Мощность, выделяемая на активном сопротивлении и, следовательно, во всей внешней цепи, равна:

$$P = 0{,}5 I_m U_m = 0{,}5 I_m^2 R, \tag{13.24}$$

где U_m — амплитуда напряжения на резисторе.

Силу постоянного тока, при которой в цепи с активным сопротивлением выделяется та же мощность, что и при переменном токе, называют действующим значением данного переменного тока. Значение постоянного напряжения, соответствующего действующему значению тока, называют действующим значением напряжения. В случае синусоидального тока

$$I_д = I_m/\sqrt{2}, \ U_д = U_m/\sqrt{2}. \tag{13.25}$$

13. Коэффициент трансформации равен:

$$k = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2},$$

где n_1 — число витков в первичной обмотке трансформатора; n_2 — во вторичной; $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ — ЭДС самоиндукции и индукции, возникающие соответственно в первичной и вторичной обмотках.

Если падение напряжения в первичной цепи трансформатора ничтожно мало по сравнению с напряжением U_1, подаваемым на трансформатор, с достаточной степенью точности можно считать, что $\mathcal{E}_1 = U_1$. При этом же условии для вторичной цепи $\mathcal{E}_2 = U_2$ и, следовательно,

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{U_1}{U_2}. \tag{13.26}$$

При большой силе тока во вторичной цепи падением напряжения на вторичной обмотке пренебречь нельзя. В этом случае $\mathcal{E}_2 = U_2 + I_2 r_2$ и

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{U_1}{U_2 + I_2 r_2},$$

где I_2 — сила тока во вторичной цепи; r_2 — ее сопротивление.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

1. Расчетные задачи по элементарному курсу электромагнетизма можно разделить на три основные группы: а) задачи о силовом действии однородного магнитного поля на проводники с током и заряженные частицы; б) задачи на закон электромагнитной индукции и в) задачи на закон сохранения и превращения энергии в применении к процессам, протекающим при работе электрических машин. Многие из этих задач не требуют применения высшей математики и решаются сравнительно просто.

2. Задачи расчетного характера о силах, действующих на про-

водники с током в однородном магнитном поле, удобно решать по следующей схеме:

а) Сделать схематический чертеж, на котором указать контур с током и направление линий магнитной индукции поля. Отметить углы между направлением вектора индукции и отдельными элементами контура, если последний состоит из нескольких прямых проводников.

б) Используя правило левой руки, определить направление сил, действующих со стороны поля на каждый элемент контура, и проставить векторы этих сил на чертеже.

в) В простейших случаях задача состоит в том, чтобы найти одну из величин, входящих в выражение для сил, действующих на отдельные проводники контура, или вращающих моментов, создаваемых этими силами, зная остальные величины. Дальнейшее решение сводится к тому, чтобы записать уравнение (13.1) или (13.2) и выразить из него искомую величину через заданные.

Если в задаче рассматривают равновесие проводника или контура с током в магнитном поле, то, помимо силы Ампера, нужно указать и все остальные силы, приложенные к проводнику, и записать условие его равновесия $\Sigma \vec{F} = 0$ (или $\Sigma M = 0$ — для рамки с током). Затем с помощью формул (13.1) и (13.2) следует расшифровать значение сил (моментов), входящих в уравнение равновесия, поставить в него вместо F (M) их выражения. В результате получается окончательное уравнение для определения искомой величины.

3. Особое место в задачах первой группы занимают задачи о движении заряженных частиц в электрическом и магнитном полях. Их решение в большинстве случаев основано на составлении основного уравнения динамики материальной точки с учетом сил, действующих на заряженную частицу со стороны магнитного и электрического полей.

Схема решения этих задач во многом сходна с предыдущей.

а) Нужно сделать чертеж, указать на нем линии индукции магнитного поля и линии напряженности электрического поля, проставить вектор начальной скорости частицы и отметить знак ее заряда.

б) Если скорость частицы направлена под углом к линии индукции магнитного поля, ее следует спроецировать на две оси, одна из которых должна быть направлена перпендикулярно вектору $\vec{B}$, вторая — параллельно ему.

в) Изобразить силы, действующие на заряженную частицу. Обычно во всех задачах, где нет специальных оговорок, действие силы тяжести на элементарные частицы не учитывают, поскольку эта сила ничтожно мала по сравнению с силами электромагнитного поля. При нахождении направления силы Лоренца следует обратить особое внимание на знак заряда частицы, так как в одном случае нужно воспользоваться правилом левой руки, в другом — правой. Очень удобно силу Лоренца определять по направлению тока и пользоваться только правилом левой руки. Если происходит движение положительно заряженных частиц, направление тока совпадает с направлением их скорости, если движутся отрицательные частицы, ток идет в сторону, противоположную их движению.

г) Указав силы, нужно попытаться определить вид траектории частицы. Иногда это удается сделать сравнительно просто, иногда нахождение вида траектории представляет основное содержание задачи.

Силы, действующие на заряженную частицу, следует спроецировать на оси, направленные вдоль линий индукции магнитного поля и перпендикулярно им. Затем необходимо составить основное уравнение динамики материальной точки для проекций на каждую ось.

Записав уравнения динамики, нужно подставить в них выражения сил, используя для этого формулы электростатики и формулу силы Лоренца. В большинстве задач после такой подстановки получаются уравнения, из которых искомую величину определяют непосредственно, в ряде случаев к уравнениям динамики приходится добавлять формулы кинематики.

4. Решая задачи на закон электромагнитной индукции, удобно пользоваться следующими рекомендациями.

а) Анализируя условие задачи, необходимо прежде всего установить причины изменения магнитного потока, связанного с контуром, и определить, какая из величин B, S или α, входящих в выражение для Φ, изменяется с течением времени. После этого нужно записать основное расчетное соотношение (13.10) или (13.10′). Если в задаче рассматривается поступательное движение прямого проводника, то ЭДС индукции определяют по формуле (13.11), вытекающей из закона электромагнитной индукции.

б) Затем выражение для Φ надо представить в развернутом виде. Для этого выбирают два момента времени t_1 и t_2 и для каждого из них определяют потоки Φ_1 и Φ_2, связанные с данным контуром. Изменение магнитного потока за время $\Delta t = t_2 - t_1$ в зависимости от условия задачи будет равно или $\Delta\Phi = (B_2 - B_1)\, S \cos\alpha$, если изменяется индукция магнитного поля, в котором находится контур, или $\Delta\Phi = BS\,(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)$, если изменяется положение рамки в поле, или, наконец, $\Delta\Phi = B\Delta S\cos\alpha$, где ΔS — изменение площади контура, описанного в пространстве движущимся проводником.

в) Далее надо подставить выражение для $\Delta\Phi$ в исходную формулу закона электромагнитной индукции и, записав дополнительные условия, решить полученные уравнения совместно относительно искомой величины. Наибольшие затруднения возникают обычно при расчете электрических цепей, содержащих аккумуляторы, когда на одном из участков цепи возникает ЭДС индукции, вызванная движением проводника в магнитном поле. Решение таких задач нужно начинать с определения полярности и модуля этой ЭДС индукции, после чего задача сведется к расчету обычной цепи постоянного тока с несколькими источниками ЭДС, соединенными между собой последовательно или параллельно.

5. Решение задач о работе электрических машин постоянного тока основано на составлении уравнения закона сохранения и превращения энергии. В простейших случаях его достаточно для нахождения искомой величины; в более сложных задачах к уравнению энергетического баланса необходимо добавить вспомогательные уравнения, позволяющие представить в развернутом виде ту или иную величину, входящую в основное уравнение. Обычно для этого нужно использовать формулы (13.16), (13.17) и (13.18).

Пример 1. Контур в виде квадрата с диагональю, изготовленный из медной проволоки сечением $S = 1$ мм^2, подключен к источнику постоянного напряжения $U = 110$ В (рис. 13.4). Плоскость квадрата расположена параллельно линиям индукции магнитного поля; $B = 1{,}7 \cdot 10^{-2}$ Тл. Определите модуль и направление силы, действующей на контур со стороны поля. Удельное сопротивление меди $\varrho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Решение. Чтобы найти силу, действующую со стороны магнитного поля на контур с током, нужно найти модуль и направление сил, действующих на отдельные элементы контура, и затем их сложить. По расположению элементов контура относительно поля в контуре можно выделить пять прямолинейных проводников ab, bc, ad, cd и ac. По этим проводникам протекают токи I_1 и I_2, значение которых можно определить из закона Ома для участка цепи. Так как напряжение подводится к точкам a и c, длина стороны квадрата равна l, площадь сечения проволоки и ее удельное сопротивление равны соответственно S и ϱ, то

$$I_1 = \frac{U}{R_{abc}} = \frac{US}{2\varrho l}; \quad I_2 = \frac{US}{\varrho l\sqrt{2}}. \qquad (1)$$

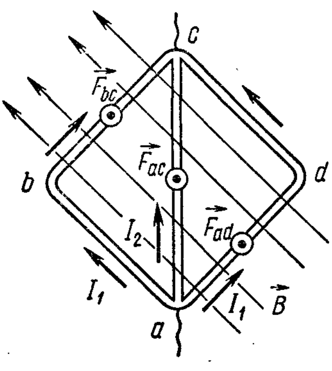

Рис. 13.4

Проводники ab и cd расположены параллельно линиям индукции, поэтому согласно закону Ампера $F_{ab} = 0$ и $F_{cd} = 0$, так как здесь $\sin\alpha = 0$. Проводники bc и ad перпендикулярны вектору B ($\alpha = 90°$ и $\sin\alpha = 1$), и на них действуют элементарные параллельные силы, равномерно распределенные по проводу, модуль равнодействующей этих сил

$$F_{bc} = F_{ad} = I_1 l B. \qquad (2)$$

Приложены эти силы в середине проводников и направлены перпендикулярно плоскости чертежа (к нам).

Проводник ac составляет с вектором индукции $\vec{B}$ угол $\alpha = 45°$, его длина $l\sqrt{2}$, следовательно, со стороны поля на него действует сила

$$F_{ac} = I_2 l\sqrt{2}\, B \sin 45°. \tag{3}$$

Направлена эта сила в ту же сторону, что и силы $\vec{F}_{bc}$ и $\vec{F}_{ad}$. Модуль результирующей трех параллельных сил равен:

$$F = 2F_{bc} + F_{ac} = 2(I_1 + I_2)lB, \tag{4}$$

точка ее приложения совпадает с центром контура.

Решая уравнения (1) — (4) относительно F, получим:

$$F = \frac{(2+\sqrt{2})USB}{2\varrho}; \quad F \approx 190 \text{ Н}.$$

Пример 2. Плоская рамка, состоящая из $n = 50$ витков тонкой проволоки, подвешена на бронзовой ленточке между полюсами электромагнита. При силе тока в рамке $I = 1$ А рамка повернулась на угол $\alpha_1 = 15°$. Определите модуль вектора индукции магнитного поля в том месте, где находится рамка, если известно, что при закручивании ленточки на угол $\varphi_0 = 1°$ возникает момент сил упругости $M_0 = 9{,}8 \cdot 10^{-6}$ Н · м. При отсутствии тока плоскость рамки составляла с направлением поля угол $\alpha_0 = 30°$, площадь рамки $S = 10$ см^2.

Р е ш е н и е. На рамку с током, подвешенную в магнитном поле, действуют два вращающих момента: момент M_1, созданный силами поля, и противодействующий ему момент сил упругости M_2, вызванный закручиванием упругого подвеса, на котором находится рамка. При равновесии рамки должно быть

$$M_1 = M_2. \tag{1}$$

Если по рамке проходит ток I, площадь рамки S, число витков n и при равновесии нормаль к плоскости рамки составляет угол α с вектором индукции $\vec{B}$, то

$$M_1 = nISB \sin \alpha. \tag{2}$$

По условию задачи момент сил упругости пропорционален углу закручивания подвеса:

$$M_2 = k\varphi,$$

где k — постоянный коэффициент, зависящий от геометрических размеров (формы, сечения) и материала подвеса. В данной задаче он определяется из условия, что при угле закручивания φ_0 возникает момент M_0, т. е. $M_0 = k\varphi_0$, и, стало быть,

$$M_2 = \frac{M_0}{\varphi_0}\varphi. \tag{3}$$

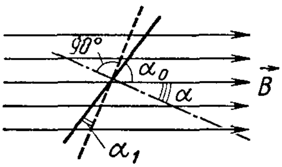

Рис. 13.5

В свободном состоянии рамки, до включения тока, плоскость рамки составляла с направлением линий индукции поля угол α_0 (рис. 13.5). Поэтому при переходе во второе равновесное положение рамка повернется на угол

$$\varphi = \alpha_1. \tag{4}$$

На такой же угол закрутится нить, и нормаль к рамке будет составлять с направлением вектора $\vec{B}$ угол

$$\alpha = 90° - (\alpha_0 + \alpha_1). \tag{5}$$

С учетом формул (2) — (5) уравнение равновесия (1) можно представить в окончательном виде так:

$$\frac{M_0}{\varphi_0}\alpha_1 = nISB\cos(\alpha_0 + \alpha_1).$$

Найдя отсюда модуль вектора индукции магнитного поля и подставив числовые значения, получим:

$$B = \frac{M_0\alpha_1}{nIS\varphi_0\cos(\alpha_0 + \alpha_1)}; \quad B \approx 4 \cdot 10^{-3}\ \text{Тл}.$$

Пример 3. Электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов $U = 1$ кВ, влетает в вакууме в однородное магнитное поле с индукцией $B = 10^{-2}$ Тл перпендикулярно линиям индукции. Определите радиус окружности, описываемой электроном в поле. Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-9}$ Кл, его масса $m = 9 \cdot 10^{-31}$ кг.

Р е ш е н и е. Заряженная частица, влетающая в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции, под действием силы Лоренца (всегда перпендикулярной вектору скорости) приобретает нормальное ускорение и начинает описывать окружность в плоскости, перпендикулярной направлению линий индукции поля.

Если в магнитное поле, линии индукции которого перпендикулярны плоскости чертежа (от нас), влетает электрон со скоростью $\vec{v}$ (рис. 13.6), то на него будет действовать сила $\vec{F}_л$, направление которой определяется правилом левой руки с учетом направления тока. Согласно формуле (13.3) модуль этой силы равен:

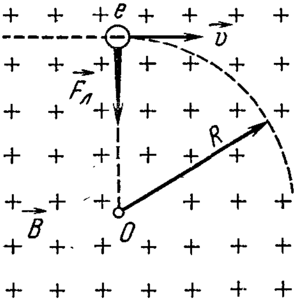

Рис. 13.6

$$F_л = evB \tag{1}$$

($\sin\alpha = 1$, так как $\vec{v} \perp \vec{B}$). При $\vec{B} = \text{const}$ модуль силы Лоренца будет оставаться постоянным, и если пренебречь действием силы тяжести, то можно считать, что электрон описывает окружность некоторого радиуса R. Согласно второму закону Ньютона

$$F_Л = \frac{mv^2}{R}. \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) служат основными соотношениями при решении всех задач на движение заряженных частиц в однородном магнитном поле; записав их, следует составить вспомогательные уравнения, исходя из дополнительных условий задачи. В данном случае скорость электрона задана через ускоряющую разность потенциалов U. По закону сохранения и превращения энергии работа сил поля eU равна изменению кинетической энергии электрона. Пролетев между точками поля с разностью потенциалов U некоторое расстояние, электрон приобрел энергию

$$\frac{mv^2}{2} = eU \qquad (3)$$

(кинетической энергией в начале разгона пренебрегаем). Этим равенством условие задачи исчерпывается полностью. В системе уравнений (1) — (3) неизвестными являются R, $F_Л$ и v. Решая уравнения относительно искомого неизвестного R и подставляя числовые значения, получим:

$$R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{m}{e}2U}; \quad R \approx 0{,}01 \text{ м.}$$

Пример 4. Протон влетает со скоростью $v = 10^3$ м/с в однородное магнитное поле под углом $\alpha = 60°$ к линиям индукции. Определите радиус и шаг спиральной линии, по которой будет двигаться протон, если модуль вектора индукции магнитного поля равен $B = 10^{-3}$ Тл.

Решение. Если заряженная частица влетает в однородное магнитное поле так, что ее вектор скорости $\vec{v}$ направлен под углом α к вектору индукции $\vec{B}$ и действие всех сил, кроме силы Лоренца, ничтожно мало, частица начинает двигаться по винтовой линии. В этом нетрудно убедиться, разложив вектор скорости по направлению вектора $\vec{B}$ и направлению, ему перпендикулярному, на составляющие $\vec{v}_\parallel$ и $\vec{v}_\perp$ (рис. 13.7). Как видно из рисунка, модули составляющих равны: $v_\parallel = v\cos\alpha$, $v_\perp = v\sin\alpha$. При том направлении векторов $\vec{B}$ и $\vec{v}$, какое указано на рисунке, сила $\vec{F}_Л$ действует на протон перпендикулярно пло-

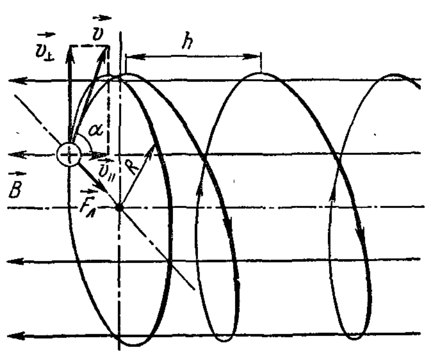

Рис. 13.7

скости чертежа (на нас) и непрерывно изменяет направление составляющей $\vec{v}_\perp$, сообщая частице в плоскости, перпендикулярной полю, нормальное ускорение $a_н$. В результате протон описывает в этой плоскости окружность некоторого радиуса R, поскольку $\vec{B} = \text{const}$ и $v_\perp = \text{const}$. Если масса и заряд протона равны соответственно m и q, то

$$F_Л = qv_\perp B = qvB \sin\alpha, \tag{1}$$

и в то же время по второму закону Ньютона

$$F_Л = \frac{mv_\perp^2}{R} = \frac{mv^2 \sin^2\alpha}{R}. \tag{2}$$

Вдоль линий индукции поля на протон никакие силы не действуют, следовательно, в этом направлении он движется прямолинейно с неизменной скоростью $v \cos\alpha$. В результате наложения прямолинейного движения на круговое протон описывает в пространстве винтовую линию. Шаг этой линии — расстояние, на которое смещается частица вдоль поля за один оборот,— равен:

$$h = v_\parallel T = v \cos\alpha T, \tag{3}$$

где T — период обращения протона по кругу радиусом R. Этот период равен:

$$T = \frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi R}{v \sin\alpha}. \tag{4}$$

В уравнениях (1) — (4) неизвестными являются $F_Л$, R, h и T. Решая уравнения относительно искомых неизвестных R и h и подставляя числовые значения, получим:

$$R = \frac{mv\sin\alpha}{qB}; \quad R \approx 9 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad h = \frac{2\pi mv\cos\alpha}{qB}; \quad h \approx 3{,}2 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Пример 5. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 6 \cdot 10^{-2}$ Тл находится соленоид диаметром $d = 8$ см, имеющий $n = 80$ витков медной проволоки сечением $\sigma = 1$ мм^2. Соленоид поворачивают на угол $\alpha = 180°$ за время $\Delta t = 0{,}2$ с так, что его ось остается направленной вдоль линий индукции поля. Определите среднее значение электродвижущей силы, возникающей в соленоиде, и индукционный заряд, прошедший по соленоиду. Удельное сопротивление меди $\varrho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Р е ш е н и е. Изменить магнитный поток, пронизывающий контур, и возбудить в нем ЭДС индукции можно различными способами. Наиболее просто это сделать, повернув контур в магнитном поле так, чтобы изменился угол между нормалью к плоскости контура и направлением вектора $\vec{B}$. Этот случай и имеет место в данной задаче.

При изменении магнитного потока, пронизывающего соленоид, состоящий из n витков, на $\Delta\Phi$ за время Δt, в нем индуцируется ЭДС

$$\mathscr{E} = -n\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \qquad (1)$$

Если в исходном положении катушка была расположена так, *что ось ее составляла с направлением поля угол* α_1, *то при повороте* оси на угол α_2 магнитный поток, пронизывающий соленоид, изменится на величину

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = BS\cos(\alpha_1 + \alpha_2) - BS\cos\alpha_1,$$

где S — площадь поперечного сечения соленоида. По условию задачи ось катушки в исходном положении совпадала с направлением вектора $\vec{B}$ $(\alpha_1 = 0)$, а угол поворота $\alpha_2 = 180°$. Изменение магнитного потока в этом случае максимальное и равное

$$\Delta\Phi = -2BS. \qquad (2)$$

Подставляя выражение (2) в формулу (1) и учитывая, что сечение соленоида $S = \frac{\pi d^2}{4}$, получим ответ на первый вопрос задачи:

$$\mathscr{E} = \frac{\pi d^2 nB}{2\Delta t}; \quad \mathscr{E} \approx 0{,}24 \text{ В}.$$

Согласно формуле (13.10″) при изменении магнитного потока на $\Delta\Phi$ в соленоиде индуцируется заряд

$$q = n\frac{\Delta\Phi}{R}. \qquad (3)$$

Сопротивление обмотки соленоида

$$R = \frac{n\pi\varrho d}{\sigma}. \qquad (4)$$

Подставляя в формулу (3) вместо $\Delta\Phi$ и R их выражения (2) и (3), получим ответ на второй вопрос задачи:

$$q = \frac{\sigma dB}{2\varrho}; \quad q = 1{,}4 \text{ Кл}.$$

Индуцированный заряд не зависит от скорости изменения магнитного потока и количества витков в соленоиде.

Пример 6. В магнитном поле с индукцией $B = 10^{-2}$ Тл вращается стержень длиной $l = 0{,}2$ м с постоянной угловой скоростью $\omega = 100$ с$^{-1}$. Найдите ЭДС индукции, возникающую в стержне, если ось вращения проходит через конец стержня параллельно линиям индукции магнитного поля.

Р е ш е н и е. Появление сторонних сил внутри стержня, пересекающего линии индукции поля, и возникновение разности потенциалов на его концах вызвано действием силы Лоренца на заряды, находящиеся в проводнике. Если стержень вращается в однородном магнитном поле с постоянной угловой скоростью ω

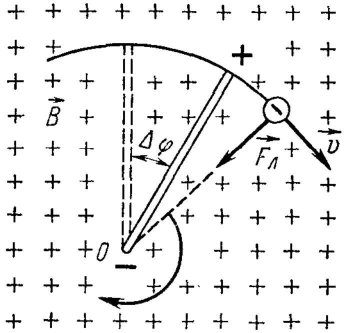

Рис. 13.8

и пересекает линии индукции под прямым углом (рис. 13.8), то под действием силы Лоренца $\vec{F}_Л$ электроны начнут смещаться вдоль стержня к одному из его концов. При том направлении поля и вращения, какое указано на рисунке, $\vec{F}_Л$ направлена к оси вращения и туда же смещаются электроны. Смещение электронов происходит до тех пор, пока напряженность электрического поля, возникающего внутри проводника, не достигнет такого значения, при котором силы электрического отталкивания уравновесят силы Лоренца.

В результате перемещения электронов на одном конце стержня оказывается их избыток, на другом — недостаток и между концами стержня возникает постоянная разность потенциалов, равная

$$\mathscr{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \tag{1}$$

где $\Delta\Phi$ — магнитный поток, проходящий через поверхность, описываемую стержнем за время Δt.

При вращении стержня под прямым углом к линиям индукции магнитного поля $\Delta\Phi = B\Delta S$, где ΔS — площадь сектора, описываемого стержнем.

За время Δt стержень поворачивается на угол $\Delta\varphi$ и площадь сектора получается равной:

$$\Delta S = \frac{\Delta\varphi l^2}{2} = \frac{\omega l^2 \Delta t}{2}, \text{ так как } \Delta\varphi = \omega\Delta t.$$

Учитывая это, для изменения магнитного потока найдем:

$$\Delta\Phi = \frac{B\omega l^2}{2}. \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) получим:

$$\mathscr{E} = \frac{B\omega l^2}{2},$$

или, после подстановки числовых значений, $\mathscr{E} = 2 \cdot 10^{-2}$ В.

Пример 7. Две параллельные шины, подключенные к аккумулятору с ЭДС $\mathscr{E}_0$ и внутренним сопротивлением r, находятся в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$. Шины замкнуты проводником длиной l и сопротивлением R, который перемещается по шинам без нарушения контакта перпендикулярно линиям индукции поля со скоростью $\vec{v}$. Пренебрегая сопротивлением шин, определите напряжение на зажимах источника, мощность, выделяемую в проводнике, а также механическую мощность, подводимую к проводнику.

Р е ш е н и е. Допустим, что при том подключении аккумулятора к шинам и направлении магнитного поля, какое показано на рисунке 13.9, проводник перемещают равномерно слева направо. При своем движении проводник пересекает линии индукции поля и в нем возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_{и}$ — источник тока, включенный последовательно с аккумулятором. В зависимости от направления индукции поля и направления движения проводника $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_{и}$ действуют или в одну, или в противоположные стороны В первом случае ток в цепи усилится, во втором — ослабнет. В нашем примере, используя правило правой руки, нетрудно установить, что индукционный ток шел бы от b к a, уменьшая ток аккумулятора, т. е. ЭДС $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_{и}$ имеют противоположные знаки. Поскольку проводник ab движется перпендикулярно линиям индукции поля ($\alpha = 90°$), ЭДС индукции согласно формуле (13.11) равна:

$$\mathcal{E}_{и} = lvB. \qquad (1)$$

Дальнейшее решение сводится к расчету цепи постоянного тока, содержащей два последовательно включенных элемента с разными ЭДС. Пользуясь правилами такого расчета, находим общую ЭДС контура (предполагая, что $\mathcal{E}_0 > \mathcal{E}_{и}$)

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_{и}, \qquad (2)$$

и силу тока в контуре

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \qquad (3)$$

Поскольку аккумулятор разряжается и ток через него идет в естественном направлении, для напряжения на его зажимах получаем:

$$U = \mathcal{E}_0 - Ir. \qquad (4)$$

Мощность, выделяемая в проводнике, равна:

$$P = I^2R. \qquad (5)$$

Так как по проводнику ab, движущемуся в магнитном поле. идет ток, то со стороны поля на него действует сила $\vec{F}_{A}$, направленная (согласно правилу левой руки) влево. По закону Ампера

$$F_{A} = IlB. \qquad (6)$$

Чтобы проводник двигался равномерно, к нему должна быть приложена сила $\vec{F}$, равная по модулю силе $\vec{F}_{A}$, но направленная в противоположную сторону — вправо. Механическая мощность в этом случае будет равна:

$$N = F_{A}v. \qquad (7)$$

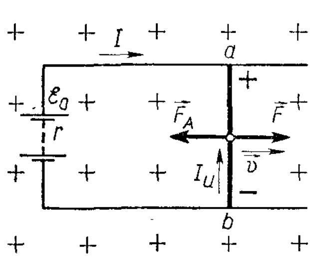

Рис 13.9

Исключая из уравнений (1) — (7) неизвестные $\mathcal{E}_и$, $\mathcal{E}$, I и F_A, получим для искомых величин окончательные выражения:

$$U = \frac{\mathcal{E}_0 R + lvBr}{R + r}; \quad P = \frac{(\mathcal{E}_0 - lvB)^2 R}{(R + r)^2}; \quad N = \frac{(\mathcal{E}_0 - lvB)\, lvB}{R + r}.$$

При решении задачи было сделано одно упрощающее допущение. Мы не учитывали действия магнитного поля, создаваемого током контура, и считали, что поле, в котором он находится, не изменяется. Такое предположение не влияет заметно на полученный результат только в том случае, если сила тока в контуре мала и индукция его магнитного поля значительно меньше индукции внешнего магнитного поля.

Пример 8. Электромотор, включенный в сеть постоянного тока с напряжением $U = 120$ В, при полном сопротивлении цепи $R = 20$ Ом, передает приводу мощность $N = 160$ Вт. Какую ЭДС разовьет этот мотор, если его использовать как генератор, вращая якорь с той же угловой скоростью, какую он имел, работая как двигатель?

Решение. При работе электрической машины в качестве мотора основным уравнением, связывающим параметры электрической цепи, служит уравнение закона сохранения и превращения энергии.

Если источник дает постоянное напряжение U, полное сопротивление цепи R и электромотор развивает механическую мощность N, то согласно формуле (13.17)

$$IU = I^2 R + N, \tag{1}$$

где I — сила тока в цепи.

При перемещении контура с током I в магнитном поле силы поля совершают над проводником работу $A = I\Delta\Phi$.

Развиваемая при этом механическая мощность за время Δt равна $N = I\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. Поскольку в контуре при изменении магнитного потока на $\Delta\Phi$ возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_и = \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, то должно быть

$$N = I\mathcal{E}_и. \tag{2}$$

ЭДС индукции в якоре пропорциональна скорости его вращения (13.15), поэтому если использовать электромашину как генератор, вращая якорь с той же угловой скоростью, что и при работе электромотора, то ЭДС генератора $\mathcal{E}$ будет равна ЭДС индукции в электромоторе:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_и. \tag{3}$$

Этим уравнением условия задачи исчерпываются полностью. Исключая из уравнений (1) — (3) неизвестные I и $\mathcal{E}_и$, получим для определения искомой величины уравнение

$$\mathscr{E}^2 - U\mathscr{E} + NR = 0,$$

из которого находим:

$$\mathscr{E} = \frac{U \pm \sqrt{U^2 - 4NR}}{2}.$$

Подставляя сюда числовые значения, будем иметь:

$$\mathscr{E}_1 = 80 \text{ В и } \mathscr{E}_2 = 40 \text{ В}.$$

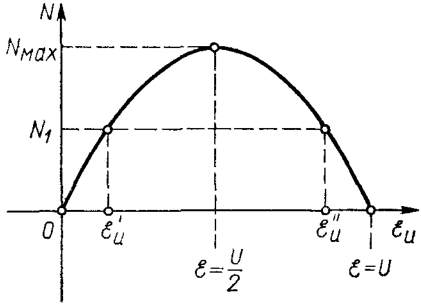

Рис. 13.10

Двузначность полученного результата объясняется следующим. Если исключить из уравнений (1) и (2) силу тока I, то после простых преобразований получается квадратное уравнение относительно ЭДС индукции якоря:

$$\mathscr{E}_и^2 - U\mathscr{E}_и + NR = 0,$$

которое при постоянных U и R можно рассматривать как зависимость механической мощности N от $\mathscr{E}_и$. Эта зависимость квадратичная, поэтому в общем случае одному значению N соответствуют два значения $\mathscr{E}_и$. График зависимости $N = f(\mathscr{E}_и)$ представлен на рисунке 13.10. Из анализа квадратного уравнения (или графика) следует, что $N = 0$, когда $\mathscr{E}_и = 0$ и $\mathscr{E}_и = U$ (и в том и в другом случае ток в цепи отсутствует).

Максимальную мощность мотор развивает при $\mathscr{E}_и = \frac{U}{2}$. Подставляя это значение $\mathscr{E}_и$ в исходное уравнение и решая его относительно N, получим:

$$N = N_{max} = \frac{\mathscr{E}_и^2}{R} = \frac{U^2}{4R}.$$

Пример 9. Сколько времени будет гореть неоновая лампочка в течение 1 мин при подключении ее в сеть переменного синусоидального тока с действующим значением напряжения $U_д = 120$ В и частотой $f = 50$ Гц, если лампочка зажигается и гаснет при напряжении $U = 84$ В?

Решение. При включении неоновой лампочки в сеть переменного тока напряжение на ее электродах меняется с течением времени по закону

$$U = U_m \sin(2\pi f t), \qquad (1)$$

где U_m — максимальное значение напряжения.

Максимальное значение синусоидального напряжения связано с действующим напряжением равенством

$$U_m = U_д \sqrt{2}. \qquad (2)$$

Так как лампочка зажигается и гаснет при напряжении $U_1 < U_m$, то за один полупериод она будет гореть в течение времени

$$\Delta t = t_2 - t_1, \tag{3}$$

где t_1 и t_2 — интервалы времени, прошедшего от начала периода T до момента вспышки и гашения. Всего за время $t_0 = 1$ мин лампочка горит в течение времени

$$t_x = 2f t_0 \Delta t, \tag{4}$$

поскольку в интервале t_0 будет содержаться $2\frac{t_0}{T} = 2ft_0$ промежутков Δt.

В уравнении (1) после подстановки в него выражения (2) все величины, кроме t, будут известны, и из полученного уравнения можно определить значения t_1 и t_2. Подставляя числовые значения $U = U_{\text{заж}} = U_{\text{гаш}}$ и $U_{\text{д}}$, найдем $\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{1}{2}$, откуда в пределах $\frac{T}{2}$

$$\frac{2\pi}{T}t_1 = \frac{\pi}{6}; \; t_1 = \frac{T}{12}; \; \frac{2\pi}{T}t_2 = \frac{5}{6}\pi; \; t_2 = \frac{5}{3}T.$$

Следовательно, за полупериод лампочка будет гореть в течение времени $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{T}{3} = \frac{1}{3f}$.

Подставляя это значение времени в уравнение (4), найдем время горения неоновой лампочки за одну минуту:

$$t_x = \frac{2}{3}t_0; \; t_x = 40 \text{ с}.$$

Пример 10. В сеть переменного синусоидального тока включены последовательно конденсатор емкостью $C = 100$ мкФ и катушки индуктивности диаметром $D = 10$ см, состоящая из $n = 1000$ витков медной проволоки сечением $S = 1$ мм^2, вплотную прилегающих друг к другу. Какая средняя мощность выделяется на активном сопротивлении катушки индуктивности за 1 период колебания тока в цепи, если амплитудное значение напряжения в сети равно $U_m = 120$ В? При какой частоте тока эта мощность будет максимальной? Сопротивлением подводящих проводов пренебречь. Удельное сопротивление меди $\varrho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Решение. Если в сеть синусоидального напряжения включены конденсатор, катушка индуктивности и резистор, то рассеивание мощности P происходит только на резисторе. В нашем примере резистором служит провод катушки индуктивности. Поскольку напряжение на нем совпадает по фазе с током и $\varphi = 0$, то согласно формуле (13.23)

$$P = \frac{I_m U_m}{2}, \tag{1}$$

где I_m — амплитудное значение силы тока в цепи.

По закону Ома

$$I = \frac{U}{Z}, \qquad (2)$$

где Z — полное сопротивление цепи переменному току.

Поскольку сопротивлением подводящих проводов можно пренебречь, Z состоит из активного сопротивления катушки R, сопротивления конденсатора R_C и сопротивления катушки индуктивности R_L. Согласно формуле (13.21)

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C}\right)^2}, \qquad (3)$$

где f — частота тока в городской сети, равная 50 Гц.

Активное сопротивление обмотки из медной проволоки длиной l_0 с удельным сопротивлением ϱ и сечением S равно:

$$R = \varrho \frac{l_0}{S} = \frac{\pi n \varrho D}{S}, \qquad (4)$$

где n — число витков; D — средний диаметр катушки. Учитывая, что длина катушки $l = nd = 2n\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ и витки вплотную прилегают друг к другу, для ее индуктивности получим:

$$L = \frac{\pi \mu_0 n D^2}{8}\sqrt{\frac{\pi}{S}} \quad \text{(см. формулу 13.13).} \qquad (5)$$

Последовательно подставляя числовые значения в формулы (5), (4) и (3), находим:

$$L \approx 9 \cdot 10^{-3}\ \text{Гн};\ R = 5{,}34\ \text{Ом};\ Z = 5{,}36\ \text{Ом}.$$

После этого согласно (1) и (2) будем иметь:

$$P = \frac{U_m R}{2Z^2}; \quad P \approx 1{,}34\ \text{кВт}.$$

Из последней формулы видно, что мощность, выделяемая в резисторе, максимальна в том случае, когда полное сопротивление цепи минимально. Согласно формуле (3) $Z = Z_{\min} = R$, если выражение, стоящее в скобках, равно нулю. Это возможно при частоте

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}; \quad f \approx 5{,}6\ \text{кГц}.$$

Мощность, выделяемая на активном сопротивлении при такой частоте, равна:

$$P_m = \frac{U_m^2}{2R}; \quad P_m \approx 1{,}35 \text{ кВт}.$$

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 13

13.1. Медный провод сечением S, согнутый в виде трех сторон квадрата, прикреплен своими концами к горизонтальной оси, вокруг которой он может свободно вращаться в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, направленной вертикально вверх. На какой угол от вертикали отклонится плоскость контура при прохождении по нему тока I? Решите задачу при условии, что провод согнут в виде трех сторон правильного треугольника и шарнирно закреплен в одной из вершин.

13.2. Деревянный цилиндр массой 0,25 кг и длиной 0,10 м расположен на наклонной плоскости. На цилиндр намотано 10 витков тонкой проволоки так, что плоскость каждого витка проходит через ось цилиндра параллельно наклонной плоскости. Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией 0,5 Тл, вектор которой направлен вертикально вверх. Какой минимальный ток нужно пропустить через рамку, чтобы цилиндр не скатывался с наклонной плоскости? Трение скольжения между цилиндром и наклонной плоскостью велико.

13.3. Зеркальный гальванометр имеет рамку площадью 1,5 см^2, состоящую из 300 витков тонкой проволоки. Рамка подвешена на нити, в которой при закручивании нити на угол в 1 рад возникает момент силы упругости, равный 0,98 Н · м. Рамка находится в магнитном поле с индукцией 0,1 Тл, вектор которой направлен радиально к оси вращения рамки. Шкала гальванометра с делениями 1 мм расположена на расстоянии 1 м от зеркала. При какой силе тока в рамке гальванометра указатель на шкале сместится на 1 деление?

13.4. Плоскость медного диска радиусом R расположена перпендикулярно линиям магнитной индукции $\vec{B}$ (рис. 13.11). При пропускании тока I между скользящими контактами a и b диск начинает вращаться, делая за 1 с число оборотов, равное n. Определите вращающий момент, действующий на диск, и мощность, развиваемую таким двигателем.

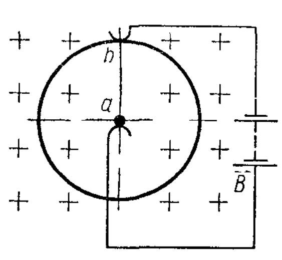

Рис 13.11

13.5. По проволочному кольцу радиусом R течет ток I. Кольцо находится в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной плоскости кольца. Чему равна сила натяжения кольца?

13.6. По проволоке, согнутой в виде правильного n-угольника, вписанного в окружность радиусом R, пропускается ток I. Най-