Фокусное расстояние окуляра подбирают так, чтобы падающий на него сходящийся пучок лучей был преобразован в слегка расходящийся и окончательное изображение предмета рассматривалось ненапряженным глазом. Увеличение, даваемое трубой Галилея, определяется по формуле (15.14).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

1. Задачи на преломление света удобно разделить на три группы. К первой группе можно отнести задачи о преломлении света на плоской границе раздела двух сред, включая сюда задачи о прохождении лучей через плоскопараллельные пластинки и призмы. Ко второй — задачи на построение и расчеты изображений в одиночных линзах. В третью группу входят все задачи на оптические системы, состоящие из нескольких линз или линз и зеркал.

2. Задачи первой группы сравнительно просты. Их решают на основании формулы закона преломления с использованием тригонометрии и геометрии. При решении задачи нужно прежде всего сделать чертеж, где указать ход лучей, идущих из одной среды в другую. В точке падения луча на границу раздела сред, там, где он преломляется, следует провести нормаль и отметить углы падения и преломления, а также начальное направление луча. Перед тем как чертить преломленный луч, необходимо установить, переходит ли он из оптически менее плотной среды в более плотную или наоборот. В зависимости от этого луч отклоняется от своего начального направления или приближаясь к нормали в точке падения, или удаляясь от нее. Особого внимания заслуживает второй случай, так как здесь может наблюдаться явление полного отражения и луч вообще не войдет во вторую среду. (Чтобы не сделать ошибки и правильно изобразить дальнейший ход падающего луча, необходимо знать числовые значения относительного показателя преломления наиболее распространенных веществ и значения предельных углов.) После того как сделан чертеж, нужно записать формулу закона преломления для каждого перехода луча из одной среды в другую и составить вспомогательные уравнения, связывающие углы и расстояния, используемые в задаче. Затем остается решить полученную систему уравнений относительно неизвестной величины.

3. Задачи на построение изображения в одиночных линзах и расчеты, связанные с этим изображением, решаются почти так же, как и задачи на зеркала. Для каждого положения предмета нужно построить изображение, отметить характерные точки линзы (F и $2F$), расстояния от линзы до предмета и его изображения (d и f) и записать формулу линзы и формулу увеличения, связывающие расстояния d, f и F. Добавив к основным уравнениям вспомогательные (обычно они устанавливают дополнительные связи между расстоянием от линзы до предмета и изображения),

нужно решить полученную систему уравнений. Новым здесь является следующее:

а) При построении изображения чаще всего берут лучи, параллельные главной оптической оси (преломляясь в линзе, они проходят через главный фокус сами или своим продолжением), и лучи, идущие через оптический центр линзы (их направление не меняется).

б) Для определения хода лучей, падающих на линзу под произвольным углом (например, это могут быть лучи, идущие из светящихся точек, расположенных на главной оптической оси), используют побочные оптические оси. Проведя такую ось параллельно лучу, ход которого требуется проследить, необходимо найти на ней побочный фокус. Для этого проводят фокальную плоскость линзы и находят точку пересечения плоскости с данной осью, эта точка и является побочным фокусом.

В случае собирающей линзы луч, идущий параллельно данной оптической оси, после преломления должен пройти через побочный фокус; в случае рассеивающей — через побочный фокус проходит продолжение преломленного луча. При построении изображения в собирающих линзах используют только задний фокус линзы, в рассеивающих — передний.

в) К формулам собирающей и рассеивающей линзы добавляется формула (15.6), связывающая фокусное расстояние линзы с ее радиусами и показателями преломления материала линзы и среды. В задачах, требующих построения изображения в линзе с заданными радиусами кривизны, формула (15.6) является вспомогательной, она позволяет определить фокусное расстояние линзы. После того как F найдено, дальнейшее решение задачи проводят по уже известному плану (см. п. 3).

4. В заключение остановимся на решении задач третьей группы. Наиболее простые из них — это задачи на оптические системы, состоящие из тонких линз, сложенных вплотную. Если найти фокусное расстояние такой системы, все дальнейшее решение задачи ничем не будет отличаться от решения задач на одиночную линзу. Для нахождения фокусного расстояния применяют формулу (15.9). С ее написания и рекомендуется начинать решение задач этого типа.

Задачи на построение изображения в оптических системах, составленных из двух (или более) линз, отстоящих друг от друга на некотором расстоянии, весьма сходны с задачами на системы зеркал. Как и в случае зеркал, ход лучей через систему линз проще всего установить по промежуточным изображениям, даваемым отдельными линзами системы. Расчет размеров и положения окончательного изображения здесь также основан на принципе обратимости лучей, из которого следует, что изображение, даваемое первой линзой, можно рассматривать как предмет для второй, и т. д.

Решают задачи этой группы следующим образом. Надо сделать схематический чертеж в соответствии с условием задачи, отметить на нем линзы и предмет и указать характерные точки линз и заданные расстояния. После этого нужно построить изображение предмета в первой линзе, считая, что второй линзы нет. Используя формулу линзы и формулу увеличения (если требуется определить размеры изображения, даваемого системой), необходимо найти из них расстояние от этого изображения сначала до первой, а затем и до второй линзы. При этом нужно сразу же находить числовые значения этих расстояний, поскольку именно они позволяют судить о том, как то или иное изображение (предмет) расположено относительно второй линзы.

Считая первое изображение предметом для второй линзы, аналогично предыдущему находят построением и расчетом положение и размер второго изображения. Точно так же рассчитывают последующие изображения, если линз несколько.

При построениях и расчетах всякий раз следует различать случаи, когда на вторую линзу лучи падают расходящимся или сходящимся пучком. В первом случае изображение точки нужно рассматривать как действительный предмет для второй линзы, во втором — как мнимый. Последовательность действий и расчетные формулы здесь такие же, как и для зеркал. Главное, что требует особого внимания при составлении формул,— это правильный выбор знаков перед d и f. Если при составлении формул знаки были учтены, то в полученные выражения при числовых расчетах нужно подставлять модули входящих в них величин. При графическом построении мнимых предметов их нужно считать для соответствующей линзы изображением и по нему строить предмет — искомое изображение в системе.

В оптических системах, составленных из линзы и зеркала, независимо от того, сложены ли они вместе (линзы с посеребренной поверхностью) или отстоят на некотором расстоянии, преобразование светового потока происходит трижды. Лучи в этой системе идут следующим образом: от светящегося предмета они падают на линзу, преломляются в ней и идут на зеркало. Отражаясь от зеркала, они вновь падают на линзу и, вторично преломившись, дают окончательное изображение. Это изображение может быть и действительным и мнимым.

Порядок расчета в системах, состоящих из линз и зеркал, такой же, как и в системах, составленных только из линз. Если, например, вогнутое сферическое зеркало и собирающая линза с одинаковыми радиусами кривизны сложены вместе, фокусное расстояние $F_с$ системы определяют при помощи формул

$$\frac{2}{R}=-\frac{1}{F_л}+\frac{1}{f} \quad \text{и} \quad \frac{1}{F_л}=-\frac{1}{f}+\frac{1}{F_с},$$

из которых следует, что оптическая сила системы равна:

$$\frac{1}{F_с}=\frac{2}{F_л}+\frac{2}{R}=\frac{2}{F_л}+\frac{1}{F_з}. \qquad (15.17)$$

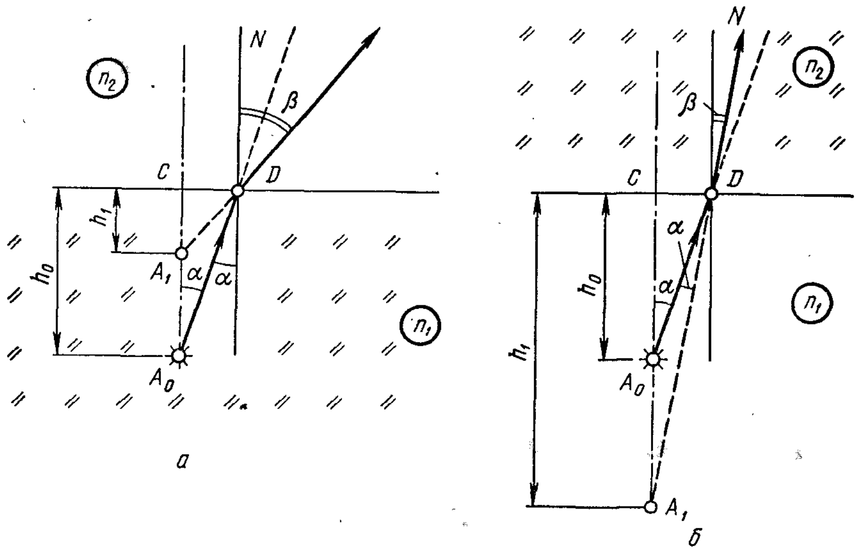

Рис. 15.3

В общем случае $F_л$ и $F_з$ в эту формулу входят со знаком «плюс» или «минус» в зависимости от того, являются ли линза или зеркало собирающими или рассеивающими.

При расчете изображений в такой системе d и f определяют из уравнения

$$\frac{1}{F_c} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}. \qquad (15.18)$$

Для вычисления размеров изображения в оптических системах к уравнениям, составленным на основании формулы линзы (зеркала), добавляют формулу увеличения. В случае нескольких линз (линз и зеркал) полное увеличение, даваемое системой, равно произведению увеличений отдельных линз (зеркал):

$$\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 \ldots \Gamma_n. \qquad (15.19)$$

Пример 1. Светящуюся точку, находящуюся в среде с показателем преломления n_1, рассматривают невооруженным глазом из среды с показателем преломления n_2. Каково будет кажущееся расстояние точки от границы раздела сред, если точка находится от этой границы на расстоянии h_0, а глаз расположен так, что в него попадают лучи, падающие на границу раздела под небольшими углами?

Р е ш е н и е. Рассмотрим два случая: а) когда $n_1 > n_2$ (глаз расположен в оптически менее плотной среде) и б) когда $n_1 < n_2$ (глаз находится в среде оптически более плотной).

а) Допустим, что светящаяся точка A_0 (рис. 15. 3,*а*) находится в среде с показателем преломления n_1 и глаз наблюдателя расположен над предметом в среде с показателем преломления n_2 так, что в него попадают лучи, идущие под малыми углами к нормали N. Выберем из пучка лучей, попадающих в глаз наблюдателя, два луча A_0C и A_0D. Первый луч падает перпендикулярно границе раздела сред и идет во вторую среду не преломляясь. Второй луч, переходя во вторую оптически менее плотную среду, отклоняется от своего начального направления, удаляясь от нормали в точке D. Лучи, вышедшие из точки A_0, кажутся наблюдателю выходящими из точки A_1. Эта точка является мнимым изображением точки A_0; ее расстояние h_1 от границы раздела сред определяют следующим образом.

Обозначим угол падения луча в точке D через α, а угол преломления через β. Из чертежа видно, что в треугольниках A_0DC и A_1DC сторона CD общая. Поэтому можно записать, что

$$CD = h_0 \operatorname{tg} \alpha = h_1 \operatorname{tg} \beta, \text{ откуда}$$

$$h_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} h_0.$$

Поскольку лучи падают на границу раздела сред под небольшими углами, то вследствие малости углов α и β тангенсы этих углов можно заменить их синусами:

$$h_1 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} h_0.$$

Но по закону преломления $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$, следовательно, $h_1 = \frac{n_2}{n_1} h_0$. Если, в частности, смотреть из воздуха $(n_2 = 1)$ на предмет, находящийся в воде $\left(n_1 = \frac{4}{3}\right)$, то $h_1 = \frac{3}{4} h_0$.

б) Рассмотрим второй случай, когда луч A_0D от светящегося предмета идет в оптически более плотную среду. В точке D он отклонится от своего начального направления к нормали (рис. 15.3, *б*). Наблюдателю будет казаться, что лучи A_0C и A_0D вышли из точки A_1, которая служит изображением предмета A_0. Из треугольников A_0DC и A_1DC аналогично предыдущему находим расстояние h_1 от точки A_1 до границы раздела сред:

$$h_1 = \frac{n_2}{n_1} h_0.$$

Такие же результаты мы получили бы из формулы (15. 4″), положив в ней $d = h_0$ и $f = h_1$. В частном случае, если рассматривать из воды $\left(n_1 = \frac{4}{3}\right)$ предмет, находящийся в воздухе $(n_2 = 1)$, то $h_1 = \frac{4}{3} h_0$.

Как показывают приведенные расчеты и построения, светящийся предмет A_0 будет казаться наблюдателю ближе к поверхности раздела ($h_1 < h_0$), если вторая среда оптически менее плотная ($n_1 > n_2$). Если же смотреть на светящуюся точку из среды оптически более плотной, то она будет казаться дальше, чем находится на самом деле, поскольку при $n_2 > n_1$ $h_1 > h_0$.

И наконец, следует отметить, что в общем случае лучи, идущие от светящейся точки предмета, после преломления на плоской границе раздела сред не пересекаются в одной точке на своем продолжении. Нет такой единственной точки A_1, которая являлась бы изображением точки A_0. Это легко заметить, рассматривая лучи, выходящие из A_0 и падающие на границу сред под разными углами. Изображение будет единственным только в тех случаях, когда из A_0 идет узкий пучок — гомоцентрический пучок лучей. Само изображение будет при этом всегда мнимым и будет находиться с предметом по одну сторону от преломляющей поверхности.

В тех случаях, когда гомоцентрический пучок падает нормально на границу сред, как, например, в нашем примере, точки A_1 и A_0 лежат на одном перпендикуляре, проведенном к преломляющей поверхности.

Пример 2. Плоскопараллельная пластинка толщиной d (рис. 15.4) с показателем преломления n_2 находится в среде с показателем преломления $n_1 < n_2$. Луч света из точки S падает на пластинку под углом α_1. Чему равен угол между падающим и преломленным лучом, вышедшим из пластинки? Каково боковое смещение луча, прошедшего через пластинку? На сколько ближе будет казаться точка S, если ее рассматривать через пластинку под малым углом к нормали N?

Р е ш е н и е. Так как по условию задачи $n_2 > n_1$, то, переходя из первой среды во вторую, луч приближается к нормали в точке падения A. При выходе из пластинки он отклоняется от нормали.

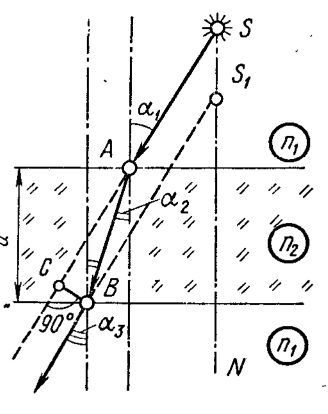

Рис. 15.4

Отметив на чертеже углы падения и преломления α_1, α_2, α_3 и боковое смещение BC луча, записываем формулу закона преломления для каждого перехода луча из одной среды в другую в точках A и B:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}; \quad \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3} = \frac{n_1}{n_2}. \qquad (1)$$

В этих уравнениях известен угол падения α_1 и все показатели преломления, поэтому, решая систему уравнений относительно α_3, получим ответ на первый вопрос задачи: $\alpha_3 = \alpha_1$. Равенство углов означает, что, пройдя через пластинку, луч выйдет из нее параллельно своему начальному направлению. (Этот вывод справедлив для любого числа пластин.)

Из треугольника ABC боковое смещение BC луча равно:

$$BC = AB \sin(\alpha_1 - \alpha_2),$$

но $AB = \frac{d}{\cos \alpha_2}$, следовательно,

$$BC = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\, d}{\cos \alpha_2}. \qquad (2)$$

Исключая из уравнений (1), (2) угол α_2, после несложных преобразований для бокового смещения луча получим выражение

$$BC = d \sin \alpha_1 - \frac{n_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha_1}} d.$$

Пройдя через пластинку, рассматриваемый луч идет так, как если бы он вышел из точки S_1, которая служит изображением точки S в плоскопараллельной пластинке при малых углах α_1. Как видно из чертежа, расстояние $SS_1 = y = BC / \sin \alpha_1$. С учетом выражения для BC получим:

$$y = d - \frac{n_1 \cos \alpha_1}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha_1}} d,$$

откуда вытекает, что при малых углах наблюдения плоскопараллельная пластинка дает смещение светящейся точки, равное

$$y = (1 - n_1 / n_2)\, d.$$

Этот же результат можно получить иначе, рассматривая точку A и ее изображение A_1 в плоскопараллельной пластинке. Согласно формуле (15.4″) или результату предыдущего примера $y = d - \frac{n_1}{n_2} d$, так как в данном случае $f = h_1 = \frac{n_1}{n_2} d$.

Пример 3. На дне водоема глубиной h находится точечный источник света (рис. 15.5). На поверхности воды плавает круглый диск так, что его центр находится над источником. При каком минимальном диаметре диска лучи от источника не будут выходить из воды?

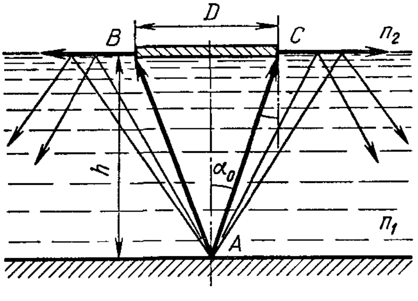

Рис. 15.5

Решение. Лучи, идущие из светящейся точки A, падают на границу раздела вода — воздух расходящимся пучком, переходя из оптически более плотной среды в менее плотную. Те лучи, которые падают на границу раздела под углом, большим предельного α_0, отразятся в воду, испытывая полное отражение, а в воздух выйдут лишь лучи, заключенные внутри конуса с диаметром основания D и вершиной в точке A. Если на воду положить непрозрачную пластинку диаметром D, то ни один луч в воздух не попадет. Диаметр пластинки легко определить, если найти α_0 с помощью законов преломления, поскольку глубина h, на которой находится источник, известна.

Для лучей, идущих из воды в воздух под предельным углом, можно записать:

$$\sin \alpha_0 = \frac{n_2}{n_1}, \tag{1}$$

где n_1 — показатель преломления воды; n_2 — показатель преломления воздуха.

Диаметр пластинки служит основанием равнобедренного треугольника ABC, поэтому

$$D = 2h \operatorname{tg} \alpha_0. \tag{2}$$

В уравнениях (1), (2) все величины, кроме D и α_0, известны. Решая их совместно относительно диаметра пластинки, получим:

$$D = \frac{2hn_2}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}.$$

Полагая в этой формуле показатель преломления воды $n_1 = 4/3$, воздуха $n_2 = 1$, находим:

$$D = \frac{6\sqrt{7}}{7} h.$$

Пример 4. Какую выдержку нужно делать, фотографируя погружение спортсмена в воду при прыжке с вышки высотой $H = 8$ м, если допустимая размытость изображения на негативе не должна превышать $h' = 0{,}4$ мм? Фотоаппарат установлен на расстоянии $d = 10$ м от места погружения, фокусное расстояние объектива $F = 10$ см (рис. 15.6).

Решение. При фотографировании какой-либо точки движущегося предмета ее изображение на пленке может получиться размытым — в виде линии. Изображение всего объекта оказывается в этом случае не резким, смазанным. Величина размытости зависит от скорости предмета и выдержки, которая была сделана при съемке. Если выдержка слишком велика, то за время, пока открыт затвор, фотографируемая точка сместится на значительное расстояние. Длина изображения ее следа h' на пленке окажется больше допустимой, и снимок получится некачественным. Чтобы h' не

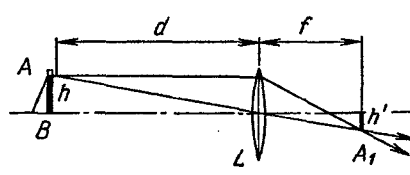

Рис. 15.6

превышало допустимых размеров, время экспозиции t нужно выбрать таким, чтобы след h, прочерченный движущейся точкой, за время t давал изображение, длина которого не больше h'.

Допустим, что одна из крайних точек предмета — спортсмена, свободно падающего с высоты H, попадает в поле зрения объектива и в некоторый момент времени находится в точке A, удаленной от фотоаппарата на расстояние d. Предположим далее, что за время t (при правильно подобранной выдержке) край предмета попадает в точку B, пройдя расстояние h с некоторой средней скоростью $v_{ср}$; тогда длина следа, прочерченного в пространстве каждой точкой предмета, будет равна:

$$h = v_{ср} t. \qquad (1)$$

На пленке, помещенной вблизи фокальной плоскости объектива, где получается изображение предмета (поскольку d обычно берется много больше F), след h будет спроецирован линзой в уменьшенный отрезок h', длина которого равна:

$$h' = \frac{f}{d} h. \qquad (2)$$

(Для простоты отрезок h поставлен перпендикулярно главной оптической оси.) Поскольку изображение действительное, связь между d и f дается формулой

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}. \qquad (3)$$

Среднюю скорость движения предмета можно найти из условия, что в точку A предмет попадет, пролетев расстояние H. Так как время выдержки обычно мало и $h \ll H$, можно считать, что на пути h скорость предмета почти не меняется, т. е.

$$v_{ср} = v_A = \sqrt{2gH}. \qquad (4)$$

Уравнения (1) — (4) содержат неизвестные величины h, $v_{ср}$, f и t. Решая их относительно t и подставляя числовые значения, получим:

$$t = \frac{(d-F)h'}{F\sqrt{2gH}}; \quad t \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

Пример 5. На расстоянии $d_1 = 1$ м от собирающей линзы параллельно ее плоскости поставлен подсвечиваемый предмет. При таком расположении линзы и предмета площадь изображения на экране равна $S_1 = 400$ см^2. Если линзу передвинуть на $l = 30$ см от предмета, площадь резкого изображения становится равной 9/16 площади предмета. Определите площадь S_0 и оптическую силу D линзы.

Решение. Если в первом положении линза находилась от предмета на расстоянии d_1, от экрана — на расстоянии f_1 и площадь изображения равнялась S_1, то

$$D = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} \quad (1)$$

и

$$\frac{S_1}{S_0} = \frac{f_1^2}{d_1^2}. \quad (2)$$

Во втором положении линзы, когда ее сместили на расстояние l от предмета и передвинули экран так, что на нем снова получилось четкое изображение, предмет и экран оказались удаленными от линзы на расстояние d_2 и f_2. Площадь изображения уменьшилась и стала равной $S_2 = 9/16\ S_0$. Для этого положения:

$$D = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} \quad (3)$$

и

$$\frac{S_2}{S_0} = \frac{f_2^2}{d_2^2}. \quad (4)$$

К основным уравнениям (1) — (4) следует добавить вспомогательное соотношение

$$d_2 = d_1 + l. \quad (5)$$

Подставляя выражение для d_2 в уравнения (3), (4) и исключая затем f_2, найдем:

$$D = \frac{\sqrt{S_0/S_2} + 1}{d_1 + l}; \quad D = 1{,}2 \text{ дптр.}$$

Считая D известной величиной, из уравнений (1), (2) получим:

$$S_0 = S_1(Dd_1 - 1)^2; \quad S_0 = 250 \text{ см}^2.$$

Пример 6. Если точечный источник света поместить на расстоянии d_1 (рис. 15.7) от рассеивающей линзы диаметром D_0, вставленной в оправу, то на экране, находящемся на расстоянии l за линзой, получится светлое пятно диаметром D_1. Каков будет диаметр пятна на экране, если источник поместить в фокусе линзы?

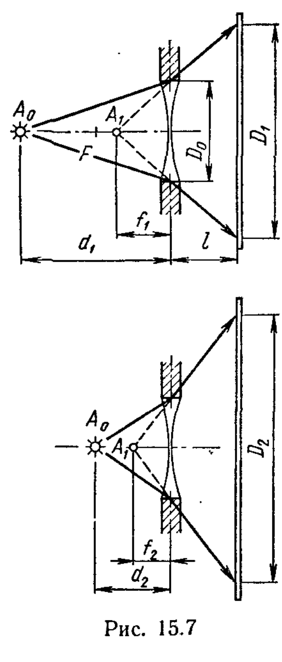

Рис. 15.7

Р е ш е н и е. Допустим, что в первом положении светящаяся точка A_0 находится от рассеивающей линзы на расстоянии $d_1 > F$. Лучи, вышедшие из точки A_0, падают на линзу расходящимся пучком, преломляются в ней и, рассеявшись, дают на экране светлое пятно диаметром D_1. Как видно из чертежа, лучи, образующие это пятно, идут на экран так, словно они выходят из светящейся точки A_1, являющейся изображением предмета A_0.

Во втором положении, когда светящаяся точка A_0 находится в фокусе линзы, диаметр светлого пятна на экране увеличивается, поскольку здесь лучи падают на линзу под бо́льшим углом. Они освещают экран так, как если бы шли из точки A_1, являющейся изображением точки A_0. Обратите внимание: изображение предмета, расположенного в фокальной плоскости рассеивающей линзы, находится посредине между этой плоскостью и линзой.

Диаметр светлого пятна D_2, которое получается при внесении источника в фокус линзы, легко найти, зная фокусное расстояние линзы F. Для его определения рассмотрим первое положение системы.

Если f_1 — расстояние от мнимого изображения A_1 до рассеивающей линзы, то

$$-\frac{1}{F}=\frac{1}{d_1}-\frac{1}{f_1}. \tag{1}$$

Из подобия треугольников можно записать:

$$\frac{D_1}{D_0}=\frac{f_1+l}{f_1}. \tag{2}$$

Для второго положения источника формула рассеивающей линзы дает:

$$f_2=\frac{F}{2}, \tag{3}$$

так как $d_2=F$.

Аналогично равенству (2) мы находим:

$$\frac{D_2}{D_1}=\frac{f_2+l}{f_2}. \tag{4}$$

Решая уравнения (1) — (4) относительно D_2, получим:

$$D_2=2D_1-\frac{2l+d_1}{d_1}D_0.$$

Пример 7. Воздушная полость в стекле имеет форму плосковыпуклой линзы. Найдите фокусное расстояние этой линзы, если известно, что фокусное расстояние стеклянной линзы, совпадающей по форме с полостью, равно в воздухе F_0.

Р е ш е н и е. Согласно формуле (15.5) плоско-выпуклая линза ($R_1=\infty$, $R_2=R$) может быть и собирающей и рассеивающей в зависимости от того, что больше, показатель преломления материала линзы или показатель преломления среды, в которой находится линза. В первом случае, когда воздушная линза находится в стекле ($n_л=1$, $n_{ср}=n$), ее оптическая сила равна:

$$\frac{1}{F_1}=\left(\frac{1}{n}-1\right)\frac{1}{R}. \tag{1}$$

Во втором случае, когда стеклянная линза находится в воздухе ($n_л = n$, $n_{ср} = 1$),

$$\frac{1}{F_0} = (n-1)\frac{1}{R}. \qquad (2)$$

Из уравнений (1), (2) находим:

$$F_1 = -nF_0.$$

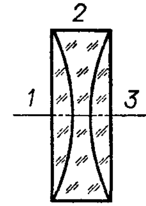

Рис. 15.8

Пример 8. Из плоскопараллельной стеклянной пластинки изготовили три линзы (рис. 15.8). Фокусное расстояние линз *1* и *2*, сложенных вместе, равно $-F'$, фокусное расстояние линз *2* и *3* равно $-F''$. Определите фокусное расстояние каждой линзы.

Решение. Как видно из рисунка, первая и третья линзы плоско-выпуклые, их оптические силы равны $1/F_1$ и $1/F_3$, вторая линза двояковогнутая, ее оптическая сила равна $-1/F_2$.

Если три линзы сложены вместе и образуют плоскопараллельную пластинку, оптическая сила системы равна нулю, так как обе поверхности у нее плоские ($R_1 = \infty$ и $R_2 = \infty$). Для этого случая формула (15.9) дает:

$$\frac{1}{F_1} - \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_3} = 0. \qquad (1)$$

Согласно условию задачи, если сложить первую линзу со второй, фокусное расстояние системы будет равно $-F'$, следовательно,

$$\frac{1}{F_1} - \frac{1}{F_2} = -\frac{1}{F'}. \qquad (2)$$

При сложении второй линзы с третьей фокусное расстояние оптической системы оказывается равным $-F''$, следовательно,

$$-\frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_3} = -\frac{1}{F''}. \qquad (3)$$

Решая уравнения (1) — (3) совместно, находим:

$$F_1 = F''; \quad F_2 = \frac{F'F''}{F' + F''}; \quad F_3 = F'.$$

Пример 9. Две тонкие собирающие линзы с фокусными расстояниями $F_1 = 20$ см и $F_2 = 15$ см, сложенные вплотную, дают четкое изображение предмета на экране, если предмет находится на расстоянии $d = 15$ см от первой линзы. На сколько нужно передвинуть экран, чтобы на нем получилось четкое изображение предмета, если вторую линзу отодвинуть от первой на расстояние $l = 5$ см?

Решение. Если перед оптической системой, состоящей из двух тонких линз, сложенных вместе, расположить предмет на таком расстоянии d, чтобы его действительное изображение четко проецировалось на экран, удаленный от линз на расстояние f_1, то должно выполняться равенство:

$$\frac{1}{F_c}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f_1}. \qquad (1)$$

В этом уравнении $\frac{1}{F_c}$ представляет оптическую силу двух собирающих линз с фокусными расстояниями F_1 и F_2, сложенных вплотную, поэтому

$$\frac{1}{F_c}=\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}. \qquad (2)$$

Из уравнений (1), (2) находим:

$$f_1=\frac{F_1F_2d}{(F_1+F_2)d-F_1F_2}; \quad f_1=20 \text{ см}.$$

Если, не меняя положения предмета, вторую линзу отодвинуть на расстояние l, фокусное расстояние системы изменится, и при том же положении предмета четкое изображение получится на расстоянии f_2 от второй линзы. Чтобы это изображение попало на экран, экран придется передвинуть на некоторое расстояние x, которое нам и требуется определить. Предположим, что экран нужно приблизить ко второму стеклу, тогда должно быть

$$x=f_1-f_2-l. \qquad (3)$$

Для определения f_2 найдем прежде всего изображение предмета в первой линзе, как если бы второй не было. Из формулы $\frac{1}{F_1}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f_1'}$, подставляя числовые значения, сразу находим $f_1'=-60$ см. Знак «минус» указывает на то, что в первой линзе изображение предмета будет мнимым и его можно рассматривать как действительный предмет для второго стекла, удаленный от него на расстояние $d_2=|f_1'|+l=65$ см. Считая полученное изображение предметом для второй линзы, можно записать $\frac{1}{F_2}=\frac{1}{d_2}+\frac{1}{f_2}$, откуда расстояние f_2 от второй линзы до окончательного изображения получается равным $f_2=\frac{F_2d_2}{d_2-F_2}=19{,}5$ см.

В соответствии с формулой (3) для x получаем: $x=-4{,}5$ см. Знак «минус» показывает, что наше предположенне о направлении смещения экрана было неправильным и его нужно отодвинуть от второй линзы, а не придвинуть к ней.

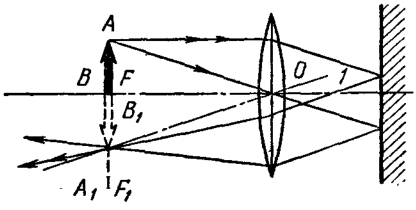

Рис. 15.9

Полученное нами значение для f_2 можно было бы сразу найти и по формуле (15.7).

Пример 10. В фокусе собирающей линзы (рис. 15.9) расположен предмет AB высотой H. По другую сторону линзы перпендикулярно главной оптической оси находится плоское зеркало. Где получится изображение предмета и каков размер этого изображения?

Решение. Выберем из пучка лучей, падающих на линзу из точки A предмета, два луча: проходящий через оптический центр (он отмечен одной стрелкой) и идущий параллельно главной оптической оси (он отмечен двумя стрелками). Точка A расположена в фокальной плоскости линзы, поэтому все лучи, выходящие из этой точки и попадающие на линзу, после преломления пойдут параллельным пучком. Падая на плоское зеркало, такой пучок отразится и пойдет на линзу также параллельным пучком, под тем же углом, под которым он падал на зеркало.

Чтобы проследить ход пучка после вторичного преломления в линзе, проведем побочную оптическую ось I, параллельную отраженным лучам, и найдем на ней побочный фокус F_1. Преломившись в линзе, лучи должны пройти через точку F_1 и дать в ней действительное изображение точки A. Как видно из чертежа, в прямоугольных треугольниках AOB и A_1OB_1 сторона OB общая и $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A_1OB_1$, поэтому эти треугольники равны, и, следовательно, размер изображения равен размеру предмета.

Таким образом, изображение получается действительным, обратным, равным по размерам предмету и находится в той же фокальной плоскости, в которой расположен предмет. Этот результат, как нетрудно заметить, не зависит от положения зеркала, лишь бы оно стояло перпендикулярно главной оптической оси.

Пример 11. Плоская поверхность плоско-вогнутой линзы с фокусным расстоянием F посеребрена. На расстоянии d_1 от вогнутой поверхности линзы расположен точечный источник света (рис. 15.10). Где будет находиться изображение источника?

Решение. Допустим, что на плоско-вогнутую линзу с фокусным расстоянием F падает пучок лучей, выходящий из точки A_0, расположенной на главной оптической оси на расстоянии d_1 от линзы. Выберем из этого потока два луча: идущий на оптический центр и произвольный луч A_0B — и проследим их ход в данной системе.

Первый луч пройдет через линзу не преломляясь, упадет на посеребренную поверхность и отразится назад по тому же направлению. Второй луч, преломившись в линзе, падает на посеребренную поверхность зеркала так, как если бы он выходил из точки A_1, являющейся мнимым изображением предмета A_0. Графически положение точки A_1 находится с по-

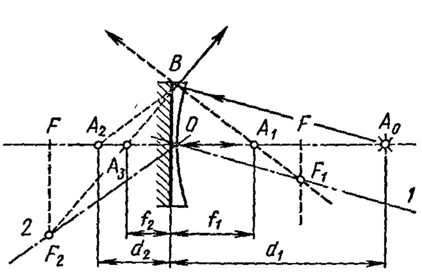

Рис. 15.10

мощью побочной оптической оси *1*, проведенной параллельно лучу A_0B. После преломления луч должен своим продолжением попасть в побочный фокус F_1. Там, где продолжение луча пересекается с главной оптической осью, и находится точка A_1. Аналитически расстояние f_1 от точки A_1 до линзы определяется из уравнения

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d_1}-\frac{1}{f_1}. \qquad (1)$$

Пройдя через линзу, луч A_0B сразу же отразится от зеркальной поверхности под тем же углом, под которым он падал. Направление отраженного луча таково, как если бы он выходил из точки A_2, являющейся изображением точки A_1 в плоском зеркале. Нетрудно заметить, что точка A_2 лежит слева от линзы на расстоянии

$$d_2=f_1. \qquad (2)$$

Далее отраженный луч еще раз преломится в линзе и даст окончательное изображение A_3 в точке пересечения его продолжения с продолжением луча A_0O. Ход этого луча построен с помощью побочной оси *2*.

Чтобы найти расстояние f_2 от точки A_3 до линзы, нужно использовать еще раз формулу рассеивающей линзы, рассматривая промежуточное изображение A_2 в зеркале как действительный предмет для рассеивающей линзы. Лучи будут падать на линзу расходящимся пучком так, как если бы в точке A_2 был расположен действительный источник:

$$-\frac{1}{F}=\frac{1}{d_2}-\frac{1}{f_2}. \qquad (3)$$

Из уравнений (1)—(3) находим:

$$f_2=\frac{d_1F}{2d_1+F}.$$

Из построения видно, что при любом положении A_0 ее окончательное изображение — точка A_3 — будет всегда мнимым, поскольку промежуточное изображение A_2 всегда оказывается за линзой. Полученный нами результат сразу же вытекает из формул для посеребренной линзы (15.17) и (15.18). Полагая в них $F_л=-F$, $F_з=\infty$, будем иметь:

$$-\frac{2}{F}=\frac{1}{d_1}-\frac{1}{f_2}, \quad \text{откуда} \quad f_2=\frac{d_1F}{2d_1+F}.$$

Пример 12. Наблюдатель с нормальным зрением рассматривает Луну в телескоп, объектив и окуляр которого имеют фокусные расстояния, соответственно равные $F_{об}=2$ см и $F_{ок}=5$ см. На сколько нужно раздвинуть трубу, чтобы получить изображение Луны на экране на расстоянии $f_2'=25$ см от окуляра? Какова будет при этом величина изображения Луны, если невооруженным глазом ее видно под углом $\alpha=30'$?

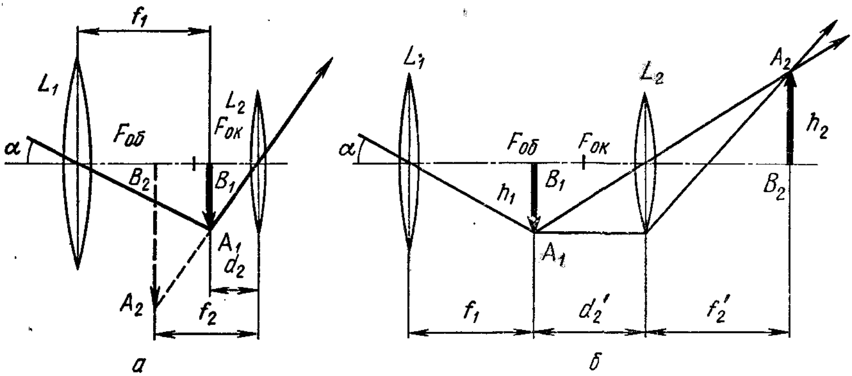

Рис. 15.11

Решение. Если лучи, идущие от удаленного предмета, попадают в трубу Кеплера, то в зависимости от расстояния между ее объективом и окуляром окончательное изображение объекта может получиться или мнимым, или действительным. В первом случае изображение можно увидеть глазом, во втором — спроецировать на экран. Если линзы объектива L_1 и окуляра L_2 установлены так, что изображение Луны рассматривают нормальным глазом с расстояния наилучшего зрения, то ее промежуточное изображение A_1B_1 практически находится в фокальной плоскости объектива (при $d_1 \gg F_{об}$, $f_1 \approx F_{об}$). Оно будет действительным, перевернутым и сильно уменьшенным (рис. 15.11, *а*). Для простоты построения изображения трубу удобно расположить так, чтобы весь предмет лежал по одну сторону от главной оптической оси, как показано на рисунке. Для построения промежуточного изображения удаленных предметов в зрительных трубах достаточно использовать лишь луч, проходящий через оптический центр объектива, учитывая, что положение в этом случае всегда известно — практически оно лежит в его фокальной плоскости.

Промежуточное изображение, даваемое объективом, можно рассматривать как предмет для окуляра, поскольку от этого изображения, например от точки A_1, лучи идут на вторую линзу расходящимся пучком, как если бы они выходили из действительного источника.

Чтобы окончательное изображение Луны A_2B_2 оказалось мнимым и находилось на расстоянии наилучшего зрения $f_2 = 25$ см, окуляр нужно расположить так, чтобы A_1B_1 попадало между $F_{ок}$ и L_2. Расстояние d_2 между окуляром и изображением A_1B_1 должно при этом удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{F_{ок}} = \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2}. \qquad (1)$$

Для проецирования изображения Луны на экран линзу окуляра нужно сместить от промежуточного изображения A_1B_1 так, чтобы оно попало между фокусом и двойным фокусом окуляра (рис. 15.11, *б*).

Если резкое изображенне A_2B_2 проецируется на экран, отстоящий от линзы L_2 на расстоянии f_2', окуляр нужно отодвинуть от объектива настолько, чтобы предмет A_1B_1 находился от линзы L_2 на расстоянии d_2', удовлетворящем уравнению

$$\frac{1}{F_{ок}}=\frac{1}{d_2'}+\frac{1}{f_2'}. \qquad (2)$$

Как видно из чертежа, окуляр для этого необходимо передвинуть вправо от начального положения на расстояние

$$x=d_2'-d_2. \qquad (3)$$

Линейные размеры изображения Луны на экране можно определить из формулы увеличения линзы, зная угол α, под которым Луну видно невооруженным глазом, и фокусное расстояние объектива $F_{об}$:

$$h_2=\frac{f_2'}{d_2'}h_1.$$

Но $h_1=F_{об}\operatorname{tg}\alpha\approx F_{об}\alpha$ (поскольку угол α очень мал), поэтому высота изображения Луны на экране будет равна:

$$h_2\approx\frac{f_2'}{d_2'}F_{об}\alpha. \qquad (4)$$

Решая уравнения (1) — (4) совместно относительно неизвестных величин d_2 и d_2' и подставляя числовые значения, получим:

$$d_2=\frac{f_2F_{ок}}{f_2+F_{ок}}; \quad d_2=4{,}16\ \text{см}; \quad d_2'=\frac{f_2'F_{ок}}{f_2'-F_{ок}}; \quad d_2'=6{,}25\ \text{см}.$$

После этого будем иметь: $x=6{,}25\ \text{см}-4{,}16\ \text{см}\approx2\ \text{см}$; $h_2=7\ \text{см}$.

Пример 13. Зритель с нормальным зрением смотрит через театральный бинокль на сцену, находящуюся от него на значительном расстоянии. Оптическая сила объектива $\frac{1}{F_{об}}=5$ дптр, окуляра $\frac{1}{F_{ок}}=-25$ дптр. На каком расстоянии должны быть расположены объектив и окуляр бинокля, чтобы зритель четко видел сцену? На сколько нужно сместить окуляр, чтобы сцену можно было рассматривать глазом, аккомодированным на бесконечность?

Решение. Чтобы зритель с нормальным зрением хорошо видел в театральный бинокль действие, происходящее на сцене, необходимо, чтобы окончательное изображение предмета, даваемое системой линз трубы Галилея, получалось на расстоянии наилучшего зрения. Так как сцена находится на очень большом расстоянии от зрителя ($d_1 \gg F_{об}$), то изображение A_1B_1, даваемое объективом L_1, получается на ничтожно малом расстоянии от фокальной плоскости линзы ($f_1 \approx F_{об}$) (рис. 15.12).

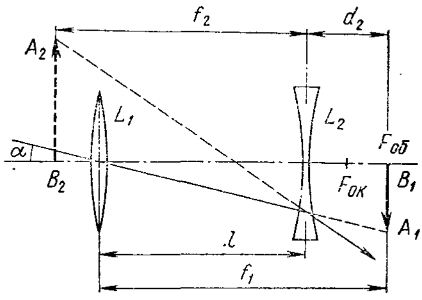

Рис. 15.12

В трубе Галилея рассеивающая линза окуляра ставится перед фокальной плоскостью объектива, поэтому лучи, которые давали бы изображение A_1B_1, падают на линзу L сходящимся пучком и A_1B_1 можно рассматривать как мнимый предмет для окуляра, отстоящий от него на расстоянии

$$d_2 = F_{об} - l_1, \tag{1}$$

где l_1 — расстояние между линзами бинокля.

После преломления в окуляре лучи, идущие в точку A_1, пойдут расходящимся пучком и на своем продолжении дадут окончательное мнимое изображение A_2. Из всего пучка лучей, идущих от предмета на объектив, на чертеже указан лишь один, поскольку положение изображения известно.

Расстояние d_2, а следовательно, и расстояние l_1 должны быть при этом подобраны так, чтобы изображение сцены A_2B_2 получалось в окуляре на расстоянии $f_2 = 25$ см. Изображение мнимого предмета A_1B_1 в окуляре является мнимым, поэтому формула рассеивающей линзы для этого случая дает

$$-\frac{1}{F_{ок}} = -\frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2}. \tag{2}$$

Из уравнений (1), (2) находим:

$$d_2 = \frac{f_2F_{ок}}{f_2 - F_{ок}}; \quad d_2 = 4{,}76 \text{ см}; \quad l_1 = F_{об} - d_2 = 15{,}24 \text{ см}.$$

Чтобы видеть сцену глазом, аккомодированным на бесконечность, линзы бинокля необходимо установить таким образом, чтобы изображение A_2B_2 получилось не на расстоянии наилучшего зрения, а очень далеко. Этого можно добиться, изменяя расстояние l между объективом и окуляром. Полагая в уравнении (2) $f_2 = \infty$, получим: $d_2 = F_{ок}$, и согласно формуле (1) будем иметь:

$$l_2 = F_{об} - F_{ок} = 16 \text{ см}.$$

В этом случае фокальные плоскости объектива и окуляра должны быть совмещены. По сравнению с первым расположением линзы нужно раздвинуть на расстояние

$$\Delta l = l_2 - l_1 = 0{,}76 \text{ см}.$$

Пример 14. В микроскопе фокусное расстояние объектива равно $F_{об} = 5{,}4$ мм, окуляра $F_{ок} = 20$ мм. Каково будет увеличение предмета, находящегося от объектива на расстоянии $d_1 = 5{,}6$ мм, если его рассматривать глазом с нормальным зрением? Какова будет при этом длина тубуса?

Решение. Если предмет AB поместить на расстоянии d_1 от объектива микроскопа (между $F_{об}$ и $2F_{об}$, ближе к $F_{об}$), его изображение A_1B_1 будет находиться от объектива на расстоянии f_1, удовлетворяющем уравнению

$$\frac{1}{F_{об}} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}. \qquad (1)$$

Изображение предмета будет увеличено при этом в

$$\Gamma = \frac{f_1}{d_1} \text{ раз}. \qquad (2)$$

Окуляр располагают относительно изображения A_1B_1 так, чтобы оно рассматривалось через него как через лупу. Окончательное изображение A_2B_2 будет мнимым и будет отстоять от окуляра на расстоянии наилучшего зрения нормального глаза $f_2 = 25$ см, если расстояние d_2 от окуляра до промежуточного изображения — предмета A_1B_1 подобрано так, что оно удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{F_{ок}} = \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2}. \qquad (3)$$

Увеличение изображения A_1B_1, даваемое окуляром, при этом окажется равным:

$$\Gamma = \frac{f_2}{d_2}. \qquad (4)$$

Полное увеличение оптической системы, состоящей из двух линз, равно произведению увеличений, даваемых каждой линзой в отдельности, поэтому увеличение микроскопа равно произведению увеличений объектива и окуляра:

$$\Gamma = \Gamma_{об}\Gamma_{ок}. \qquad (5)$$

Расстояние между линзами — длина тубуса микроскопа — равно:

$$l = f_1 + d_2. \qquad (6)$$

Составленная система уравнений является основной системой для расчета увеличения микроскопа. В данной задаче Γ_1, Γ_2, Γ, d_2 и f_1 неизвестны, величины $F_{об}$, $F_{ок}$, d_1 и f_2 заданы. Решая уравнения (1) — (6) относительно искомых неизвестных — увеличения микроскопа и длины тубуса, после подстановки числовых значений получим:

$$\Gamma = \frac{\Gamma_{об}(f_2 + F_{ок})}{F_{ок}(d_1 - F_{об})}; \quad \Gamma = 365; \quad l = \frac{d_1F_{об}}{d_1 - F_{об}} + \frac{f_2F_{ок}}{f_2 + F_{ок}}; \quad l = 17 \text{ см}.$$