ЛЕКЦИЯ 3

§ 11. Линейный гармонический осциллятор. Стационарные состояния

Рассмотрим одну из простейших механических систем — частицу с массой μ, движущуюся в одномерном поле с потенциальной энергией

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2. \tag{11.1}$$

Из классической механики известно, что частица, находящаяся в таком поле, совершает гармоническое колебательное движение вдоль оси x относительно точки $x = 0$ с частотой

$$\omega = (k/\mu)^{1/2}, \tag{11.2}$$

т. е. координата частицы в момент времени t есть

$$x = a\cos(\omega t + \varphi), \tag{11.3}$$

где a — амплитуда колебаний, φ — фаза колебаний при $t = 0$. При этом полная энергия частицы есть

$$E = \frac{1}{2}\mu\omega^2 a^2, \tag{11.4}$$

т. е. при фиксированных μ и k она определяется амплитудой a и не зависит от начальной фазы φ.

Решение этой же задачи в квантовой механике состоит в нахождении всех функций, удовлетворяющих уравнению Шредингера (6.1) и соответствующим начальным условиям.

Начнем с нахождения тех решений уравнения Шредингера, которые описывают стационарные состояния. В общем случае для этого надо найти все решения стационарного уравнения Шредингера (9.1), принадлежащие области определения гамильтониана $\widehat{H}$ в пространстве L_2. В нашем случае волновые функции $\psi(x)$ зависят только от переменной x, а гамильтониан $\widehat{H}$ согласно (3.10), (11.1) и (11.2) имеет вид

$$\widehat{H} = \widehat{T} + \widehat{V} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2. \tag{11.5}$$

Отметим, что уравнение (9.1) инвариантно относительно изменения начала отсчета полной и потенциальной энергии. Поэтому начало отсчета энергии можно выбирать исходя из соображений математического удобства. Мы совместим его с минимумом потенциальной энергии $V(0) = 0$.

Таким образом, наша задача сводится к решению одномерного уравнения

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\Big(E - \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2\Big)\psi(x) = 0. \tag{11.6}$$

Для этого удобно ввести безразмерные величины

$$\xi = \frac{x}{b}, \qquad \varepsilon = \frac{E}{E_0}, \tag{11.7}$$

где

$$b = \left[\frac{\hbar}{(\mu\omega)}\right]^{1/2}, \qquad E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}. \tag{11.8}$$

Будем искать решение уравнения (11.6) в виде

$$\psi(x) = v(\xi)\exp\Big(-\frac{1}{2}\xi^2\Big), \tag{11.9}$$

где $v(\xi)$ — некоторая непрерывная функция, имеющая непрерывную производную и удовлетворяющая условию квадратичной интегрируемости $\psi(x)$. Подставляя (11.9) в (11.6), получаем для $v(\xi)$ уравнение

$$v''(\xi) - 2\xi v'(\xi) + (\varepsilon - 1)v(\xi) = 0. \tag{11.10}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде полинома

$$v(\xi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \xi^k. \tag{11.11}$$

Подставляя (11.11) в (11.10), получаем

$$a_{k+2} = \frac{2k + 1 - \varepsilon}{(k+1)(k+2)} a_k. \tag{11.12}$$

Это есть рекуррентное соотношение для коэффициентов искомого многочлена $v(\xi)$. Задавая произвольно значения a_0 и a_1, получаем все остальные коэффициенты a_2, a_3, …, a_n. Величины a_0 и a_1

здесь играют роль констант интегрирования дифференциального уравнения 2-го порядка (11.10). Определим их из условий, которым должна удовлетворять функция $\psi(x)$, следовательно, и $v(\xi)$.

Одним из них является квадратичная интегрируемость функции $\psi(x)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\, dx = 1. \tag{11.13}$$

Покажем, что это условие выполняется только в том случае, когда ряд (11.11) содержит конечное количество членов. Для доказательства от противного предположим, что ряд (11.11) с коэффициентами, удовлетворяющими условию (11.12), бесконечен. Поскольку ε есть некоторое конечное число, то остаток ряда будет знакопостоянным и при больших значениях k будет сходиться к остатку степенного ряда функции

$$e^{\xi^2} = \sum_{k=0,2,4,\ldots}^{\infty} \frac{1}{(k/2)!}\xi^k. \tag{11.14}$$

Действительно, из (11.12) имеем

$$\frac{a_{k+2}}{a_k} \to \frac{2}{k} \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

что совпадает с отношением соответствующих коэффициентов ряда (11.14). Следовательно,

$$v(\xi) \to \exp(\xi^2) \quad \text{при} \quad \xi \to \infty,$$

$$\psi(x) = v(\xi)\exp\Bigl(-\frac{1}{2}\xi^2\Bigr) \to \exp\Bigl(-\frac{1}{2}\Bigl(\frac{x}{b}\Bigr)^2\Bigr) \quad \text{при} \quad x \to \pm\infty,$$

т. е. $\psi(x)$ не является квадратично интегрируемой. Поэтому константы интегрирования a_0 и a_1 должны быть выбраны такими, чтобы ряд (11.11) содержал конечное количество членов.

Пусть $a_n\xi^n$ будет последним членом ряда, т. е.

$$a_n \neq 0, \qquad a_k = 0 \quad \text{при} \quad k > n. \tag{11.15}$$

В частности, для $k = n + 2$ получаем

$$a_{n+2} = \frac{2n + 1 - \varepsilon}{(n+1)(n+2)}a_n = 0,$$

откуда

$$2n + 1 - \varepsilon = 0,$$

т. е. для того, чтобы ряд (11.11) был полиномом степени n, необходимо, чтобы собственное значение ε удовлетворяло соотношению

$$\varepsilon = 2n + 1. \tag{11.16}$$

Согласно (11.15) для $k = n + 1$ имеем

$$a_{n+1} = 0.$$

Отсюда в соответствии с (11.12) и (11.16) следует, что

$$a_{n-1} = 0.$$

Используя рекуррентное соотношение (11.12), последовательно получаем: $a_{n-3} = 0$, $a_{n-5} = 0$, ..., $a_0 = 0$ при нечетном n или $a_{n-3} = 0$, $a_{n-5} = 0$, ..., $a_1 = 0$ при четном n. Следовательно, другим необходимым условием конечности ряда (11.11) является:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \quad \text{если } n \text{ нечетно}, \\ a_1 &= 0, \quad \text{если } n \text{ четно}. \end{aligned} \tag{11.17}$$

Нетрудно видеть, что совокупность условий (11.16) и (11.17) является достаточным условием конечности ряда (11.11), т. е. квадратичной интегрируемости функции (11.9). Таким образом, остается одна произвольная константа (a_0 при четном n и a_1 при нечетном n). Это находится в соответствии с инвариантностью решений однородного уравнения (11.6) относительно операции умножения на произвольное число. Если выбрать $a_n = 2^n$, то полином

$$v(\xi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \xi^k,$$

коэффициенты которого удовлетворяют всем наложенным выше условиям, совпадает с полиномом Эрмита $H_n(\xi)$ (см. Дополнение 6).

Итак, наша задача на собственные значения (11.6) имеет решения

$$\psi_n(x) = c_n H_n\left(\frac{x}{b}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{b}\right)^2\right), \tag{11.18}$$

соответствующие собственным значениям

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{11.19}$$

Таким образом, спектр гамильтониана линейного гармонического осциллятора представляет собой эквидистантную систему энергетических уровней, причем минимальное значение энергии есть $E_0 = \hbar\omega/2$, а расстояние между соседними уровнями равняется $\hbar\omega$. Нормируя собственные функции $\psi_n(x/b)$ на единицу, получим

$$c_n = (2^n n!\,\pi^{1/2} b)^{-1/2}. \tag{11.20}$$

Теперь видно, что, получив уравнение (11.10), мы могли бы и не проводить дальнейших выкладок, а, сославшись на математику, сразу записать условие (11.16) и выразить решение этого хорошо известного в теории специальных функций уравнения через полиномы Эрмита. В дальнейшем всякий раз, решая задачу на собственные значения гамильтониана, подобную рассмотренной сейчас, мы так и будем поступать.

Нормированные волновые функции первых трех стационарных состояний линейного гармонического осциллятора имеют вид:

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{b\sqrt{\pi}}}\exp(-x^2/(2b^2)), \tag{11.21}$$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2b\sqrt{\pi}}}\frac{2x}{b}\exp(-x^2/(2b^2)), \tag{11.22}$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2b\sqrt{\pi}}}\left(\frac{2x^2}{b^2} - 1\right)\exp(-x^2/(2b^2)). \tag{11.23}$$

Отметим, что количество узлов функции $\psi_n(\xi)$ есть n, т. е. чем больше энергия состояния, тем сильнее осциллирует волновая функция. Графики первых трех функций приведены на рис. 1.

Плотность распределения вероятности обнаружить частицу в окрестности точки x в соответствии с (1.2) есть $\rho_n(x) = |\psi_n(x)|^2$.

На рис. 2 представлены графики этой функции для $n = 0,\ 1,\ 2,\ 10$.

Найденный набор функций $\{\psi_n(x)\}_0^\infty$ является ортонормированным:

$$\langle\psi_n|\psi_m\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x)\psi_m(x)\,dx = \delta_{nm}, \tag{11.24}$$

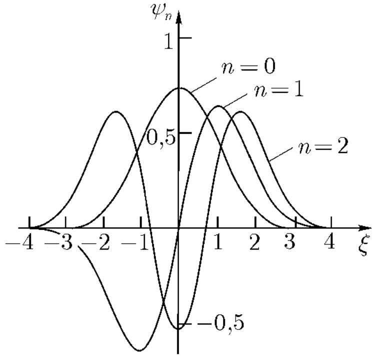

Рис. 1. Волновая функция $\psi_n(\xi)$ линейного гармонического осциллятора при $n = 0,\ 1,\ 2$

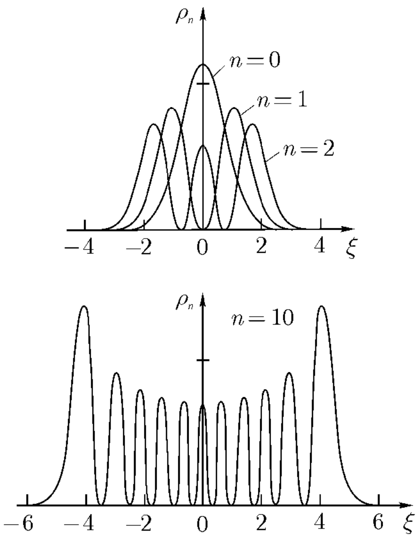

Рис. 2. Плотность $\rho_n(\xi)$ координатного распределения линейного гармонического осциллятора при $n = 0,\ 1,\ 2,\ 10$

как этого требует общая теорема, доказанная в Дополнении 2. Правильность этого соотношения легко проверить непосредственно, используя ортонормированность полиномов Эрмита (6). Также можно доказать, что этот набор является полным в пространстве L_2, т. е. мы нашли все собственные векторы оператора $\widehat{H}$, а его непрерывный спектр пуст. Условие полноты набора $\{\psi_n\}_0^\infty$ в соответствии с (1) можно записать в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x)\psi_n^*(x') = \delta(x - x'). \tag{11.25}$$

Теперь подведем итоги и сравним полученные результаты с теми, которые были приведены в начале параграфа для классического линейного гармонического осциллятора.

1. В стационарном состоянии полная энергия квантового осциллятора в отличие от классического не может быть произвольной, а «квантуется»; она должна удовлетворять соотношению (11.19). Энергию $\hbar\omega$ можно рассматривать как величину кванта колебаний и считать, что в состоянии с энергией E_n имеется n квантов.

2. Минимальное значение $E_0 = \hbar\omega/2$ лежит выше минимума потенциальной энергии $V = 0$ («нулевые колебания» осциллятора).

3. Квантовая частица может заходить за классические «точки поворота» $x = \pm x_n$, определяемые условием $V(x_n) = E_n$, т. е. находиться в тех областях пространства, где движение классической частицы с такой же полной энергией запрещено. Однако вероятность пребывания частицы в этих областях очень быстро убывает по мере удаления от области, разрешенной для классического движения. Классическое движение строго финитно. Что же касается квантового осциллятора, то его движение можно считать финитным только условно.

4. Каждому энергетическому уровню E_n соответствует только одно состояние (11.18), т. е. спектр гармонического осциллятора невырожден.

5. Полином Эрмита $H_n(\xi)$ при четном значении n содержит только четные степени аргумента, а при нечетном n — только нечетные степени. Поэтому все состояния с четными (нечетными) n описываются четными (нечетными) волновыми функциями.

В следующем параграфе мы специально рассмотрим вопрос о четности волновой функции. А сейчас остановимся на заключении, которое сформулировано в пункте 4. Мы покажем, что этот результат не случаен и в то же время не связан с какими-либо специфическими особенностями осциллятора. Оказывается, что при одномерном движении частицы собственные значения гамильтониана невырождены всегда, независимо от вида потенциала $V(x)$.

Докажем это утверждение от противного.

Допустим, что некоторое собственное значение E является вырожденным и ему соответствуют две линейно независимые функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$:

$$\psi_1''(x) + \left(\frac{2\mu}{\hbar^2}\right)(E - V(x))\psi_1(x) = 0,$$

$$\psi_2''(x) + \left(\frac{2\mu}{\hbar^2}\right)(E - V(x))\psi_2(x) = 0.$$

Умножим первое уравнение на ψ_2, второе — на ψ_1 и из первого результата вычтем второй; тогда получим

$$\psi_2\psi_1'' - \psi_1\psi_2'' = 0,$$

т. е.

$$\frac{d}{dx}\left(\psi_2\frac{d\psi_1}{dx} - \psi_1\frac{d\psi_2}{dx}\right) = 0.$$

Следовательно,

$$\psi_2\psi_1' - \psi_1\psi_2' = C,$$

где C — некоторая константа. Для ее определения рассмотрим предел левой части равенства при $|x| \to \infty$. Поскольку по условию E есть точка дискретного спектра, то $\lim\limits_{|x|\to\infty} \psi_{1,2} = 0$, т. е. $C = 0$. Следовательно,

$$\psi_2\, d\psi_1 = \psi_1\, d\psi_2,$$

откуда

$$\psi_1 = a\psi_2,$$

где a — некоторая константа.

Таким образом, ψ_1 и ψ_2 линейно зависимы, что противоречит исходному предположению.

§ 12. Четность состояния

В § 11 мы видели, что волновые функции всех стационарных состояний линейного гармонического осциллятора имеют определенную четность. Покажем, что это свойство присуще всем стационарным состояниям дискретного спектра любого одномерного четного гамильтониана

$$\widehat{H}(-x) = \widehat{H}(x).$$

Введем новый оператор $\widehat{P}$ — *оператор пространственной инверсии*, который определен во всем пространстве L_2 и действует по правилу

$$\widehat{P}\psi(\mathbf{r}) = \psi(-\mathbf{r}), \tag{12.1}$$

т. е. он реализует преобразование инверсии (или пространственного отражения):

$$x \to -x, \quad y \to -y, \quad z \to -z.$$

В результате этого преобразования правая переходит в левую и наоборот.

Если гамильтониан системы инвариантен относительно этого преобразования, то

$$\widehat{P}\widehat{H}(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = \widehat{H}(-\mathbf{r})\psi(-\mathbf{r}) = \widehat{H}(\mathbf{r})\psi(-\mathbf{r}) = \widehat{H}(\mathbf{r})\widehat{P}\psi(\mathbf{r}),$$

т. е.

$$\widehat{P}\widehat{H} = \widehat{H}\widehat{P}.$$

Следовательно, в этом случае гамильтониан коммутирует с оператором инверсии.

Таким образом, если гамильтониан является четной функцией пространственных координат

$$\widehat{H}(-\mathbf{r}) = \widehat{H}(\mathbf{r}), \tag{12.2}$$

то в системе, описываемой этим гамильтонианом, имеется специфический для квантовой механики интеграл движения — *четность*. В дальнейшем мы увидим, что инвариантность гамильтониана системы относительно какого-либо преобразования обобщенных координат всегда связана с существованием для этой системы некоторого интеграла движения.

Легко проверить, что оператор $\widehat{P}$ эрмитов. Поэтому его собственные значения должны быть вещественными. Найдем их:

$$\widehat{P}\psi(\mathbf{r}) = P\psi(\mathbf{r}),$$

т. е.

$$\psi(-\mathbf{r}) = P\psi(\mathbf{r}).$$

Подействуем на обе части этого равенства оператором $\widehat{P}$:

$$\widehat{P}\psi(-\mathbf{r}) = P\widehat{P}\psi(\mathbf{r}), \qquad \psi(\mathbf{r}) = P^2\psi(\mathbf{r}),$$

т. е. $P^2 = 1$, $P = \pm 1$.

Таким образом, оператор инверсии имеет два собственных значения (± 1), а все его собственные функции распадаются на два класса:

1) четные функции $\psi(-\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})$, $P = 1$,

2) нечетные функции $\psi(-\mathbf{r}) = -\psi(\mathbf{r})$, $P = -1$.

Собственные значения оператора инверсии ($P = \pm 1$) называются четностью. Состояния, описываемые четными (нечетными) функциями, называются четными (нечетными).

Если гамильтониан системы коммутирует с оператором инверсии, то в соответствии с теоремой, приведенной в § 4, существует общий полный набор собственных функций этих двух операторов. Каждое из состояний, описываемых этими функциями, является либо четным, либо нечетным.

Пусть E — невырожденное собственное значение четного гамильтониана:

$$\widehat{H}\psi_E(\mathbf{r}) = E\psi_E(\mathbf{r}).$$

Тогда $\widehat{P}\psi_E(\mathbf{r})$ — тоже собственная функция этого гамильтониана, принадлежащая тому же собственному значению

$$\widehat{P}\psi_E(\mathbf{r}) = P\psi_E(\mathbf{r}).$$

Следовательно, $\psi_E(\mathbf{r})$ — собственная функция оператора инверсии, т. е. она обладает определенной четностью.

§ 13. Осциллирующий волновой пакет

Вернемся к линейному гармоническому осциллятору. В § 11 мы установили свойства его стационарных состояний и обнаружили, что, несмотря на принципиальные отличия квантово-механического описания от классического (квантование энергии колебаний, возможность проникновения в область, где полная энергия меньше потенциальной и т. д.), в то же время существует и определенное сходство в движении квантового и классического осцилляторов. Продолжим это сопоставление.

В классической механике мы обычно имеем дело со следующей задачей: в момент времени $t = 0$ задаются отклонение $x(0) = x_0$ и начальный импульс $p(0) = p_0$; требуется найти отклонение $x(t)$ и импульс $p(t)$ в произвольный момент времени $t > 0$. Как в квантовой механике сформулировать задачу, аналогичную этой задаче классической механики?

В силу соотношения неопределенностей задать в начальный момент определенные значения координаты и импульса нельзя.

В квантовой механике роль начального условия играет задание волновой функции системы в момент $t = 0$. Подберем эту волновую функцию таким образом, чтобы при $t = 0$ средние значения координаты и импульса осциллятора равнялись заданным значениям x_0 и p_0:

$$\overline{x}(t = 0) = x_0, \qquad \overline{p}(t = 0) = p_0, \tag{13.1}$$

а неопределенности координаты и импульса были бы минимальными. Возьмем для этого, например, функцию вида

$$\psi(x,\, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{b\sqrt{\pi}}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{x - x_0}{b}\Big)^2\Big) \exp\Big(\frac{i}{\hbar} p_0 x\Big), \tag{13.2}$$

где

$$b = \sqrt{\hbar/\mu\omega}. \tag{13.3}$$

Она нормирована в соответствии с общим правилом (1.3) и, как легко проверить, удовлетворяет условиям (13.1). Легко вычисляются также дисперсии координаты и импульса:

$$D_x(t = 0) = b^2/2, \quad D_p(t = 0) = \hbar^2/2b^2. \tag{13.4}$$

Отсюда видно, что выбранная волновая функция (13.2) обладает уникальным свойством — она минимизирует соотношение неопределенностей (5.2):

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = \hbar/2. \tag{13.5}$$

Заметим, что это свойство не связано со специальным выбором параметра в виде (13.3).

Если $x_0 \neq 0$ или $p_0 \neq 0$, состояние с волновой функцией (13.2) не является стационарным и энергия не имеет определенного значения (см. упр. 3.11). Такое нестационарное состояние частицы, довольно четко локализованное в пространстве, является примером пространственного *волнового пакета*.

Как ведет себя с течением времени осциллятор, который в начальный момент находится в состоянии с волновой функцией (13.2)? Для ответа на этот вопрос надо решить уравнение Шредингера (6.1) с начальным условием (13.2). Для простоты положим $p_0 = 0$.

В соответствии с (10.3) ищем $\psi(x,\, t)$ в виде суперпозиции волновых функций стационарных состояний:

$$\psi(x,\, t) = \sum_n a_n \psi_n(x) \exp\Big(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_n t\Big), \tag{13.6}$$

где согласно (11.18) и (11.20)

$$\psi_n(x) = c_n H_n\Big(\frac{x}{b}\Big) \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{x}{b}\Big)^2\Big), \tag{13.7}$$

$$c_n = (2^n n! \sqrt{\pi} b)^{-1/2} \tag{13.8}$$

собственные функции гамильтониана линейного гармонического осциллятора.

Согласно (10.7) имеем

$$a_n = \frac{c_n}{\sqrt{b\sqrt{\pi}}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_n\Big(\frac{x}{b}\Big) \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{x}{b}\Big)^2 - \frac{1}{2}\Big(\frac{x-x_0}{b}\Big)^2\Big)\,dx. \tag{13.9}$$

Для вычисления этого интеграла удобно воспользоваться свойством (Д6.3) производящей функции полиномов Эрмита:

$$\exp\Big(2\lambda\frac{x}{b} - \lambda^2\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n\Big(\frac{x}{b}\Big)\frac{\lambda^n}{n!}. \tag{13.10}$$

Умножим обе части этого равенства на $\exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{x}{b}\Big)^2-\frac{1}{2}\Big(\frac{x-x_0}{b}\Big)^2\Big)$ и проинтегрируем по x. Используя (13.9), получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(2\lambda\frac{x}{b} - \lambda^2\Big) \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{x}{b}\Big)^2 - \frac{1}{2}\Big(\frac{x-x_0}{b}\Big)^2\Big)\,dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\frac{\sqrt{b\sqrt{\pi}}}{c_n} a_n. \tag{13.11}$$

Интеграл, стоящий в левой части этого равенства, имеет значение

$$\sqrt{\pi} b \exp\Big(-\frac{1}{4}\Big(\frac{x_0}{b}\Big)^2 + \lambda\frac{x_0}{b}\Big).$$

Разлагая в ряд $\exp(\lambda x_0/b)$ и сравнивая с правой частью равенства (13.11), получаем

$$a_n = \frac{(x_0/b)^n}{\sqrt{2^n n!}} \exp\Big(-\frac{1}{4}\Big(\frac{x_0}{b}\Big)^2\Big). \tag{13.12}$$

Подставляя (13.12) в (13.6) и учитывая, что

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega,$$

с помощью (13.10) окончательно получаем

$$\psi(x,\,t) = \frac{1}{\sqrt{b\sqrt{\pi}}}\exp\biggl(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - x_0\cos\omega t}{b}\right)^2 - \\ - i\left(\frac{1}{2}\omega t + \frac{x}{b}\cdot\frac{x_0}{b}\sin\omega t - \frac{1}{4}\left(\frac{x_0}{b}\right)^2\sin 2\omega t\right)\biggr). \quad (13.13)$$

Найдем средние значения координаты и импульса в этом состоянии:

$$\overline{x}(t) = x_0\cos\omega t, \qquad \overline{p}(t) = -x_0\mu\omega\sin\omega t. \quad (13.14)$$

Мы видим, что в среднем рассматриваемый волновой пакет движется так же, как классический осциллятор, начинающий движение из точки $x = x_0$ с нулевой скоростью. В отличие от классического осциллятора в квантовом случае координата и импульс в любой момент времени не имеют определенных значений: они «размазаны» относительно средних значений (13.14) с дисперсиями, для которых легко получить следующие значения:

$$D_x = \frac{b^2}{2}, \qquad D_p = \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{b^2}. \quad (13.15)$$

Сравнивая их с (13.4), видим, что дисперсии координаты и импульса осциллятора не зависят от времени. При этом плотность координатного распределения дается формулой

$$\rho(x,\,t) = |\psi(x,\,t)|^2 = \frac{1}{b\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(\frac{x - \overline{x}(t)}{b}\right)^2\right). \quad (13.16)$$

Упражнения к лекции 3

3.1. Сформулировать краевую задачу о нахождении стационарных состояний дискретного спектра частицы, движущейся в одномерной потенциальной яме следующего вида:

а) прямоугольная яма бесконечной глубины,

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \leqslant a/2, \\ \infty & \text{при } |x| > a/2; \end{cases}$$

б) прямоугольная яма с одной бесконечно высокой стенкой,

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{при } x < 0, \\ -V_0 < 0 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant a, \\ 0 & \text{при } x > a; \end{cases}$$

в) «усеченный» гармонический осциллятор с бесконечно высокой стенкой,

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \alpha x^2 & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

г) несимметричная прямоугольная яма,

$$V(x) = \begin{cases} V_1 > 0 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant a, \\ V_2 > 0 & \text{при } x > a; \end{cases}$$

3.2. В случае (в) упражнения 3.1 найти все стационарные состояния, воспользовавшись известным решением задачи о линейном гармоническом осцилляторе.

3.3. Частица находится в основном состоянии линейного гармонического осциллятора. Найти вероятность пребывания этой частицы в области, запрещенной для классического движения.

3.4. Заряженная частица с зарядом e и массой μ совершает гармонические колебания вдоль оси x с частотой ω. Найти стационарные состояния этой системы при наложении внешнего электростатического поля, имеющего напряженность $\mathscr{E}$ и направленного вдоль оси x. Сравнить результат с решением соответствующей классической задачи.

3.5. Используя рекуррентные соотношения (Дополнение 6) для полиномов Эрмита, вычислить интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) x \psi_m(x)\, dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \widehat{p}_x \psi_m(x)\, dx,$$

где $\{\psi_k\}_0^\infty$ – волновые функции стационарных состояний линейного гармонического осциллятора.

3.6. То же для интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) x^2 \psi_m(x)\, dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \widehat{p}^2 \psi_m(x)\, dx.$$

3.7. Вычислить средние значения потенциальной и кинетической энергий в n-м стационарном состоянии линейного гармонического осциллятора.

3.8. Проверить выполнение соотношения неопределенностей для координаты и импульса частицы, совершающей линейные гармонические колебания (стационарные состояния).

3.9. Найти энергетический спектр системы, состоящей из двух одинаковых линейных гармонических осцилляторов, потенциальная энергия взаимодействия которых есть $V = \alpha x_1 x_2$ (α — некоторая константа, x_1 и x_2 — координаты осцилляторов).

Указание: в уравнении Шредингера разделить переменные, описывающие относительное движение частиц и движение их центра масс.

3.10. Линейный гармонический осциллятор находится при $t = 0$ в состоянии $\psi(x,\, t = 0) = 2^{-1/2}(\psi_0 + \psi_1)$. Вычислить $\overline{x}(t)$.

3.11. Найти среднее значение и дисперсию энергии линейного гармонического осциллятора с потенциальной энергией $V(x) = \dfrac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$ в состоянии (13.2).

3.12. Найти среднее значение и дисперсию энергии свободной частицы в состоянии (13.2).

3.13. Рассмотреть движение линейного гармонического осциллятора, находящегося при $t = 0$ в состоянии

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{b\sqrt{\pi}}}\exp\Big(\frac{i}{\hbar}Px\Big)\exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{x - x_0}{b}\Big)^2\Big),$$

где x_0, b, P — некоторые константы; принять $b = \sqrt{\hbar/\mu\omega}$. Сравнить полученные результаты с аналогичными результатами классической механики.

3.14. Доказать соотношение

$$d\psi_n(x)/dx = \sqrt{\mu\omega/2\hbar}(\sqrt{n}\psi_{n-1}(x) - \sqrt{n+1}\psi_{n+1}(x)),$$
$$x\psi_n(x) = \sqrt{\hbar/2\mu\omega}(\sqrt{n+1}\psi_{n+1}(x) + \sqrt{n}\psi_{n-1}(x)),$$

где $\{\psi_k\}_0^\infty$ — волновые функции стационарных состояний линейного гармонического осциллятора.