 U_2}{R_A R_V [I_1 (R_A + R_V) - U_2]}; \quad I_{\text{к.з}} \approx 1{,}01 \text{ А}.$$

Пример 9. В конце зарядки батареи аккумуляторов при силе тока $I_1 = 3$ А присоединенный к ней вольтметр показывал напряжение $U_1 = 4{,}25$ В. В начале разрядки батареи при силе тока $I_2 = 4$ А тот же вольтметр показывал напряжение $U_2 = 3{,}9$ В. Определите ЭДС и внутреннее сопротивление батареи. Током, проходящим по вольтметру, можно пренебречь.

Решение. При зарядке аккумулятора его положительный полюс соединяется с положительным полюсом генератора, отрицательный — с отрицательным. ЭДС генератора больше ЭДС аккумулятора, и ток через батарею идет в направлении, противоположном направлению тока, который батарея дает при разрядке.

Если ЭДС батареи $\mathcal{E}$, внутреннее сопротивление r и сила зарядного тока I_1, то вольтметр, подключенный к зажимам батареи, показывает напряжение

$$U_1 = \mathcal{E} + I_1 r \quad \text{(см. формулу 12.15').} \tag{1}$$

Если эта же батарея подключена после зарядки к такому резистору, что при силе тока в цепи I_2 вольтметр показывает на ее зажимах напряжение U_2, то

$$U_2 = \mathcal{E} - I_2 r. \tag{2}$$

В отличие от предыдущего случая здесь источник расходует свою энергию, ток идет в сторону ЭДС, поэтому перед I_2 стоит знак «минус».

Из уравнений (1), (2) с учетом числовых значений сил токов и напряжений находим ЭДС и внутреннее сопротивление батареи:

$$\mathcal{E} = \frac{I_1 U_2 + I_2 U_1}{I_1 + I_2}; \quad \mathcal{E} = 4{,}1 \text{ В}; \quad r = \frac{U_1 - U_2}{I_1 + I_2}; \ r = 0{,}05 \text{ Ом}.$$

Пример 10. Найдите разность потенциалов между точками A и C, B и D в схеме, изображенной на рисунке 12.6.

Решение. В задаче дано последовательное соединение четырех аккумуляторов и требуется определить напряжение на участ

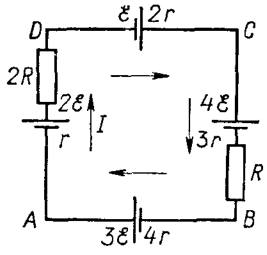

Рис. 12.6

ках, содержащих источники ЭДС. Решение задач этого типа основано на использовании закона Ома для участка цепи, содержащего источники ЭДС. Его начинают с нахождения общей ЭДС контура и силы тока в нем. Как видно из чертежа, источник с ЭДС $4\mathscr{E}$ включен навстречу остальным источникам, у которых суммарная ЭДС больше $4\mathscr{E}$. Общая, или, как ее называют, действующая, ЭДС контура в этом случае равна:

$$\mathscr{E}_0 = \mathscr{E} + 2\mathscr{E} + 3\mathscr{E} - 4\mathscr{E} = 2\mathscr{E},$$

и в цепи в направлении, указанном на чертеже, течет ток I:

$$I = \frac{2\mathscr{E}}{3R + 10r}. \tag{1}$$

Напряжение на участке, содержащем ЭДС, в общем случае определяется по формуле (12.15). Между точками A и C его можно найти двумя способами: рассматривая или участок ABC, или участок ADC.

ЭДС участка ABC равна $\mathscr{E}_{ABC} = 4\mathscr{E} - 3\mathscr{E} = \mathscr{E}$, сопротивление $R_{ABC} = R + 7r$, и, следовательно, напряжение на этом участке равно:

$$U_{AC} = \mathscr{E} + I(R + 7r). \tag{2}$$

Знак «плюс» здесь стоит потому, что ток по участку идет не в том направлении, в каком его давал бы источник ЭДС этого участка (участок «заряжается»).

Заменяя в уравнении (2) I его выражением (1), после несложных преобразований получаем:

$$U_{AC} = \frac{5R + 24r}{3R + 10r}\mathscr{E}.$$

Это же выражение можно получить иначе. ЭДС участка ADC равна $\mathscr{E}_{ADC} = 3\mathscr{E}$, его сопротивление $R_{ADC} = 2R + 3r$, направление тока совпадает с направлением действия ЭДС участка (участок «разряжается»), следовательно,

$$U_{AC} = 3\mathscr{E} - I(2R + 3r) = \frac{5R + 24r}{3R + 10r}\mathscr{E},$$

что совпадает с предыдущим результатом.

Аналогично находим напряжение между точками B и D. ЭДС на участке BAD и его сопротивление равны соответственно $5\mathscr{E}$ и $2R + 5r$, ток по участку идет в направлении действия ЭДС, поэтому

$$U_{BD} = 5\mathscr{E} - I(2R + 5r) = \frac{11R + 40r}{3R + 10r}\mathscr{E}.$$

На участке BCD ЭДС равна $3\mathcal{E}$, сопротивление $R+5r$, ток по участку идет против направления действия ЭДС, следовательно,

$$U_{BD} = 3\mathcal{E} + I(R+5r) = \frac{11R+40r}{3R+10r}\,\mathcal{E},$$

что совпадает с напряжением, рассчитанным по контуру BAD.

Пример 11. Генератор постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 12$ В и внутренним сопротивлением $r_1 = 0{,}2$ Ом заряжает батарею аккумуляторов с ЭДС $\mathcal{E}_2 = 10$ В и внутренним сопротивлением $r_2 = 0{,}6$ Ом. Параллельно батарее включена лампочка сопротивлением $R = 3$ Ом. Определите силу тока в батарее аккумуляторов и лампочке.

Решение. В данном примере источники с разными ЭДС и лампочка соединены параллельно. Расчет такой цепи может быть основан на том очевидном факте, что напряжение на каждом элементе цепи одинаково и его можно выразить через ЭДС, сопротивления и токи участков (с помощью формулы 12.15′).

Учитывая, что в процессе зарядки аккумулятора его полюса соединяются с одноименными полюсами генератора, делаем схематический чертеж (рис. 12.7) и указываем на нем все элементы цепи и их характеристики.

Расставляем токи I_1, I_2, I в каждой ветви. Если нет полной уверенности в правильности выбора направления тока, ему можно приписывать направление тока, даваемого источником ЭДС данной ветви. Если при этом окажется, что направление тока выбрано правильно, то при вычислении значение тока получится положительным, если нет — отрицательным.

В нашем примере направление токов очевидно, поскольку аккумулятор заряжается, и уравнение токов для любого из двух узлов схемы дает:

$$I_1 = I_2 + I. \qquad (1)$$

Если пренебречь сопротивлением подводящих проводов, то напряжения на зажимах генератора $U_{г}$, батареи $U_{б}$ и лампочки $U_{л}$ можно считать одинаковыми:

$$U_{г} = U_{б}; \quad U_{г} = U_{л}.$$

В то же время, учитывая направление токов в параллельных ветвях, согласно формуле (12.15′) будем иметь:

$$U_{г} = \mathcal{E}_1 - I_1 r_1; \quad U_{б} = \mathcal{E}_2 + I_2 r_2; \quad U_{л} = IR,$$

поскольку мы предположили, что ток через аккумулятор идет противоположно направлению действия ЭДС.

Приравнивая попарно выражения, стоящие в правой части этих уравнений, получим:

$$\mathcal{E}_1 - I_1 r_1 = \mathcal{E}_2 + I_2 r_2, \qquad (2)$$

$$\mathcal{E}_1 - I_1 r_1 = IR. \qquad (3)$$

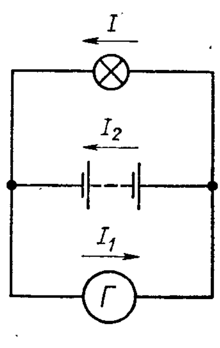

Рис. 12.7

Задачи, аналогичные данной, встречаются сравнительно часто, и уравнения (1) — (3) носят поэтому довольно общий характер. Из них можно определить любые три величины, если остальные заданы. Решая эти уравнения относительно искомых токов и подставляя числовые значения, получаем:

$$I_2 = \frac{(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2) R - \mathscr{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + (r_1 + r_2) R}; \ I_2 \approx 1{,}6 \text{ А};$$

$$I = \frac{\mathscr{E}_1 r_2 + \mathscr{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + (r_1 + r_2) R}; \ I \approx 3{,}6 \text{ А}.$$

Пример 12. Для получения в цепи силы тока $I_1 = 8$ А было взято минимальное количество одинаковых аккумуляторов, соединенных в смешанную батарею. Какой ток можно получить в цепи, соединив эти аккумуляторы последовательно? ЭДС одного аккумулятора $\mathscr{E}_1 = 2$ В, внутреннее сопротивление $r_1 = 0{,}2$ Ом.

Решение. Если n аккумуляторов соединить последовательно и замкнуть их на резистор сопротивлением R, то сила тока в цепи будет равна:

$$I = \frac{n \mathscr{E}_1}{R + n r_1}. \tag{1}$$

Силу тока I можно найти, если будет известно число аккумуляторов в батарее. Для нахождения n в задаче дано дополнительное условие — при смешанном соединении этих аккумуляторов в том же резисторе можно получить максимальный ток I_1.

Если из n одинаковых аккумуляторов с ЭДС $\mathscr{E}_1$ и внутренним сопротивлением r_1 составить m последовательно соединенных групп по k элементов в каждой группе, то через резистор будет идти ток

$$I_1 = \frac{mn \mathscr{E}_1}{nR + m^2 r_1},$$

и он будет наибольшим в том случае, когда $m^2 r_1 = nR$ (см. п. 5 введения к разделу).

Найдя из последнего равенства m и подставив его выражение в формулу закона Ома, для максимальной силы тока при смешанном соединении источников получим:

$$I_1 = \sqrt{\frac{n}{4Rr_1}}\, \mathscr{E}_1. \tag{2}$$

Решая уравнения (1), (2) относительно искомого тока, получаем:

$$I = \frac{4 I_1^2 \mathscr{E}_1 r_1}{\mathscr{E}_1^2 + 4 I_1^2 r_1^2}; \quad I \approx 7{,}2 \text{ А}.$$

Пример 13. Напряжение на шинах электростанции равно $U_0 = 10$ кВ, расстояние до потребителя $l = 500$ км. Станция должна передать потребителю мощность $P = 100$ кВт. Потери напряжения в проводах не должны превышать $z = 4\%$. Вычислите массу медных проводов на участке электростанция — потребитель. Плотность и удельное сопротивление меди равны соответственно $D = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м³ и $\varrho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м. Какой должна быть масса проводов, если напряжение увеличить в два раза?

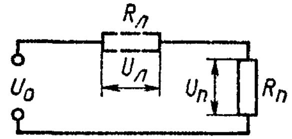

Рис. 12.8

Решение. Массу провода m_1 можно определить, зная материал провода, его сопротивление R и длину l линии. Действительно, если плотность материала провода равна D, удельное сопротивление ϱ, то

$$m_1 = D2lS, \quad R = \varrho \frac{2l}{S},$$

так как длина провода вдвое больше расстояния l. Исключив из этих формул площадь S сечения, получим:

$$m_1 = \frac{4D\varrho l^2}{R}. \tag{1}$$

В задаче все величины, входящие в равенство (1), кроме R, известны, поэтому дальнейшее решение сводится к нахождению сопротивления проводов.

Делаем чертеж (рис. 12.8), на котором отмечаем сопротивление $R_п$ потребителя, сопротивление $R_л$ проводов линии электропередачи, напряжения на этих резисторах $U_п$ и $U_л$, а также напряжение U_0 на шинах электростанции. Поскольку оба резистора соединены между собой последовательно, то

$$U_0 = U_п + U_л. \tag{2}$$

Используя закон Ома для участка цепи и условие, что потери напряжения не должны превышать $z\%$, для напряжения на проводах можно записать:

$$U_л = IR \quad \text{и} \quad U_л = \frac{z}{100\%} U_0. \tag{3}$$

Еще одним вспомогательным уравнением является формула мощности

$$P = IU_п. \tag{4}$$

Найдя R из уравнений (2) — (4) и подставив его выражение в (1), с учетом числовых значений будем иметь:

$$m_1 = \frac{4D\varrho l^2 P}{\left(1 - \frac{z}{100\%}\right) U_0^2}; \quad m_1 \approx 3{,}94 \cdot 10^6 \text{ кг}.$$

Из полученного выражения видно, что масса проводов обратно пропорциональна квадрату напряжения на шинах электростанции, поэтому при увеличении напряжения в 2 раза массу проводов линии передачи можно уменьшить в 4 раза, и, следовательно,

$$m_2 = m_1/4 \approx 9{,}85 \cdot 10^5 \text{ кг}.$$

Пример 14. Электроплитка, рассчитанная на напряжение U_0, при включении в сеть с этим напряжением потребляет мощность $P_1 = 250$ Вт. Какую мощность будут потреблять две такие плитки, включенные в сеть последовательно (параллельно), если номинальная мощность плитки $P_0 = 300$ Вт? Изменением сопротивления плиток вследствие нагревания пренебречь.

Решение. Если электроплитку, рассчитанную на напряжение U_0, включить в сеть с таким напряжением, то часть напряжения падает на внутреннем сопротивлении источника и подводящих проводах. Напряжение на самой плитке окажется меньше расчетного, и потребляемая ею мощность P_1 будет меньше номинальной: $P_1 < P_0$.

При включении в сеть двух плиток, соединенных последовательно или параллельно, суммарная мощность, потребляемая плитками, будет различной. В обоих случаях она не равна $2P_1$, поскольку из-за изменения внешнего сопротивления меняется напряжение, подводимое непосредственно к плиткам. Чтобы найти мощность, потребляемую двумя плитками при разных способах включения, нужно рассмотреть режимы работы цепи при различных нагрузках.

Если сопротивление подводящих проводов отнести к внутреннему сопротивлению источника и рассматривать две плитки, соединенные последовательно, как резистор сопротивлением $2R$, подключенный к зажимам источника, то согласно последней формуле (12.22) потребляемая ими мощность равна:

$$P_{\text{пс}} = \frac{U_0 2R}{(2R + r)^2}. \tag{1}$$

где r — сопротивление подводящих проводов и источника тока.

При параллельном соединении плиток их общее сопротивление становится равным $R/2$, и выделяемая в них суммарная мощность равна:

$$P_{\text{пр}} = \frac{U_0 2R}{(R + 2r)^2}. \tag{2}$$

Как видно из уравнений (1), (2), для нахождения $P_{\text{пс}}$ и $P_{\text{пр}}$ необходимо знать сопротивление плитки и сопротивление остальной цепи. Эти сопротивления можно определить, зная номинальную P_0 и фактически потребляемую мощность P_1 при включении одной плитки.

Если бы на плитку было подано расчетное напряжение U_0, она потребляла бы номинальную мощность

$$P_0 = U_0^2/R. \tag{3}$$

Если же напряжение U_0 подается на резистор сопротивлением $R+r$, то в плитке будет выделяться мощность

$$P_1 = \frac{U_0^2 R}{(R+r)^2}. \tag{4}$$

Исключая из уравнений (1) — (4) сопротивления и подставляя числовые значения P_1 и P_0, находим:

$$P_{пс} = 2P_0^2 P_1/(P_0 + \sqrt{P_0 P_1})^2; \quad P_{пс} \approx 136 \text{ Вт};$$

$$P_{пр} = 2P_0^2 P_1/(P_0 - \sqrt{P_0 P_1})^2; \quad P_{пр} \approx 420 \text{ Вт}.$$

Пример 15. Электропечь должна за время $\tau = 10$ мин выпаривать воду массой $m = 1$ кг, взятую при температуре $t_1 = 20°C$. Какой должна быть длина нихромовой проволоки сечением $S = 0{,}5$ мм^2, используемой в качестве нагревателя, если печь предназначена для напряжения $U = 120$ В и ее КПД равен $\eta = 80\%$? Удельное сопротивление нихрома $\varrho = 1{,}1 \cdot 10^{-6}$ Ом · м, удельные теплоемкость и теплота парообразования воды равны соответственно $c = 4{,}2$ кДж/(кг · К) и $r = 2{,}26 \cdot 10^3$ кДж/кг.

Решение. Из условия задачи следует, что для расчета теплового действия тока в данном примере удобно применить формулу (12.25). Если спираль электропечи имеет сопротивление R и включается в сеть с напряжением U, то за время τ в спирали выделяется количество теплоты $U^2\tau/R$ и часть (η) этой энергии идет на нагревание воды:

$$Q = \eta \frac{U^2}{R} \tau. \tag{1}$$

Температура спирали при этом не изменяется.

Чтобы нагреть воду массой m от температуры t_1 до температуры $t_2 = 100°C$ и затем обратить ее в пар, необходимо затратить количество теплоты, равное

$$Q = cm(t_2 - t_1) + rm. \tag{2}$$

При изготовлении нагревателя сопротивлением R из проволоки сечением S длина ее l должна быть такой, чтобы

$$R = \varrho \frac{l}{S}. \tag{3}$$

Подставляя в исходное уравнение вместо Q и R их выражения (2) и (3), получим:

$$m[c(t_2 - t_1) + r] = \eta \frac{U^2 S \tau}{\varrho l}.$$

Выразив отсюда длину проволоки и подставив числовые значения, найдем:

$$l=\frac{\eta U^2 S\tau}{\varrho m[c(t_2-t_1)+r]}; \quad l\approx 1{,}2 \text{ м}.$$

Пример 16. В цепь, состоящую из медного провода сечением $S=5$ мм^2, надо включить свинцовый предохранитель. Какое сечение должен иметь предохранитель, чтобы при нагревании провода более чем на $\Delta t=10°C$ он расплавился? Начальная температура свинца $t=27°C$, температура плавления свинца $t_{пл}=327°C$.

Решение. Плавкие предохранители включают в цепь последовательно, и ток в них идет такой же, как и в проводах цепи. Размеры предохранителя можно подобрать так, что он будет перегорать, как только температура проводов превысит допустимую.

Основным расчетным соотношением, позволяющим вычислить сечение предохранителя, служит уравнение закона Джоуля — Ленца. В данной задаче им нужно воспользоваться дважды: применить уравнение к медному проводу и свинцовому предохранителю. Поскольку в проводе и предохранителе сила тока одна и та же, для расчета теплового действия тока удобнее взять формулу (12.26).

Допустим, что по проводам идет ток I, сопротивление медного провода R_1 и за время τ он нагревается на Δt_1, тогда на нагревание проводов будет израсходована электрическая энергия

$$Q_1=I^2R_1\tau.$$

Внутренняя энергия проводов возрастет при этом на величину

$$Q_1'=c_1m_1\Delta t_1,$$

где c_1 — удельная теплоемкость меди; m_1 — масса проводов. Если пренебречь потерями энергии на нагревание окружающей среды, то можно считать, что $Q_1=Q_1'$, т. е.

$$c_1m_1\Delta t_1=I^2R_1\tau. \tag{1}$$

Обозначим плотность меди D_1, удельное сопротивление ϱ_1, длину провода l_1 и сечение S_1, тогда масса провода и его сопротивление будут равны соответственно:

$$m_1=D_1S_1l_1; \quad R_1=\varrho_1\frac{l_1}{S_1}.$$

Подставляя эти выражения в формулу закона Джоуля — Ленца, после сокращения на l_1 получим:

$$c_1D_1S_1\Delta t_1=I^2\frac{\varrho_1\tau}{S_1}. \tag{1'}$$

Рассмотрим теперь предохранитель, обладающий массой m_2 и сопротивлением R_2. По предохранителю идет такой же ток I, что и по проводам, и за то же время τ в нем выделится количество теплоты

$$Q_2 = I^2 R_2 \tau,$$

которое идет на нагревание и плавление предохранителя:

$$Q_2' = c_2 m_2 \Delta t_2 + \lambda m_2.$$

Здесь c_2 и λ — удельная теплоемкость и удельная теплота плавления свинца; $\Delta t_2 = t_{пл} - t$ — разность конечной и начальной температур свинца. Так как $Q_2 = Q_2'$, то

$$m_2 (c_2 \Delta t_2 + \lambda) = I^2 R_2 \tau. \qquad (2)$$

Обозначим плотность свинца D_2, удельное сопротивление ϱ_2, длину предохранителя l_2 и сечение S_2, тогда масса и сопротивление предохранителя равны соответственно:

$$m_2 = D_2 S_2 l_2; \quad R_2 = \varrho_2 \frac{l_2}{S_2}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (2), получим:

$$D_2 S_2 (c_2 \Delta t_2 + \lambda) = I^2 \frac{\varrho_2 \tau}{S_2}. \qquad (2')$$

Разделив уравнение (2′) на (1′), после несложных преобразований и подстановки числовых значений найдем:

$$S_2 = S_1 \sqrt{\frac{D_1 c_1 \varrho_2 \Delta t_1}{D_2 \varrho_1 (c_2 \Delta t_2 + \lambda)}}; \quad S_2 \approx 3{,}9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 = 3{,}9 \text{ мм}^2.$$

Пример 17. При включении электромотора в сеть с напряжением $U = 120$ В напряжение на клеммах распределительного щита падает на $z = 20\%$. Сопротивление подводящих проводов вместе с сопротивлением генератора составляет $R = 14$ Ом. Какую полезную мощность развивает электромотор, если его КПД $\eta = 0{,}65$?

Решение. При работе электромотора, включенного в сеть постоянного тока, электрическая энергия превращается в механическую и внутреннюю энергию. С внутренней энергией связано нагревание проводников, составляющих электрическую цепь, с механической — вращение якоря электромотора.

Основное уравнение, характеризующее процесс перераспределения энергии,— уравнение закона сохранения и превращения энергии (12.26), отнесенной к единице времени.

Предположим, что мотор подключен непосредственно к распределительному щиту и сопротивление соединительных проводов в сумме с сопротивлением его обмотки мало по сравнению с сопротивлением R остальной линии. Если при включенном моторе по цепи идет ток I, то согласно закону сохранения энергии за счет мощности IU, развиваемой источником, происходит нагревание проводов (I^2R) и развивается механическая мощность ($N_{мех}$):

$$IU = I^2 R + N_{мех}. \qquad (1)$$

За счет механической мощности преодолевается трение и совершается полезная работа. Если КПД электромотора η, то полезная мощность равна:

$$N_п = \eta N_{мех}. \qquad (2)$$

По условию задачи напряжение на клеммах распределительного щита при включении мотора падает на z. Если рассматривать эти клеммы как зажимы источника, а всю проводку как его внутреннее сопротивление, то можно считать, что

$$U_з = \frac{z}{100\%} U, \qquad (3)$$

$$U_з = U - IR. \qquad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) найдем силу тока I в цепи и, подставив ее в формулу (1), с учетом выражения (2) после несложных преобразований и вычислений получим:

$$N_п = \frac{\eta z(100\% - z)U^2}{(100\%)^2 R}; \quad N_п \approx 110 \text{ Вт}.$$

Пример 18. При серебрении пластинки через раствор нитрата серебра *проходит ток плотностью* $j = 2$ кА/м^2. С какой средней скоростью растет толщина серебряного покрытия пластинки? Относительная атомная масса, валентность и плотность серебра равны соответственно $A_r = 108$, $n = 1$, $D = 1{,}05 \cdot 10^4$ кг/м^3.

Решение. При прохождении электрического тока через раствор нитрата серебра за время t на катоде откладывается серебро массой

$$m = \frac{M}{nF} It,$$

где F — постоянная Фарадея; I — сила тока в растворе; M — молярная масса серебра ($M = 0{,}108$ кг/моль).

Если слой серебра плотностью D осаждается равномерно по всей поверхности пластинки площадью S и толщина слоя по обе стороны пластинки h, то масса выделившегося серебра равна:

$$m = DSh.$$

С учетом этого формулу закона Фарадея можно переписать так:

$$DSh = \frac{M}{nF} It,$$

откуда

$$D\frac{h}{t} = \frac{M}{nF}\frac{I}{S}, \quad \text{или} \quad Dv = \frac{MI}{nF} j,$$

где $h/t = v$ — скорость роста толщины покрытия; j — плотность тока в растворе электролита. Последняя формула является основным расчетным соотношением в данной задаче. Из нее для средней скорости роста толщины покрытия получаем:

$$v = \frac{Mj}{nFD},$$

откуда после подстановки числовых значений будем иметь:

$$v = 2{,}5 \cdot 10^{-7}\ \text{м/с} = 0{,}25\ \text{мкм/с}.$$

Пример 19. Сколько электроэнергии нужно затратить для получения из подкисленной воды водорода, имеющего при температуре $T = 300$ К и давлении $p = 100$ кПа объем $V = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$м^3, если электролиз ведется при напряжении $U = 5$ В, а КПД установки равен $\eta = 0{,}75$?

Решение. Согласно закону Фарадея масса m водорода, выделившегося при электролизе подкисленной воды при КПД установки η, равна:

$$m = \eta \frac{M}{2nF} q,$$

где M и n — молярная масса и валентность водорода; q — заряд, прошедший через подкисленную воду.

Если при электролизе на электроды подается напряжение U и их поляризацией можно пренебречь (ЭДС поляризации очень мала), то для получения газа массой m необходимо затратить электроэнергию, равную:

$$W = qU.$$

Учитывая это, формулу закона Фарадея можно представить в виде:

$$m = \eta \frac{M}{2nF} \frac{W}{U}. \qquad (1)$$

Массу водорода, полученного при электролизе, можно выразить из уравнения Менделеева — Клапейрона через параметры состояния газа:

$$pV = \frac{m}{M} RT, \qquad (2)$$

где M — молярная масса водорода. Уравнения (1) и (2) содержат две неизвестные величины: массу водорода и затраченную энергию, которую нам требуется определить.

Исключая из этих уравнений массу и подставляя числовые значения, находим:

$$W = \frac{2pVUnF}{\eta RT}; \quad W \approx 134\ \text{кДж}.$$