4.5. Записать волновую функцию свободной частицы в импульсном представлении.

4.6. Получить приближенное выражение для энергии связи частицы с массой μ в одномерной прямоугольной яме конечной глубины V_0, если ширина ямы a удовлетворяет соотношению $a \ll \hbar(2\mu V_0)^{-1/2}$. Оценить вероятность пребывания частицы внутри и вне ямы.

4.7. Проверить выполнение соотношения неопределенностей для координаты и импульса частицы, движущейся в одномерной прямоугольной яме с бесконечно высокими стенками.

4.8. Показать, что все точки непрерывного спектра при движении частицы в одномерной прямоугольной яме с одной бесконечно высокой стенкой невырождены.

4.9. Показать, что плоская волна (16.5) является обобщенной собственной функцией оператора $\widehat{L}_z$ и принадлежит собственному значению $L_z = 0$, если ось z направлена по вектору $\mathbf{p}$.

4.10. Записать кулоновский потенциал $V(r) = \frac{e_1 e_2}{r}$ в импульсном представлении.

ЛЕКЦИЯ 5

§ 19. Эквивалентные представления

В § 18 мы показали, как преобразуются волновые функции и операторы, если вместо пространственной координаты частицы $\mathbf{r}$ взять в качестве независимой переменной ее импульс $\mathbf{p}$. Мы видели, что волновые функции подвергаются при этом преобразованию Фурье (18.1), которое является линейным и сохраняет нормировку волновой функции (см. (15.10)).

Теперь рассмотрим случай перехода от исходного к некоторому произвольному представлению. Обозначим через $\widehat{S}$ линейный оператор соответствующего преобразования волновых функций. Пусть ψ — волновая функция некоторого состояния в исходном представлении, тогда волновая функция этого же состояния в другом представлении есть

$$\psi' = \widehat{S}\psi. \tag{19.1}$$

Нормировка волновой функции не должна зависеть от выбора представления, т. е.

$$\langle \widehat{S}\psi|\widehat{S}\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle, \tag{19.2}$$

или

$$\langle \widehat{S}^{+}\widehat{S}\psi|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle.$$

Отсюда следует, что оператор $\widehat{S}$ должен удовлетворять условию

$$\widehat{S} + \widehat{S} = \widehat{I}, \tag{19.3}$$

т. е. должен быть унитарным (2).

Покажем, что скалярное произведение любых двух векторов ψ_1 и ψ_2 является инвариантом при изменении представления. Имеем

$$\psi_1' = \widehat{S}\psi_1, \quad \psi_2' = \widehat{S}\psi_2,$$
$$\langle\psi_1'|\psi_2'\rangle = \langle\widehat{S}\psi_1|\widehat{S}\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\widehat{S}^{+}\widehat{S}\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\psi_2\rangle,$$

т. е.

$$\langle\psi_1'|\psi_2'\rangle = \langle\psi_1|\psi_2\rangle. \tag{19.4}$$

Пусть теперь $\widehat{F}$ — некоторый линейный оператор в исходном представлении, а $\widehat{F}'$ — соответствующий оператор в новом представлении. Выразим их друг через друга. Для этого допустим, что оператор $\widehat{F}$ переводит произвольную функцию ψ_1 в функцию ψ_2, т. е.

$$\psi_2 = \widehat{F}\psi_1. \tag{19.5}$$

Тогда $\widehat{F}'$ должен переводить ψ_1' в ψ_2', т. е.

$$\psi_2' = \widehat{F}'\psi_1'. \tag{19.6}$$

Используя (19.1), получаем

$$\widehat{S}\psi_2 = \widehat{F}'\widehat{S}\psi_1.$$

Умножим обе части этого равенства слева на $\widehat{S}^{+}$ и учтем условие унитарности (19.3); тогда получим

$$\psi_2 = \widehat{S} + \widehat{F}'\widehat{S}\psi_1.$$

Сравнивая это выражение с (19.5), получаем

$$\widehat{F} = \widehat{S} + \widehat{F}'\widehat{S}. \tag{19.7}$$

Умножая обе части этого равенства слева на $\widehat{S}$, а справа на $\widehat{S}^+$, получаем

$$\widehat{F}' = \widehat{S}\widehat{F}\widehat{S}^+. \tag{19.8}$$

Формулы (19.7) и (19.8) устанавливают связь между различными представлениями оператора некоторой физической величины F.

Итак, при изменении представления волновые функции, описывающие различные состояния системы, подвергаются унитарному преобразованию (19.1). Одновременно по закону (19.7) преобразуются операторы всех физических величин.

Важно отметить, что при изменении представления все алгебраические соотношения между операторами остаются неизменными. Пусть, например, в одном представлении имеет место равенство

$$\widehat{A}\widehat{B} = \widehat{C}.$$

Тогда в другом представлении левая часть принимает вид

$$\widehat{A}'\widehat{B}' = \widehat{S}\widehat{A}\widehat{S}^+ \cdot \widehat{S}\widehat{B}\widehat{S}^+ = \widehat{S}\widehat{A}(\widehat{S}^+\widehat{S})\widehat{B}\widehat{S}^+ = \widehat{S}(\widehat{A}\widehat{B})\widehat{S}^+ = \widehat{S}\widehat{C}\widehat{S}^+,$$

что равно правой части в этом же представлении, т. е.

$$\widehat{A}'\widehat{B}' = \widehat{C}'.$$

Поэтому, например, все коммутационные соотношения имеют один и тот же вид во всех представлениях.

Теперь убедимся в том, что все физические характеристики состояний инвариантны относительно любого унитарного преобразования векторов и операторов. Действительно, все физические величины и их распределения могут быть представлены в виде скалярных произведений некоторых векторов, которые в силу (19.4) не зависят от выбора представления.

В качестве примера рассмотрим среднее значение некоторой величины F в состоянии ψ:

$$\overline{F} = \langle\psi'|\widehat{F}'|\psi'\rangle = \langle\widehat{S}\psi|\widehat{S}\widehat{F}\widehat{S}^+|\widehat{S}\psi\rangle = \\ = \langle\widehat{S}\psi|\widehat{S}\widehat{F}\psi\rangle = \langle\psi|\widehat{S}^+\widehat{S}\widehat{F}\psi\rangle = \langle\psi|\widehat{F}|\psi\rangle,$$

т. е.

$$\langle\psi'|\widehat{F}'|\psi'\rangle = \langle\psi|\widehat{F}|\psi\rangle.$$

Следовательно, все представления, связанные друг с другом унитарными преобразованиями, являются эквивалентными. Так мы их и будем называть.

§ 20. Преобразования числовых функций и операторов при сдвиге и повороте системы отсчета

Как в классической, так и в квантовой механике часто приходится преобразовывать числовые функции из одной системы отсчета в другую. По существу это преобразование является чисто геометрическим и никак не связано с физическими особенностями системы. Рассмотрим этот математический вопрос на примере перехода в систему отсчета, которая сдвинута или повернута относительно исходной системы отсчета.

При сдвиге или повороте системы отсчета происходит преобразование координат точек пространства. Пусть P есть некоторая точка физического пространства, $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ — координаты ее радиус-вектора в исходной системе отсчета K, а $\mathbf{r}' = \{x', y', z'\}$ — координаты радиус-вектора этой же точки P в системе K', которая получилась из K в результате сдвига или поворота координатных осей. Тогда

$$\mathbf{r}' = \widehat{g}(\eta)\mathbf{r}, \tag{20.1}$$

где $\widehat{g}(\eta)$ — оператор преобразования, зависящий от неокторых параметров η, определяющих величину и направление сдвига или поворота.

При сдвиге системы отсчета на вектор $\mathbf{a}$ преобразование (20.1) имеет вид

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{a}. \tag{20.2}$$

При повороте осей системы отсчета на бесконечно малый угол $\delta\alpha$ вокруг оси, проходящей через начало координат параллельно единичному вектору $\mathbf{n}$, преобразование (20.1), как нетрудно непосредственно проверить, можно записать в виде

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \delta\alpha[\mathbf{n} \times \mathbf{r}], \tag{20.3}$$

где $[\mathbf{n} \times \mathbf{r}]$ есть векторное произведение векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{r}$.

Найдем закон преобразования числовой функции при переходе от одной системы отсчета к другой. Пусть $\varphi(\mathbf{r})$ есть некоторая функция, заданная в системе отсчета K. Это значит, что точке P физического пространства, имеющей в системе отсчета K координаты $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$, сопоставляется некоторое число

$c = \varphi(\mathbf{r})$. В системе отсчета K' та же точка P будет иметь другие координаты $\mathbf{r}' = \{x', y', z'\}$, которые связаны с координатами $\mathbf{r}$ формулой (20.1). Нам надо найти закон преобразования заданной функции $\varphi(\mathbf{r})$ при переходе из системы отсчета K в систему K'. Это значит, что мы должны найти такую функцию $\varphi'(\mathbf{r}')$, которая сопоставляет точке P физического пространства то же число c, которое ей сопоставляет функция $\varphi(\mathbf{r})$. Следовательно, функция $\varphi'(\mathbf{r}')$ определяется соотношением

$$\varphi'(\mathbf{r}') = \varphi(\mathbf{r}), \tag{20.4}$$

где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ связаны условием (20.1), а $\mathbf{r}$ пробегает все значения из области определения функции $\varphi(\mathbf{r})$.

Используя (20.1), перепишем (20.4) в виде

$$\varphi'(\mathbf{r}') = \varphi(\widehat{g}^{-1}(\eta)\mathbf{r}'), \tag{20.5}$$

так как

$$\mathbf{r} = \widehat{g}^{-1}(\eta)\mathbf{r}'. \tag{20.6}$$

Следовательно, для нахождения функции $\varphi'(\mathbf{r}')$ в системе отсчета K' надо в функции $\varphi(\mathbf{r})$, заданной в системе K, произвести замену независимой переменной по формуле (20.6) и рассматривать полученную функцию как функцию новой переменной $\mathbf{r}'$.

Поскольку обозначение аргумента функции может быть произвольным, соотношение (20.5) можно, в частности, записать и в таком виде:

$$\varphi'(\mathbf{r}) = \varphi(\widehat{g}^{-1}(\eta)\mathbf{r}). \tag{20.7}$$

Введем оператор $\widehat{S}(\eta)$, преобразующий функцию φ в функцию φ':

$$\varphi'(\mathbf{r}) = \widehat{S}(\eta)\varphi(\mathbf{r}). \tag{20.8}$$

Сравнивая (20.8) с (20.7), получаем следующую формулу для оператора преобразования $\widehat{S}(\eta)$:

$$\widehat{S}(\eta)\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(\widehat{g}^{-1}(\eta)\mathbf{r}). \tag{20.9}$$

В случае преобразования сдвига (20.2) оператор $\widehat{S}$ определяется вектором сдвига $\mathbf{a}$ и называется *оператором трансляции.* Будем его обозначать символом $\widehat{T}(\mathbf{a})$. Следовательно,

$$\widehat{T}(\mathbf{a})\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r} + \mathbf{a}). \tag{20.10}$$

Разложим правую часть этого равенства в ряд Тейлора относительно точки $\mathbf{r}$:

$$\varphi(\mathbf{r}+\mathbf{a}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{a}\nabla_{\mathbf{r}})^k}{k!}\varphi(\mathbf{r}) = \exp(\mathbf{a}\nabla_{\mathbf{r}})\varphi(\mathbf{r}).$$

Сравнивая с (20.10), получаем

$$\widehat{T}(\mathbf{a}) = \exp(\mathbf{a}\nabla_{\mathbf{r}}), \tag{20.11}$$

так как $\varphi(\mathbf{r})$ – произвольная функция.

Итак, при сдвиге системы отсчета на вектор $\mathbf{a}$ любая числовая функция преобразуется по закону (20.8), а оператор преобразования дается формулой (20.11).

Для преобразования поворота (20.3) на бесконечно малый угол $\delta\alpha$ вокруг оси $\mathbf{n}$ совершенно аналогично найдем *оператор поворота*

$$\widehat{R}(\mathbf{n},\, \delta\alpha) = \exp(\delta\alpha[\mathbf{n}\times\mathbf{r}]\nabla_{\mathbf{r}}). \tag{20.12}$$

Нетрудно проверить, что два последовательных поворота вокруг некоторой оси эквивалентны повороту на угол, равный сумме углов последовательных поворотов. Поэтому для нахождения оператора поворота вокруг оси $\mathbf{n}$ на конечный угол α представим этот поворот в виде последовательности поворотов вокруг этой оси на малые углы $\Delta\alpha_i$:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} \Delta\alpha_i.$$

Используя (20.12), получаем

$$\widehat{R}(\mathbf{n},\, \alpha) = \exp(\alpha[\mathbf{n}\times\mathbf{r}]\nabla_{\mathbf{r}}). \tag{20.13}$$

Рассмотренные нами преобразования числовых функций являются простыми следствиями геометрических свойств физического пространства, а поэтому имеют универсальный характер и широко используются в теоретической физике. В квантовой механике они применяются к волновым функциям, описывающим состояния квантовой системы.

Поскольку операторы импульса и момента импульса частицы согласно (3.2) и (3.12) есть

$$\widehat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla_{\mathbf{r}} \quad \text{и} \quad \widehat{\mathbf{L}} = -i\hbar[\mathbf{r}\times\nabla_{\mathbf{r}}],$$

операторы (20.11) и (20.13) можно переписать в виде

$$\widehat{T}(\mathbf{a}) = \exp\Bigl(\frac{i}{\hbar}\mathbf{a}\widehat{\mathbf{p}}\Bigr), \tag{20.14}$$

$$\widehat{R}(\mathbf{n},\, \alpha) = \exp\Bigl(\frac{i}{\hbar}\alpha(\mathbf{n}\widehat{\mathbf{L}})\Bigr). \tag{20.15}$$

Следовательно, операторы импульса и момента импульса непосредственно связаны с преобразованиями сдвига и поворота.

Легко проверить, что найденные операторы трансляции $\widehat{T}(\mathbf{a})$ и поворота $\widehat{R}(\mathbf{n},\, \alpha)$ унитарны. Поэтому для нахождения закона преобразования операторов $\widehat{F}$ физических величин можно воспользоваться результатом (19.8) из предыдущего параграфа. Следовательно,

$$\widehat{F}' = \widehat{S}\widehat{F}\widehat{S}^{+}, \tag{20.16}$$

где $\widehat{F}'$ — оператор в преобразованной системе отсчета.

Частным случаем преобразования сдвига является переход из одной инерциальной системы отсчета K в другую K', движущуюся относительно первой системы со скоростью $\mathbf{v}$, а частным случаем преобразования поворота — переход во вращающуюся систему отсчета.

§ 21. Представление Шредингера и представление Гейзенберга

В § 1 мы ввели волновую функцию $\psi(\xi,\, t)$ для описания состояния системы в произвольный момент времени t. При этом распределение вероятностей физической величины F в этом состоянии в момент t согласно (2.24) и (2.25) определяется скалярным произведением функции $\psi(\xi,\, t)$ и собственной функции φ_n или обобщенной собственной функции χ_f оператора $\widehat{F}$:

$$\rho(F_n,\, t) = |\langle\varphi_n|\psi(t)\rangle|^2, \quad \rho(f,\, t) = |\langle\chi_f|\psi(t)\rangle|^2. \tag{21.1}$$

Поскольку оператор $\widehat{F}$ обычно не зависит от времени, функция φ_n и χ_f тоже не зависят от t.

Временная зависимость волновой функции задается уравнением Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\xi,\, t)}{\partial t} = \widehat{H}\psi(\xi,\, t). \tag{21.2}$$

Если гамильтониан $\widehat{H}$ не зависит от времени, то согласно (6.2) его решение можно записать в виде

$$\psi(\xi,\, t) = \widehat{U}(t,\, t_0 = 0)\psi(\xi,\, t_0 = 0), \tag{21.3}$$

где

$$\widehat{U}(t,\, t_0) = \exp\Big(-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}\cdot(t - t_0)\Big) \tag{21.4}$$

есть оператор эволюции системы.

Мы видим, что изменение волновой функции с течением времени может быть представлено как результат унитарного преобразования, оператор которого $\widehat{U}$ зависит от времени.

В § 19 было показано, что производя унитарное преобразование всех векторов пространства состояний L_2 и всех операторов, действующих в этом пространстве, можно получить новое описание физических свойств системы, совершенно эквивалентное исходному. В § 18 мы уже познакомились с двумя эквивалентными представлениями — координатным и импульсным. Характерной особенностью унитарного преобразования, связывающего эти представления, является его независимость от времени. Мы видели, что в этом случае изменение представления сводится к замене независимой переменной волновой функции, а эволюция волновой функции во времени по-прежнему описывается уравнением Шредингера (21.2).

Если же оператор унитарного преобразования зависит от времени, изменяется сам закон временной эволюции волновой функции состояния. Представление, в котором волновая функция изменяется во времени в соответствии с уравнением Шредингера, называется *представлением Шредингера*.

Сейчас мы рассмотрим другой способ описания временной эволюции системы, который называется *представлением Гейзенберга*. Оно получается из представления Шредингера с помощью унитарного преобразования

$$\widehat{S} = \widehat{U}^{+}(t,\, 0) = \exp\Big(\frac{i}{\hbar}\widehat{H}\cdot t\Big). \tag{21.5}$$

Будем обозначать через $\psi_{\text{Ш}}$ и $\widehat{F}_{\text{Ш}}$ волновые функции и операторы в представлении Шредингера, а через $\psi_{\text{Г}}$ и $\widehat{F}_{\text{Г}}$ — те же величины в представлении Гейзенберга. Тогда согласно (19.1) и (19.8) имеем

$$\psi_{\text{Г}}(\xi,\, t) = \widehat{S}\psi_{\text{Ш}}(\xi,\, t) = \exp\Big(\frac{i}{\hbar}\widehat{H}\cdot t\Big)\psi_{\text{Ш}}(\xi,\, t), \tag{21.6}$$

$$\widehat{F}_{\text{Г}} = \widehat{S}\widehat{F}_{\text{Ш}}\widehat{S}^{+} = \exp\Big(\frac{i}{\hbar}\widehat{H}\cdot t\Big)\widehat{F}_{\text{Ш}}\exp\Big(-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}\cdot t\Big). \tag{21.7}$$

Подставляя (21.3) в (21.6), получаем

$$\psi_{\Gamma}(\xi,\, t) = \psi_{\text{Ш}}(\xi,\, t = 0), \tag{21.8}$$

т. е. в представлении Гейзенберга волновая функция состояния от времени не зависит и совпадает с волновой функцией в представлении Шредингера при $t = 0$. С другой стороны, согласно (21.7) операторы в этом представлении, вообще говоря, являются функциями времени, причем их вид существенно зависит от гамильтониана системы.

Исключением являются операторы интегралов движения. Действительно, для них согласно (8.3) имеем

$$[\widehat{F}_{\text{Ш}},\, \widehat{H}_{\text{Ш}}] = 0.$$

Поэтому из (21.7) получаем

$$\widehat{F}_{\Gamma} = \widehat{F}_{\text{Ш}}, \tag{21.9}$$

т. е. гейзенберговские операторы интегралов движения не зависят от времени и совпадают с соответствующими шредингеровскими операторами. В частности, это относится к гамильтониану системы

$$\widehat{H}_{\Gamma} = \widehat{H}_{\text{Ш}} = \widehat{H}. \tag{21.10}$$

Переходим к нахождению распределений физических величин в представлении Гейзенберга. Как мы видели в § 19, скалярное произведение двух векторов не зависит от выбора представления. Поэтому формулы (21.1), записанные в представлении Шредингера, мы можем сразу переписать в представлении Гейзенберга:

$$\rho(F_n,\, t) = |\langle\varphi_{n\Gamma}(t)|\psi_{\Gamma}\rangle|^2, \quad \rho(f,\, t) = |\langle\chi_{f\Gamma}(t)|\psi_{\Gamma}\rangle|^2, \tag{21.11}$$

где $\{\varphi_{n\Gamma}(t)\}$ и $\{\chi_{f\Gamma}(t)\}$ являются собственными функциями и обобщенными собственными функциями гейзенберговского оператора $\widehat{F}_{\Gamma}(t)$. Эти функции зависят от времени, поскольку таковым является оператор $\widehat{F}_{\Gamma}(t)$, если только F не есть интеграл движения.

В § 6 мы отмечали, что, несмотря на эквивалентность соотношения (21.3) уравнению Шредингера (21.2), обычно для нахождения волновой функции $\psi(\xi,\, t)$ в произвольный момент времени t бывает проще решить дифференциальное уравнение, чем найти результат действия эволюционного оператора $\widehat{U}(t,\, 0)$ на волновую функцию $\psi(\xi,\, 0)$. Аналогично этому в представлении Гейзенберга вычисление оператора по формуле (21.7) обычно бывает более сложной задачей, чем решение дифференциального уравнения, которое легко получается путем дифференцирования по времени равенства (21.7):

$$\frac{d\widehat{F}_{\Gamma}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\widehat{H},\, \widehat{F}_{\Gamma}(t)]. \tag{21.12}$$

При этом начальное условие есть

$$\widehat{F}_{\Gamma}(t=0) = \widehat{F}_{\text{Ш}}; \tag{21.13}$$

здесь предполагается, что $\widehat{F}_{\text{Ш}}$ не зависит от времени.

Уравнение (21.12) называется «уравнением движения» для гейзенберговского оператора $\widehat{F}_{\Gamma}(t)$. Оно вместе с начальным условием (21.13) эквивалентно соотношению (21.7). Уравнение (21.12) очень похоже на соотношение (8.1). Однако заметим, что тогда как (8.1) представляет собой определение оператора скорости изменения физической величины в представлении Шредингера, соотношение (21.12) есть уравнение для гейзенберговского оператора.

Нахождение собственных функций и обобщенных собственных функций оператора $\widehat{F}_{\Gamma}(t)$, необходимых для вычисления распределения (21.11) физической величины F, может оказаться непростой задачей. Значительно легче обычно найти низшие моменты распределения:

$$\overline{F}(t) = \langle\psi_{\Gamma}|\widehat{F}_{\Gamma}(t)|\psi_{\Gamma}\rangle, \tag{21.14}$$

$$D_F(t) = \langle\psi_{\Gamma}|\widehat{F}^2_{\Gamma}(t)|\psi_{\Gamma}\rangle - (\overline{F}(t))^2. \tag{21.15}$$

Описание эволюции системы в представлении Гейзенберга физически совершенно эквивалентно описанию в представлении Шредингера, так как эти представления связаны унитарным преобразованием. Однако конкретные вычисления для определенной задачи в одном представлении могут оказаться значительно проще, чем в другом.

Отметим, что в представлении Гейзенберга так же, как и в представлении Шредингера, остается полная свобода выбора обобщенных координат системы. В обоих случаях существуют координатное, импульсное и множество других представлений в том смысле, что в качестве независимых переменных волновых функций могут быть выбраны $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$ и другие физические величины.

В заключение заметим, что наряду с представлениями Шредингера и Гейзенберга возможны другие способы описания эволюции системы, которые определяются выбором унитарного преобразования, зависящего от времени. Наиболее распространенным из них является представление взаимодействия (см. упр. 5.3).

§ 22. Свободное движение и линейный гармонический осциллятор в представлении Гейзенберга

В качестве примера использования представления Гейзенберга рассмотрим одномерное движение частицы с массой μ в поле с потенциальной энергией $V(x)$. Найдем гейзенберговские операторы координаты и импульса частицы. Для этого можно воспользоваться общей формулой (21.7), но проще решить уравнения движения (21.12) для этих операторов:

$$\frac{d\widehat{x}_\Gamma(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\widehat{H}_\Gamma, \widehat{x}_\Gamma(t)], \tag{22.1}$$

$$\frac{d\widehat{p}_\Gamma(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\widehat{H}_\Gamma, \widehat{p}_\Gamma(t)], \tag{22.2}$$

где

$$\widehat{H}_\Gamma = \frac{\widehat{p}_\Gamma^2}{2\mu} + V(\widehat{x}_\Gamma). \tag{22.3}$$

Для вычисления содержащихся в этих уравнениях коммутаторов воспользуемся инвариантностью всех операторных соотношений относительно изменения представления и известными значениями этих коммутаторов в представлении Шредингера. Получаем

$$[\widehat{H}_\Gamma, \widehat{x}_\Gamma] = \frac{1}{2\mu}[\widehat{p}_\Gamma^2, \widehat{x}_\Gamma] = -\frac{i\hbar}{\mu}\widehat{p}_\Gamma,$$

$$[\widehat{H}_\Gamma, \widehat{p}_\Gamma] = [V(\widehat{x}_\Gamma), \widehat{p}_\Gamma] = i\hbar\frac{\partial V(x)}{\partial x}\bigg|_{x=\widehat{x}_\Gamma}.$$

Подставляя эти выражения в (22.1) и (22.2), получаем

$$\frac{d\widehat{x}_\Gamma(t)}{dt} = \frac{\widehat{p}_\Gamma(t)}{\mu}, \tag{22.4}$$

$$\frac{d\widehat{p}_\Gamma(t)}{dt} = \frac{\partial V(x)}{\partial x}\bigg|_{x=\widehat{x}_\Gamma}. \tag{22.5}$$

Это есть система двух операторных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $\widehat{x}_{\text{Г}}(t)$ и $\widehat{p}_{\text{Г}}(t)$, причем начальные условия согласно (21.13) имеют вид

$$\widehat{x}_{\text{Г}}(0) = \widehat{x}_{\text{Ш}}, \qquad \widehat{p}_{\text{Г}}(0) = \widehat{p}_{\text{Ш}}. \tag{22.6}$$

Решим эту систему уравнений в случае свободного движения ($V = 0$):

$$\frac{d\widehat{x}_{\text{Г}}(t)}{dt} = \frac{\widehat{p}_{\text{Г}}(t)}{\mu}, \tag{22.7}$$

$$\frac{d\widehat{p}_{\text{Г}}(t)}{dt} = 0. \tag{22.8}$$

Поскольку эти уравнения линейны относительно неизвестных операторов, их можно решать так, как если бы вместо операторов стояли обычные функции. Получаем

$$\widehat{p}_{\text{Г}}(t) = \widehat{p}_{\text{Ш}}, \quad \widehat{x}_{\text{Г}}(t) = \widehat{x}_{\text{Ш}} + \left(\frac{t}{\mu}\right)\widehat{p}_{\text{Ш}}. \tag{22.9}$$

Мы видим, что гейзенберговский оператор импульса свободной частицы не зависит от времени и совпадает со шредингеровским оператором импульса. Это находится в соответствии с (21.9), поскольку при свободном движении импульс сохраняется. Гейзенберговский оператор координаты свободной частицы линейно зависит от времени.

Теперь рассмотрим уравнения движения для гейзенберговских операторов координаты и импульса частицы, находящейся в поле линейного гармонического осциллятора:

$$V(x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2. \tag{22.10}$$

Имеем

$$\frac{d\widehat{x}_{\text{Г}}(t)}{dt} = \frac{\widehat{p}_{\text{Г}}(t)}{\mu}, \tag{22.11}$$

$$\frac{d\widehat{p}_{\text{Г}}(t)}{dt} = -\mu\omega^2\widehat{x}_{\text{Г}}(t). \tag{22.12}$$

Решая эти линейные уравнения с начальными условиями (22.6), получаем

$$\widehat{x}_{\text{Г}}(t) = \widehat{x}_{\text{Ш}} \cdot \cos\omega t + \left(\frac{\widehat{p}_{\text{Ш}}}{\mu\omega}\right)\sin\omega t, \tag{22.13}$$

$$\widehat{p}_{\text{Г}}(t) = \widehat{p}_{\text{Ш}} \cdot \cos\omega t - \mu\omega\widehat{x}_{\text{Ш}}\sin\omega t. \tag{22.14}$$

В этом случае оба оператора периодически зависят от времени.

В § 13 было рассмотрено одномерное движение волнового пакета в поле гармонического осциллятора, а в § 16 — свободное движение того же пакета. При этом использовалось представление Шредингера. Сейчас мы рассмотрим те же задачи в представлении Гейзенберга.

Итак, волновая функция рассматриваемого состояния в представлении Шредингера при $t = 0$ согласно (16.10) имеет вид

$$\psi_{\text{Ш}}(x,\, t=0) = (b\sqrt{\pi})^{-1/2}\exp\Big(-\frac{1}{2}\frac{(x-x_0)^2}{b^2}\Big)\exp\Big(\frac{i}{\hbar}p_0 x\Big), \tag{22.15}$$

где b — некоторая константа, которая согласно (16.12) определяет дисперсии координатного и импульсного распределений в этом состоянии. В соответствии с (21.8) волновая функция состояния в представлении Гейзенберга совпадает с волновой функцией в представлении Шредингера при $t = 0$, т. е.

$$\psi_{\Gamma}(x) = \psi_{\text{Ш}}(x,\, t=0). \tag{22.16}$$

Используя (21.14) и (21.15), можно легко найти среднее значение и дисперсию произвольной физической величины в любой момент времени, если известен оператор этой величины в гейзенберговском представлении.

Начнем со свободного движения. Для операторов координаты и импульса свободной частицы согласно (22.9) имеем следующие выражения в гейзенберговском координатном представлении:

$$\widehat{p}_{\Gamma}(t) = -i\hbar\frac{d}{dx}, \quad \widehat{x}_{\Gamma}(t) = x - i\hbar\frac{t}{\mu}\frac{d}{dx}. \tag{22.17}$$

Подставляя (22.17) и (22.15) в (21.14) и (21.15), находим:

$$\overline{p}(t) = p_0, \quad \overline{x}(t) = x_0 + \frac{p_0}{\mu}t, \tag{22.18}$$

$$D_p(t) = \frac{\hbar^2}{2b^2}, \quad D_x(t) = \frac{b^2}{2}\Big(1 + \frac{\hbar^2 t^2}{\mu^2 b^4}\Big). \tag{22.19}$$

Эти результаты совпадают с полученными в § 16.

Для операторов координаты и импульса линейного гармонического осциллятора согласно (22.13) и (22.14) в гейзенберговском координатном представлении имеем

$$\widehat{x}_{\Gamma}(t) = x\cos\omega t + \frac{\sin\omega t}{\mu\omega}\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right), \tag{22.20}$$

$$\widehat{p}_{\Gamma}(t) = \cos\omega t\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right) - \mu\omega x\sin\omega t. \tag{22.21}$$

Подставляя (22.20), (22.21) и (22.15) в (21.14) и (21.15), находим

$$\overline{p}(t) = p_0\cos\omega t - x_0\mu\omega\sin\omega t, \tag{22.22}$$

$$\overline{x}(t) = x_0\cos\omega t + p_0\frac{\sin\omega t}{\mu\omega}, \tag{22.23}$$

$$D_p(t) = \frac{\hbar^2}{2b^2}\cos^2\omega t + \frac{b^2}{2}\mu^2\omega^2\sin^2\omega t, \tag{22.24}$$

$$D_x(t) = \frac{b^2}{2}\cos^2\omega t + \frac{\hbar^2}{2b^2}\frac{\sin^2\omega t}{\mu^2\omega^2}. \tag{22.25}$$

Здесь b, p_0, x — произвольные параметры.

В § 13 рассматривалось движение осциллятора со специально выбранными значениями параметров

$$p_0 = 0, \qquad b = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}}. \tag{22.26}$$

Подставляя эти значения в (22.22)–(22.25), получаем:

$$\overline{p}(t) = -x_0\mu\omega\sin\omega t, \quad \overline{x}(t) = x_0\cos\omega t, \tag{22.27}$$

$$D_p(t) = \frac{\hbar^2}{2b^2}, \quad D_x(t) = \frac{b^2}{2}. \tag{22.28}$$

Мы видим, что в частном случае $b = (\hbar/\mu\omega)^{1/2}$ дисперсии импульса и координаты сохраняются во времени. Эти результаты совпадают с полученными в § 13.

Таким образом, переход к представлению Гейзенберга позволяет значительно упростить нахождение низших моментов распределений физических величин.

§ 23. Понятие вектора состояния. Обозначения Дирака «бра» и «кет»

В § 18 мы показали, что одно и то же состояние может описываться различными волновыми функциями в зависимости от выбранного представления. Так, например, в координатном представлении это может быть некоторая функция $\Psi(\mathbf{r},\, t)$, а в импульсном представлении это же состояние в тот же момент времени t будет описываться совершенно другой функцией $a(\mathbf{p},\, t)$. При этом знание волновой функции в каком-нибудь одном представлении однозначно определяет ее вид в любом другом представлении. Например, зная $\Psi(\mathbf{r},\, t)$, можно по формуле (18.1) найти $a(\mathbf{p},\, t)$.

Особенностью координатного и импульсного представлений является то, что спектры операторов координаты и импульса непрерывны. Сейчас мы рассмотрим представление, задаваемое некоторым эрмитовым оператором $\widehat{G}$ с чисто дискретным спектром:

$$\widehat{G}\varphi_n(\xi) = G_n\varphi_n(\xi), \qquad \langle\varphi_n|\varphi_m\rangle = \delta_{nm}. \tag{23.1}$$

Совокупность всех его собственных функций $\{\varphi_n\}_1^\infty$ образует полный набор в L_2, по которому можно однозначно разложить произвольную волновую функцию $\psi(\xi,\, t)$:

$$\psi(\xi,\, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\varphi_n(\xi), \tag{23.2}$$

где

$$a_n(t) = \langle\varphi_n(\xi)|\psi(\xi,\, t)\rangle. \tag{23.3}$$

Совокупность коэффициентов разложения $\{a_n(t)\}_1^\infty$ полностью определяет рассматриваемое состояние и называется волновой функцией этого состояния в представлении собственных функций оператора $\widehat{G}$, или в G-представлении. Совокупность чисел $\{a_n(t)\}_1^\infty$ удобно представлять в виде одностолбцовой матрицы с бесконечным количеством элементов:

$$\{a_n(t)\}_1^\infty = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{23.4}$$

Таким образом, в G-представлении каждому состоянию однозначно сопоставляется последовательность комплексных чисел $\{a_n\}_1^\infty$, которая удовлетворяет уравнению замкнутости (Д1.5):

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \|\psi\|^2 = 1. \tag{23.5}$$

Множество всех числовых последовательностей

$$f = \{x_n\}_1^\infty, \quad g = \{y_n\}_1^\infty, \quad \ldots,$$

для которых

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 < \infty, \quad \ldots$$

представляет собой бесконечномерное линейное пространство со следующими определениями операций сложения и умножения на число:

$$f + g = \{x_n + y_n\}_1^\infty, \qquad \alpha f = \{\alpha x_n\}_1^\infty,$$

где α — произвольное комплексное число. Скалярное произведение в этом пространстве можно ввести с помощью соотношения

$$\langle f|g\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* y_n. \tag{23.6}$$

Тогда норма вектора f может быть определена с помощью скалярного произведения:

$$\|f\| = +\sqrt{\langle f|f\rangle} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}. \tag{23.7}$$

Это нормированное пространство в математике обозначается символом l_2. Оно является бесконечномерным аналогом конечномерного евклидова пространства.

Мы видим, что каждому элементу пространства L_2 по формуле (23.3) можно поставить в соответствие один и только один элемент пространства l_2 и наоборот, причем алгебраическим операциям над элементами из L_2 соответствуют те же операции над их образами в l_2, а нормы соответствующих друг другу элементов из L_2 и l_2 равны в силу (23.5). Следовательно, пространства L_2 и l_2 алгебраически изоморфны и изометричны. Поэтому для описания квантово-механических состояний мы можем использовать векторы как из L_2, так и из l_2.

В §§ 18, 19 мы показали, что все представления, связанные унитарными преобразованиями, эквивалентны, потому что распределения всех физических величин одинаковы во всех представлениях. Действительно, как мы видели, скалярное произведение любых двух векторов является инвариантом унитарного преобразования, а все распределения физических величин всегда можно представить в виде соответствующих скалярных произведений.

Эта ситуация совершенно аналогична той, которая имеет место в конечномерном линейном пространстве при переходе от одного ортонормированного базиса к другому. Если вектор $\mathbf{a}$ характеризовать совокупностью его проекций на базисные орты $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, то эта совокупность чисел является определенной только в том случае, если базис фиксирован. При переходе к другому базису координаты вектора изменяются. Однако это преобразование унитарно, а поэтому сохраняет значение скалярного произведения любой пары векторов.

Так, мы видим, что одно и то же состояние в зависимости от выбранного представления может характеризоваться тем или иным множеством чисел. Если представление задается оператором с чисто дискретным спектром, это множество дискретное. Если представление задается оператором с чисто непрерывным спектром, множество тоже непрерывное. Возможен и смешанный случай.

Для описания состояния системы безотносительно к выбранному представлению в квантовой механике вводится понятие *вектора состояния*, который является элементом абстрактного гильбертова пространства $\mathscr{H}$. Для обозначения вектора состояния Дираком был предложен специальный символ

$$|a\rangle, \tag{23.8}$$

где a играет роль идентификатора состояния. Вектор состояния $|a\rangle$ не является числом; он аналогичен введенному выше вектору $\mathbf{a}$ конечномерного линейного пространства. В математике показывается, что все гильбертовы пространства изоморфны друг другу. Поэтому пространства L_2, l_2, $\mathscr{H}$ эквивалентны с точки зрения их использования для описания состояний.

Обозначим через $\{|F_n\rangle\}$ совокупность собственных векторов оператора $\widehat{F}$ физической величины F в пространстве $\mathscr{H}$ и рассмотрим множество скалярных произведений $\{\langle F_n|a\rangle\}$. Это множество чисел является волновой функцией

$$\psi_a(F_n) = \langle F_n|a\rangle \tag{23.9}$$

состояния $|a\rangle$ в представлении физической величины F. Символ a называется *индексом состояния*, а символ F_n — *индексом представления*. Например, в рассмотренном выше G-представлении роль $|F_n\rangle$ играют собственные векторы оператора $\widehat{G}$ с чисто дискретным спектром, а соотношение (23.9) имеет вид (23.3). В координатном представлении роль $|F_n\rangle$ играют обобщенные собственные векторы оператора координаты $\widehat{\mathbf{r}}$, а соотношение (23.9) записывается в виде (18.15) или (18.16). В импульсном представлении роль $|F_n\rangle$ играют обобщенные собственные векторы оператора импульса $\widehat{\mathbf{p}}$, а соотношение (23.9) записывается в виде (18.1). Множество чисел $\langle F_n|a\rangle$, т. е. числовая функция $\psi_a(F_n)$, аналогично введенному выше множеству чисел $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, являющихся координатами вектора $\mathbf{a}$ в конечномерном линейном пространстве.

Итак, в квантовой механике роль базисных ортов играют собственные векторы и обобщенные собственные векторы операторов физических величин некоторого полного набора. В представлении Шредингера базисные орты остаются постоянными во времени, а эволюция состояния описывается изменением со временем вектора состояния. Этому соответствует изменение значений проекций вектора состояния на базисные орты, что изображается зависящей от времени волновой функцией. В представлении Гейзенберга операторы физических величин зависят от времени, а поэтому зависят от времени соответствующие базисные орты. Следовательно, представлению Гейзенберга отвечает выбор такой системы базисных ортов, которая непрерывно изменяет свое положение в гильбертовом пространстве с течением времени. При этом закон движения базиса определяется гамильтонианом системы. Вектор состояния в представлении Гейзенберга от времени не зависит, что изображается постоянной во времени волновой функцией.

Мы видим, что в квантовой механике все распределения физических величин выражаются через скалярные произведения $\langle b|a\rangle$ векторов $|a\rangle$ и $|b\rangle$ абстрактного гильбертова пространства $\mathscr{H}$. Самостоятельный смысл можно придать не только правой части $|a\rangle$ этого скобочного обозначения, но и его левой части $\langle b|$. Для этого надо рассмотреть множество всех линейных непрерывных функционалов (числовых функций), которые можно построить в абстрактном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Это множество называется в математике сопряженным пространством и обозначается символом $\mathscr{H}^*$. Замечательной особенностью пары пространств $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}^*$ является то, что любой элемент φ пространства $\mathscr{H}^*$ можно представить в виде

$$\varphi(a) = \langle b|a\rangle, \tag{23.10}$$

т. е. каждому элементу $\varphi \in \mathscr{H}$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие вектор $|b\rangle \in \mathscr{H}$; это соответствие является изоморфизмом. Следовательно, символ $\langle b|$ можно рассматривать как обозначение некоторого линейного непрерывного функционала в пространстве состояний $\mathscr{H}$.

Обозначения $|a\rangle$ и $\langle b|$ были введены Дираком. Он же предложил специальные названия для этих объектов: «бра» (bra) для $\langle b|$ и «кет» (ket) для $|a\rangle$. Эти термины являются частями английского слова bracket (скобка) и соответствуют тому, что значение функционала $\langle b|$ на векторе $|a\rangle$ дается полным скобочным символом $\langle b|a\rangle$. Поскольку согласно (1.5)

$$\langle b|a\rangle = \langle a|b\rangle^*, \tag{23.11}$$

значение функционала $\langle b|$ на векторе $|a\rangle$ совпадает с комплексно-сопряженным значением функционала $\langle a|$ на векторе $|b\rangle$.

В качестве примера, иллюстрирующего удобства обозначений Дирака, найдем обобщенную собственную функцию оператора координаты по известной обобщенной собственной функции оператора импульса. Согласно (15.6) для последней функции имеем

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle = (2\pi\hbar)^{-3/2}\exp\Bigl(\frac{i}{\hbar}\mathbf{pr}\Bigr). \tag{23.12}$$

Используя (23.11), отсюда получаем

$$\langle \mathbf{p}|\mathbf{r}\rangle = \langle \mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle^*,$$

т. е. обобщенная собственная функция оператора координаты в импульсном представлении есть

$$\varphi_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p}|\mathbf{r}\rangle = (2\pi\hbar)^{-3/2}\exp\Bigl(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{pr}\Bigr). \tag{23.13}$$

Этот результат, конечно, совпадает с (18.12) (см. также упр. 4.6).

Итак, сочетание бра $\langle b|$ с кет $|a\rangle$, стоящим справа от него, есть скалярное произведение $\langle b|a\rangle$, т. е. число. Определенный смысл имеет также сочетание бра с кет, стоящим слева от него:

$$P \equiv |b\rangle\langle a|. \tag{23.14}$$

Пусть $|\xi\rangle$ есть некоторый кет, тогда

$$P|\xi\rangle = |b\rangle\langle a|\xi\rangle, \tag{23.15}$$

т. е. по отношению к любому кет $|\xi\rangle$, стоящему справа, P есть линейный оператор, переводящий в кет $|b\rangle$, умноженный на комплексное число $\langle a|\xi\rangle$. Теперь пусть $\langle\xi|$ есть некоторый бра, тогда

$$\langle\xi|P = \langle\xi|b\rangle\langle a|, \tag{23.16}$$

т. е. по отношению к любому бра $\langle\xi|$, стоящему слева, P есть антилинейный оператор, переводящий его в бра $\langle a|$, умноженный на комплексное число $\langle\xi|b\rangle$.

Рассмотрим частный случай:

$$\widehat{P}_m = |\varphi_m\rangle\langle\varphi_m|, \tag{23.17}$$

где $\{|\varphi_m\rangle\}_1^\infty$ — некоторый полный ортонормированный набор векторов. Пусть $|\xi\rangle$ — некоторый произвольный вектор, тогда

$$\widehat{P}_m|\xi\rangle = |\varphi_m\rangle\langle\varphi_m|\xi\rangle. \tag{23.18}$$

Легко видеть, что это есть кет, который является проекцией вектора $|\xi\rangle$ на базисный вектор $|\varphi_m\rangle$, т. е. $\widehat{P}_m$ есть оператор проектирования произвольного вектора $|\xi\rangle$ на базисный вектор $|\varphi_m\rangle$.

Далее рассмотрим оператор

$$\widehat{P} = \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{P}_m = \sum_{m=1}^{\infty} |\varphi_m\rangle\langle\varphi_m|. \tag{23.19}$$

Согласно (23.18) получаем

$$\widehat{P}|\xi\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{P}_m|\xi\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} |\varphi_m\rangle\langle\varphi_m|\xi\rangle. \tag{23.20}$$

Поскольку набор $\{|\varphi_m\rangle\}_1^\infty$ по условию является полным, это выражение имеет смысл разложения вектора $|\xi\rangle$ по ортонормированному базису. Поэтому

$$\widehat{P}|\xi\rangle = |\xi\rangle,$$

т. е.

$$\widehat{P} = \widehat{I}.$$

Итак,

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\varphi_m\rangle\langle\varphi_m| = \widehat{I}, \tag{23.21}$$

т. е. единичный оператор всегда может быть представлен в виде суммы операторов проектирования на каждый из векторов любого полного набора.

Предположим, что векторы $\left\{|\varphi_m\rangle\right\}_1^\infty$ являются собственными векторами некоторого оператора $\widehat{F}$, т. е.

$$\widehat{F}|\varphi_m\rangle = F_m|\varphi_m\rangle. \tag{23.22}$$

Действуя оператором $\widehat{F}$ на обе части равенства (23.21) и принимая во внимание (23.22), получаем

$$\widehat{F} = \sum_{m=1}^{\infty} F_m \widehat{P}_m. \tag{23.23}$$

Это разложение оператора $\widehat{F}$ по операторам $\widehat{P}_m$ проектирования на его собственные векторы называется *спектральным представлением* оператора $\widehat{F}$.

Упражнения к лекции 5

5.1. Построить в импульсном представлении гейзенберговский оператор координаты $\widehat{x}(t)$ для свободного движения частицы.

5.2. Построить в импульсном представлении гейзенберговские операторы $\widehat{x}(t)$ и $\widehat{p}(t)$ для линейного гармонического осциллятора.

5.3. Найти уравнение движения для операторов в так называемом «представлении взаимодействия». Волновые функции в этом представлении получаются из волновых функций в представлении Шредингера с помощью унитарного преобразования: $\psi_{\text{вз}} = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_0 t\right)\psi_{\text{Ш}}$, где $\widehat{H}_0$ — часть полного гамильтониана $\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{V}$, $\widehat{V}$ — оператор «взаимодействия».

5.4. Найти среднее значение и дисперсию энергии линейного гармонического осциллятора с потенциальной энергией $V(x) = (\mu/2)\omega^2 x^2$ в состоянии (22.15).

5.5. Найти среднее значение и дисперсию энергии свободной частицы в состоянии (22.15).

5.6. Оценить скорость расплывания волновых пакетов, описывающих свободное движение следующих частиц:

а) электрон, первоначально локализованный в области диаметром $\sim 10^{-8}$ см;

б) нейтрон, первоначально локализованный в области диаметром $\sim 10^{-13}$ см;

в) макроскопическая частица с массой 1 мг, первоначально локализованная в области диаметром 1 мм.

5.7. Найти импульсное распределение в состоянии (22.15).

5.8. Показать, что матрица оператора преобразования (20.1) для поворота на бесконечно малый угол $\delta\alpha$ вокруг направления $\mathbf{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$ имеет вид

$$\widehat{g}(\mathbf{n}, \delta\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & n_z\delta\alpha & -n_y\delta\alpha \\ -n_z\delta\alpha & 1 & n_x\delta\alpha \\ n_y\delta\alpha & -n_x\delta\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

5.9. Показать, что оператор $\widehat{g}(\mathbf{n}, \delta\alpha)$ из упражнения 5.8 удовлетворяет коммутационному соотношению

$$\widehat{g}(x, \delta\varphi_x)\widehat{g}(y, \delta\varphi_y) - \widehat{g}(y, \delta\varphi_y)\widehat{g}(x, \delta\varphi_x) = \widehat{I} - \widehat{g}(z, \delta\varphi_z),$$

где $\delta\varphi_z = \delta\varphi_x\delta\varphi_y$.

ЛЕКЦИЯ 6

§ 24. Матричная формулировка квантовой механики

1. Общие положения

В § 23 было показано, что произвольному состоянию квантовой системы можно поставить в соответствие элемент гильбертова пространства l_2, т. е. некоторую бесконечную последовательность комплексных чисел. Пусть $\psi(\xi)$ — волновая функция состояния в пространстве L_2. В пространстве l_2 этому состоянию соответствует вектор $\{a_n\}_1^\infty$, компоненты которого согласно (23.3) имеют вид

$$a_n = \langle\varphi_n(\xi)|\psi(\xi)\rangle, \tag{24.1}$$

где $\{\varphi_n(\xi)\}_1^\infty$ — некоторый базис в L_2. В качестве элементов этого базиса мы взяли собственные функции некоторого эрмитова оператора $\widehat{G}$ с чисто дискретным спектром.

Теперь установим соответствие операторов, действующих в пространствах L_2 и l_2. Пусть $\widehat{F}$ есть некоторый линейный оператор, определенный в L_2, а $\psi(\xi)$ — произвольный вектор из его области определения. Образом вектора $\psi \in L_2$ в пространстве l_2 является вектор (24.1), а образом вектора $\widehat{F}\psi \in L_2$ является вектор $\{\langle\varphi_n|\widehat{F}\psi\rangle\}_1^\infty$. Используя (23.2) и (23.3), находим:

$$\langle\varphi_n|\widehat{F}\psi\rangle = \langle\varphi_n|\widehat{F}\sum_{m=1}^{\infty}\langle\varphi_m|\psi\rangle\varphi_m\rangle = \sum_{m=1}^{\infty}\langle\varphi_n|\widehat{F}|\psi_m\rangle\langle\varphi_m|\psi\rangle. \tag{24.2}$$